数理解析研究所講究録
第 442 巻 1981 年 16-38

A class of 3-bridge knots

東工大 理　森川 治

0. はじめに

2-bridge knot は、1956 年 Schubert [9] によって分類された。すなわち、全ての 2-bridge knot は、整数の組 (p, q) に対して standard に構成される knot $K(p, q)$ と同型であり、又、2つの knot $K(p, q)$ と $K(p', q')$ が同型であるための必要十分条件は、(1) $p=p'$, (2) $q=q'$ 又は $qq' \equiv 1 \pmod{2p}$ であることが示された。

しかし、3-bridge 以上の knot に対しては、ほとんどこのような結果は知られていない。現在、全ての 3-bridge knot は 6 つの整数により表現された standard な knot $K(x, u; y, v; z, w)$ と同型であることが知られているが、これらの同型条件や、knot となるための条件は解決していない。ここでは、3つの整数の組 (p, q, r) に対し標準

的な 3-bridge knot $K(p, q; r)$ の構成法を与え、それに対して議論を行なう。

1. $K(p, q; r)$ の定義

$K(p, q; r)$ は、先ず 2-bridge knot $K(p, q)$ から、$K(p, q; 0)$ を作り、この $K(p, q; 0)$ から $K(p, q; r)$ を作ることにより得られる。

(1) $K(p, q; 0)$ は次の4つの step により構成される。

Step 0. 2-bridge knot $K(p, q)$ を作る。$\rho: S^3 \to R^2$ を regular projection とし、$K(p, q)$ は図1のように ρ で projection されているとする。

すなわち、underpass BE, FA は R^2 内にあり、overpass AB, EF は、$R^3_+ = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z \geqq 0\}$ 内の annulus A_1, A_2 上にあるとする。knot orientation は Schubert の記法と同様に、overpass AB において、A から B に向かっているように与える。

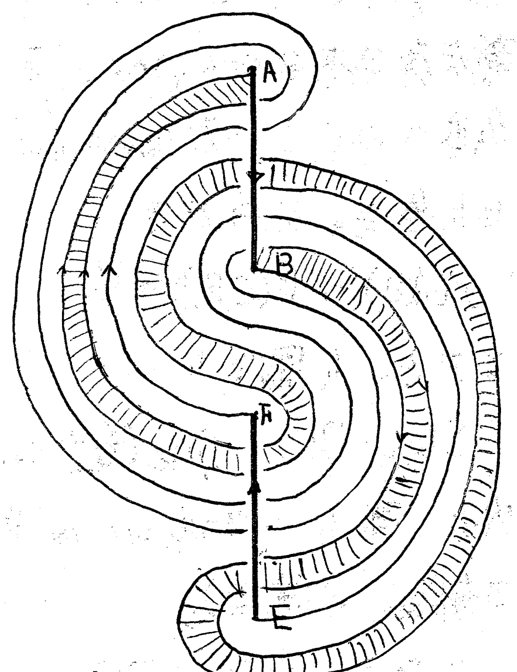


図1　$K(7, 5)$

Step 1. Parallel area を定義する。A', B' を $\rho(AB)$ 上の double point のうち、$A=\rho(A)$, $B=\rho(B)$ に最も近い点とする。$\rho^{-1}(A')\cap K(p,q)=\{A', A'_+\}$, $\rho^{-1}(B')\cap K(p,q)=\{B', B'_+\}$ となるように、A'_+, B'_+ を定義する。overpass AB の subarc AA'_+, B'_+B の projection $\rho(AA'_+)$, $\rho(B'_+B)$ と、underpass の一部 $A'B$, AB' の計4本の arc により1つの circle が出来る。この circle で囲まれる領域のうち、点Eを含まない方の領域を、"Parallel area" と呼ぶ。(図1の斜線部分)

Step 2. Parallel area 内に2点 C, D を A, B の近傍にとる。$K(p,q)$ から overpass AB を取り除き、新たな2本の overpass を AB ののっていた annulus A_1 上に作る。このとき、

$\rho(AD)\cap\rho(CB)=\phi$

とする。(図2)

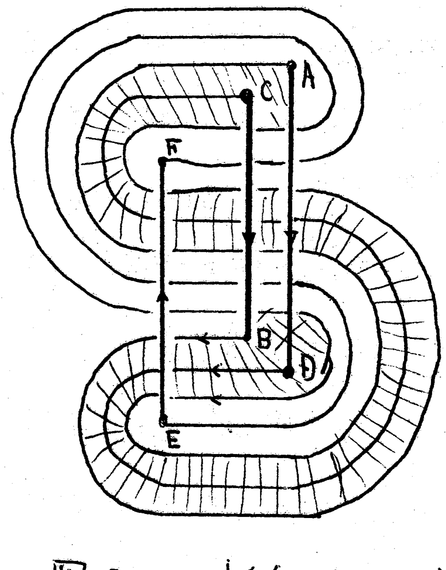


図2. $K(7,5;0)$

Step 3. Parallel area 内に、新しい underpass DC を作る。(図2)

この knot を $K(p,q;0)$ と

定義する。

(2) $r\neq 0$ の $K(p,q;r)$ は次の step により構成される。

Step 4. $\mathbb{R}^2$内で、underpass FA と DC の点 C, A の近くを、annulus A_1 を中心にして、$r>0$ のときは、右まわりに r 回, $r<0$ のときは、左まわりに $|r|$ 回 まわす。(図3)。

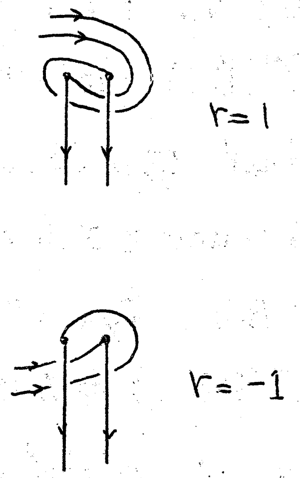


図 3

以上の操作により得られた knot を $K(p,q;r)$ と定義する。(図4)。

Remark: parallel arc をとるとき、overpass AB の代りに EF をとったとしても、2-bridge knot の対称性により全く同じ knot $K(p,q;r)$ が得られる。

次に $K(p,q;0)$ から整数の組 (s,t) を定義する。CD を annulus A_1 上の arc とし、FE を $\mathbb{R}^2-(FA\cup DC\cup BE)\cup\{E,F\}$ 上の arc とする。すると curve CDC と EFE は 2本の simple closed curve となるので、$\mathbb{R}^3$ 内の 2-bridge link となる。この link type を (s,t) とおく。すると、(s,t) は次の条件をみたす。

Lemma 1. $\det\begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix}=\pm 1$, s: even, $0<|t|<s<p$.

proof.　torus T^2を$S^2=\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}$上の$\rho(CD)$, $\rho(EF)$を branched set とする 2-fold branched covering space とする。$P: T^2 \to S^2$を covering map とする。すると、$P^{-1}(DC)$は、T^2上で simple closed curve となり、torus knot type (s,t)となる。DB を$\mathbb{R}^2$上の他の arc と交わらない arc とすると、$P^{-1}(DBE)$もT^2上の simple closed curve となり、type (p,q)となる。又、$P^{-1}(DC)\cap P^{-1}(DBE)$は、$P^{-1}(D)$ 1点だけとなるので、この2本の simple closed curve の intersection number は± 1である。又、intersection number は $\det\begin{pmatrix} p & q \\ s & t\end{pmatrix}$でもあるので、$\det\begin{pmatrix} p & q \\ s & t\end{pmatrix}=\pm 1$を得る。又、Schubert の結果より、$(s,t)$が link を表わすパラメータであるので、$s$は偶数であり、$0<|t|<s$である。又、underpass DC の定義より$s<p$は明らかである。//

このLemma より、DC は overpass EF の像$\rho(EF)$と$s/2$回交わっていることがわかる。又、$\rho(AD)$, $\rho(CB)$とは$s/2-1$回ずつ交わっていることがわかる。

Remark：(s,t)は(p,q)より幾何学的に定義し、Lemma の条件をみたすことを証明したが、Lemma の条件をみたす(s,t)は(p,q)から代数的に unique に定まることが、容易に示せる。

2. $K(p,q;r)$ の Alexander polynomial について.

knot group $\pi K = \pi_1(S^3 - K)$ を under presentation により次のように表現する。generator a, b, c として、underpass BE, FA, DC を左から右に横切った事に対応させ、relator として、overpass EF と CB から得られるものを使う。W として、$K(p,q;0)$ において、overpass EF にそって読んだ word とし、V を、やはり $K(p,q;0)$ において overpass CB にそって逆に読んだ word に対応させる。(図4)。すると πK は、$\det\begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix} = 1$ の場合

$$\langle a, b, c \mid aWb^{-1}W^{-1},\ aV(bc)^{r}c^{-1}(c^{-1}b^{-1})^{r}V^{-1} \rangle$$

又、$\det\begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix} = -1$ の場合

$$\langle a, b, c \mid aWb^{-1}W^{-1},\ aV(cb)^{r}c^{-1}(b^{-1}c^{-1})^{r}V^{-1} \rangle$$

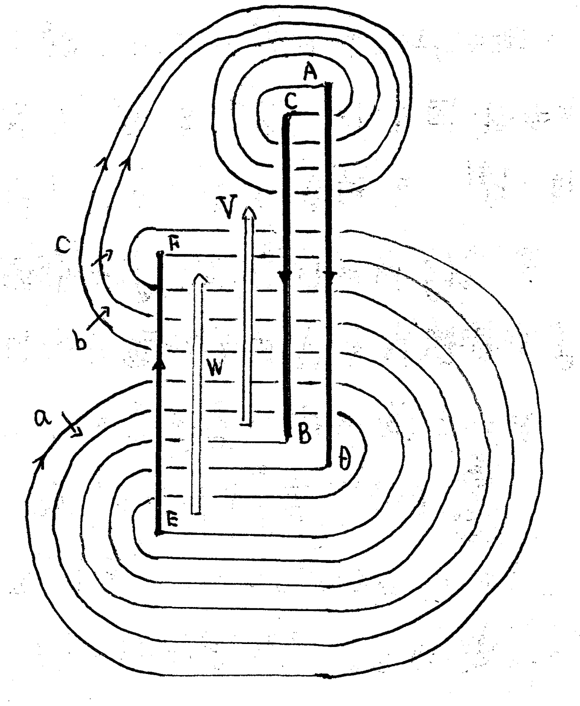


図4. $K(7,5;2)$

と表現される。すなわち、2番目の relator (overpass BC に対応するもの) しか r の影響をうけない。

word W は次の性質をみたす。

Lemma 2. $\#\{i \mid i\text{-th term of } W \text{ is } a^{\pm 1},\ i \text{ is odd}\}$
$-\#\{i \mid i\text{-th term of } W \text{ is } a^{\pm 1},\ i \text{ is even}\} = 1 \text{ or } 0$

Proof. word W を
$W = U_0 c^{\varepsilon_1} U_1 c^{\varepsilon_2} \cdots\cdots U_{k-1} c^{\varepsilon_k} U_k$, $\varepsilon_j = \pm 1$, U_j は $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ から成る word

とすると、word $U_0 U_1 \cdots U_k$ は 2-bridge knot $K(p,q)$ の overpass EF にそって読んだ word である。よってこの word 内では、$a^{\pm 1}$ と $b^{\pm 1}$ が交互に表われている。又、U_0 は $b^{\pm 1}$ で始まっている。すなわち、次のことが言える：

◎ U_j 内の $a^{\pm 1}$ は、j が偶数なら W 内で偶数文字目の、j が奇数なら W 内で奇数文字目の文字である。

よって次の式の値が 0 又は 1 であることを示せばよい。

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+1} \#\{i \mid i\text{-th term of } U_j \text{ is } a^{\pm 1}\} \quad \cdots\cdots (*)$$

次に、set $\{0, 1, \cdots, k\}$ 上の permutation σ を次のように定める。$S^2 - \rho(EF) - \rho(DC)$ の connected open domain $O_1, O_2, \cdots, O_k$ を考える。このとき、O_1 を、点 E を含む open disk とする。Lemma 1 で述べたように、underpass DC は、2-bridge link (s,t) type の underpass と同じふるまいをする。すなわち、$Cl(O_i) \cap \rho(DC)$ は 2本の subarc であり、$Cl(O_i) \cap \rho(EF)$ も 2本の subarc である（となり合う 2

本の subarc の場合もある。(図5)。ここで、(1) $\sigma(0)=0$,
(2) O_j の closure と $\rho(EF)$ の交わりは、word $U_{\sigma(j-1)}$ と $U_{\sigma(j)}$ に対応する subarc である、とする。

このように定義した σ は次の性質をみたす。

$$\sigma(j)\equiv j \pmod 2$$

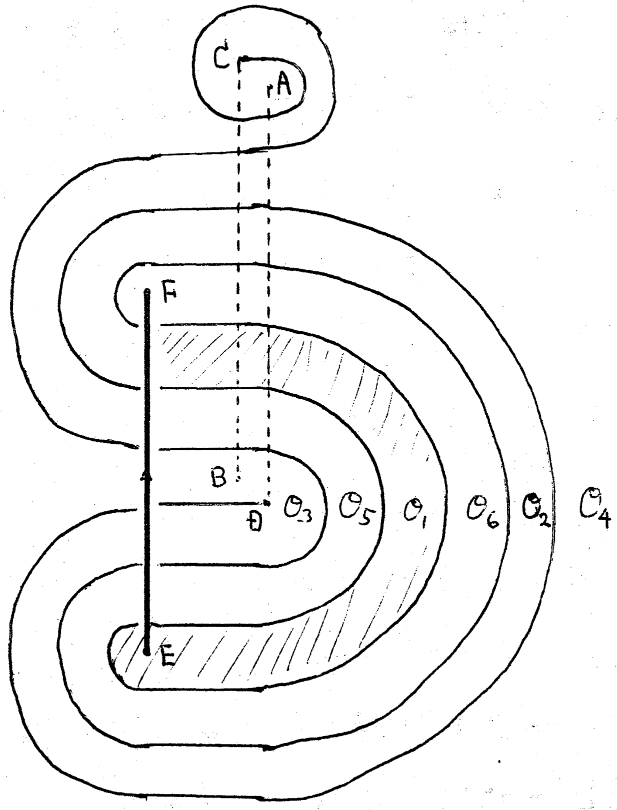


図5. $K(17, 7; -2)$

なぜなら、点Dを含む domain O_j が存在する(図5の O_3)。すると、σ の定義(2)より、$\sigma(j)$ と $\sigma(j-1)$ はとなり合っている。すなわち、$\sigma(j-1)\equiv\sigma(j)+1 \pmod 2$ である。次に、O_j に DC により接している domain O_i が必ず存在する(図5の O_5)。このとき、次のどちらかが成り立つ。

$$\begin{cases}\sigma(j)\equiv\sigma(i)+1 \quad \text{and} \quad \sigma(j-1)\equiv\sigma(i-1)+1 \pmod 2 \\ \text{又は} \\ \sigma(j)\equiv\sigma(i-1)+1 \quad \text{and} \quad \sigma(j-1)\equiv\sigma(i)+1 \pmod 2\end{cases}$$

しかし、いずれの場合でも、$\sigma(i-1)\equiv\sigma(i)+1 \pmod 2$ が成り

立つ。同様に、O_i と $\widehat{DC}$ と接していて、O_j でない domain O_k が見つかり、$\sigma(k-1) \equiv \sigma(k)+1 \pmod 2$ が成り立つ。よって、全ての j で $\sigma(j-1) \equiv \sigma(j)+1 \pmod 2$ が成り立つ。又、σ の定義(1) より $\sigma(0) \equiv 0 \pmod 2$ であるから、結局 全ての j で、$\sigma(j) \equiv j \pmod 2$ が成り立つ。よって、次の式の値は、式(*) の値と等しい。

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+1} \# \{ i \mid i\text{-th term of } U_{\sigma(j)} \text{ is } a^{\pm 1} \} \text{----} (**)$$

さて、generator a は underpass BE に対応して定義されたことを思い出して、式(**) を見ると次のことがわかる。σ の定義より明らかなように、$U_{\sigma(j)}$ に対応する subarc を BE が横切った次は、$U_{\sigma(j\pm 1)}$ に対応する subarc を横切る。すなわち、BE にそって見るとき、W 内の $a^{\pm 1}$ は、式(**) の値を増加させるものと、減少させるものが交互に現れる。BE において最後に横切る点は $U_{\sigma(1)}$ に対応する EF の subarc であるため、最初に横切る点により式(**) の値は 1 又は 0 となる。//

word W の Lemma 2 の性質より、次の定理が導かれる。

Theorem 1. (p, q) を、共に奇数，$0<|q|<p$，$(p,q)=1$ を満たす整数の組とする。3-bridge knot $K(p,q;r)$ の Alexander polynomial を Δ_r と書くことにする。このとき、整数の組、$r_0, r_1, n, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が存在し、次の条件

を満たす。

1). $r_0 < r_1$

2) $\forall r \geq r_1$ に対し、Δ_r の係数は、

$$\alpha_1\ \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n\ \underline{1\ -1\ 1\ -1 \cdots\cdots 1\ -1}\ 1\ \alpha_n \cdots\cdots \alpha_1$$

となり、下線部分は、$(1,-1)$ が $(r-r_1)$ 回くり返し現れている。

3). $\forall r \leqq r_0$ に対し、Δ_r の係数は、

$$\alpha_n{+}1\ \alpha_{n-1}{-}1 \cdots\cdots \alpha_2{+}1\ \alpha_1{-}1\ \underline{1\ -1\ 1\ -1 \cdots 1\ -1}\ 1\ \alpha_1{-}1 \cdots\cdots \alpha_n{+}1$$

$(n : \text{even})$

又は、

$$\alpha_n{+}1\ \alpha_{n-1}{-}1 \cdots\cdots \alpha_2{-}1\ \alpha_1{+}1\ -1\ \underline{1\ -1\ 1 \cdots\cdots -1\ 1\ -1}\ \alpha_1{+}1 \cdots\cdots \alpha_n{+}1$$

$(n : \text{odd})$

となり、下線部分は、$(1,-1)$ を (r_0-r) 回くり返したものである。

<u>Proof.</u> knot group πK の表示は2通りあったが、先ず次のタイプについて証明する。

$$\pi K = \langle a, b, c \mid aWb^{-1}W^{-1},\ aV(bc)^r c^{-1}(c^{-1}b^{-1})^r V^{-1} \rangle$$

$*$ を abelianization とし、$a^* = b^* = c^* = x$ とする。すると Alexander polynomial は、

$$\Delta_r(x) = \begin{vmatrix} \left\{\frac{\partial}{\partial a}(aW - Wb)\right\}^* & \left\{\frac{\partial}{\partial b}(aW - Wb)\right\}^* \\ \left\{\frac{\partial}{\partial a}(aV(bc)^r - V(bc)^r c)\right\}^* & \left\{\frac{\partial}{\partial b}(aV(bc)^r - V(bc)^r c)\right\}^* \end{vmatrix}$$

と書ける。ここで、Polynomial $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ と整数 m を次の式が成り立つように選べる。

$$\Delta_r(x) = \begin{vmatrix} 1+f_1(x)(x-1) & f_2(x) \\ f_3(x) & f_4(x)-x^m\frac{1-x^{2r}}{1+x} \end{vmatrix}$$

この f_1, f_2, f_3, f_4, m は、word W, V によってのみ定まるので、r には関係しない。ここで、word W, V の長さを l_1, l_2 とする。又、多項式 $f(x)$ が $\sum_{k=i}^{j} a_k x^k$ と書けるとき、

<u>$i \leqq \text{power}(f) \leqq j$</u> と記述することにする。$f_1, f_2, f_3, f_4, m$ は次の条件をみたす。

1) $-l_2 \leqq m \leqq l_2$

2) $-l_1 \leqq \text{power}(f_1) \leqq l_1$

3) $-l_1 \leqq \text{power}(f_2) \leqq l_1$

4) $-l_2 \leqq \text{power}(f_3) \leqq l_2$

5) $-l_2 \leqq \text{power}(f_4) \leqq l_2$.

Alexander polynomial $\Delta_r(x)$ は、

$$\begin{aligned} \Delta_r(x) &= (1+f_1(x)(x-1))\left(f_4(x)-x^m\frac{1-x^{2r}}{1+x}\right) - f_2(x)f_3(x) \\ &= (1+f_1(x)(x-1))\ f_4(x) - f_2(x)f_3(x) - x^m(1+f_1(x)(x-1))\frac{1-x^{2r}}{1+x} \\ &= f_5(x) - x^m(1+f_1(x)(x-1))\frac{1-x^{2r}}{1+x} \end{aligned}$$

ただし、$-(l_1+l_2) \leqq \text{power}(f_5) \leqq (l_1+l_2+1)$ である。

ここで、$f_1(x) = \{\frac{\partial}{\partial x}W\}^*$ であることと、W が lemma 2 で述べた性質をみたすことより、次の様な条件をみたす多項式 $g(x)$ が存在する。

$$1+f_1(x)(x-1) = (1+x)\,g(x) + \varepsilon, \qquad \varepsilon = \pm 1$$

$$-l_1 \leqq \mathrm{power}(g) \leqq l_1$$

よって、

$$x^{-m}\Delta_r(x) = x^{-m} f_5(x) - g(x) + x^{2r} g(x) - \varepsilon \frac{1-x^{2r}}{1+x}$$

$$= f_6(x) + x^{2r} g(x) - \varepsilon \frac{1-x^{2r}}{1+x}$$

ただし、 $-(l_1+2l_2) \leqq \mathrm{power}(f_6) \leqq l_1+2l_2+1$ 。

よって、 $r \geqq 2l_1+2l_2+1$ 又は $r \leqq -(2l_1+2l_2)$ のとき、Δ_r の係数の中間部は、$f_6(x)$, $g(x)$ にかかわらず、$-\varepsilon\frac{1-x^{2r}}{1+x}$ の係数 1 又は −1 がそのまま現れる。

$\pi K = \langle a, b, c \mid aWb^{-1}W^{-1},\ aV(cb)^r c^{-1}(b^{-1}c^{-1})^r V^{-1} \rangle$

のタイプに対しても、全く同様に証明できる。 //

Th. 1 で示べた (p, q) から定まる $(r_0, r_1, n; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ を $\Gamma(p, q)$ と書くことにする。

この定理により、1つの (p, q) から得られる 3-bridge knot K(p, q; r) が、ほとんど全て相異なることがわかる。

又、次の結果も導ける。

Corollary 1. 2-bridge knot K(7, 3) と K(7, 5) は同じ knot type である[9]。しかし、任意の r, r' に対し、K(7, 3; r) と K(7, 5; r') が同じ knot type となることはない。

Proof. Th. 1 を利用することにより、有限個の Alexander polynomial を比較することにより証明できる。

$\Gamma(7,3) = (-2, 4, 5 ; 0, 2, -4, 3, -1)$ であり、$-2 < r < 4$ の r に対し、Δ_r は、

$$\Delta_{-1} = 2x^3 - 3x^2 + x + 1 + x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

$$\Delta_0 = 2x^2 - 3x + 3 - 3x^{-1} + 2x^{-2}$$

$$\Delta_1 = 4x - 7 + 4x^{-1}$$

$$\Delta_2 = 2x^2 - 4x + 5 - 4x^{-1} + 2x^{-2}$$

$$\Delta_3 = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 + 3x^{-1} - 4x^{-2} + 2x^{-3}$$

一方、

$\Gamma(7,5) = (-2, 4, 5 ; 1, -1, -1, 2, -1)$ であり、$-2 < r < 4$ の r に対し、$\Delta_{r'}$ は、

$$\Delta_{-1} = x^3 - 2x + 3 - 2x^{-1} + x^{-3}$$

$$\Delta_0 = x^2 + x - 3 + x^{-1} + x^{-2}$$

$$\Delta_1 = x^2 - 1 + x^{-2}$$

$$\Delta_2 = x^3 - x^2 - x + 3 - x^{-1} - x^{-2} + x^{-3}$$

$$\Delta_3 = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1 + 2x^{-1} - x^{-2} - x^{-3} + x^{-4}$$

である。

よって、任意の r, r' に対し、$\Delta_r \neq \Delta_{r'}$ である。すなわち、任意の r, r' に対し、$K(7,3;r)$ と $K(7,5;r')$ が同じ knot type となることはない。//

3. K(p,q;r) の性質について.

一般に、n-bridge knot は. genus n の standard surface F_n 上に embed できることは明らかである。しかし. K(p,q;r) は 3-bridge knot にもかかわらず、定義から明らかなように. genus 2 の F_2 上に embed できる。

<u>Prop. 1</u> K(p,q;r) は F_2 上に embed できる。

このことから、次の定理が導ける.

<u>Theorem 2</u> K(p,q;r) は strongly invertible knot である。

<u>Proof</u> genus 2 の standard surface F_2 上の simple closed curve は、S^3 内の F_2 の ambient isotopy により、対称な形に変形できる[1]。すなわち. S^3 の involution $f: S^3 \to S^3$ が存在し、$f(F_2) = F_2$, $f(K(p,q;r)) = K(p,q;r)$ をみたすようにできる。又、K(p,q;r) の F_2 への embedding は、F_2 上で homologous 0 ではない。(overpass EF が annulus A_2 にのっていることを考えれば明らかである)。よって. knot K は、involution f の fixed point をもつ。すなわち、K は strongly invertible knot である。//

Remark : F_2 上に embed できる knot として、

2- bridge knot 以外のもので知られているのは、Pretzel knot のうち、twist 部分が3つあるタイプの $P_3(p,q,r)$ である。しかし、これは. F_2 上で homologous 0であるので、Theorem 2 は成立しない。例えば、$P_3(7,5,3)$ は non-invertible knot であることが、1964年. Trotter により示された[12]。

Prop. 1 で knot $K(p,q;r)$ は genus 2 の standard surface F_2 上にのることを示したが、次の knot はさらに、genus 1. すなわち torus にのる knot である。

<u>Prop 2.</u> $K(3,1;0) \approx T(5,2) \approx K(5,1)$

<u>Proof</u> $\rho(K(3,1;0))$ において、AD と DC の交わりは、1点Dだけである(図6)。そこで、underpass DC の上を横切っているoverpass を DC 及び. overpass AB にそって動かし変形することにより、underpass FA の上を横切るように変形できる. この操作により、underpass DC 上を横切る

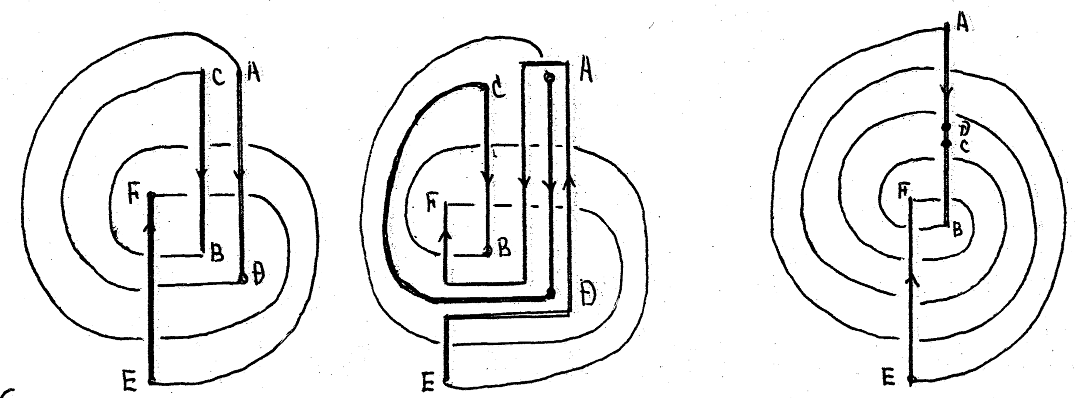


図6. K(3,1;0) K(5,1)

overpass を全て取り除くことができる。この操作を、"点Dに関する move operation" と呼ぶ。[4][5]。これにより、ADCB を1つの overpass とすることが出来る。よって、2つの overpass をもつ knot が得られ、Schubert の標準型にもってゆくと、$K(5,1)$ が得られる、又、Schubert の結果により、このknot は torus knot $T(5,2)$ であることがわかる。//

さらに次の knot も torus knot である。

<u>Prop. 3</u>　$K(2n+1,1;-1)$, $K(2n+1,1;-2)$ は torus knot $T(3n+1,3)$, $T(3n+2,3)$ である。($n=1,2,\cdots$)。

<u>Proof</u>　$K(2n+1,1;-1)$ について。

先ず overpass CB を overpass AD の上をまたがせる (7-1 ⇒ 7-2)。overpass EF を、点 F を中心に回転させ、AD のとなりにもってゆく (7-2 ⇒ 7-3)。すると、3本の overpass EF, AD, CB は1つの annulus A_1 上にのせられるので、torus knot である。(7-4)。以上の変形で、overpass EF にある double points の数は不変であるので、$K(2n+1,1;-1)$ のときと同じ、$3n$ ケである。よって、この torus knot は type $(3n+1,3)$ である。

$K(2n+1,1;-2)$ について。

overpass EF を点Fを中心に回転させ．overpass CB の近くにもってゆく．(8-1⇒8-2)。underpass CD を underpass EB の下をくぐらせる（8-2⇒8-3）。overpass EF を overpass CB 及び AD の下をくぐらせる (8-3⇒8-4)。これにより、3本の overpass は1つの annulus 上にのせられるので、torus knot である。この変形で、overpass EF 上の double point の数は、初め $3n$ ケであったものが、(8-2⇒8-3) の変形で1つ増加して、(underpass CD との交わりが増加) $3n+1$ となる。その後は不変であるので、torus knot の type は $(3n+2, 3)$ である。//

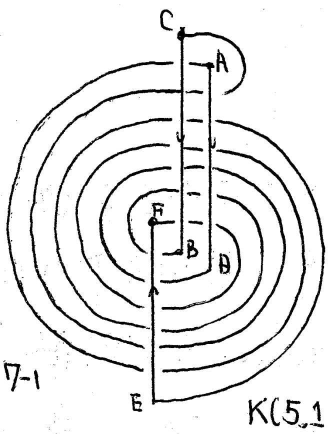


図 7-1

K(5,1;-1)

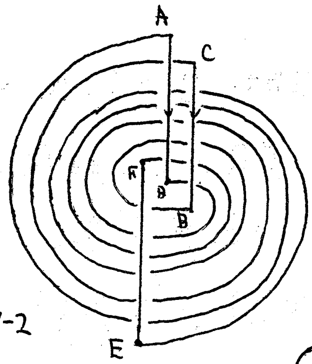


図 7-2

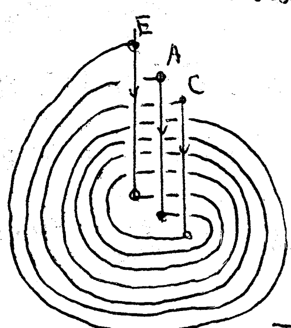


図 7-3

T(7,3)

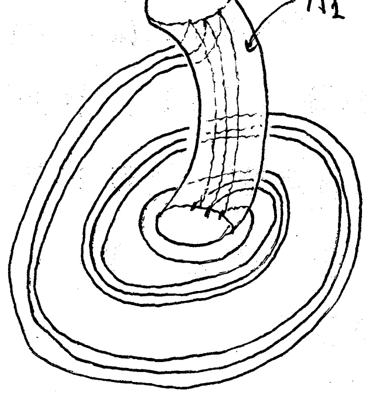


図 7-4

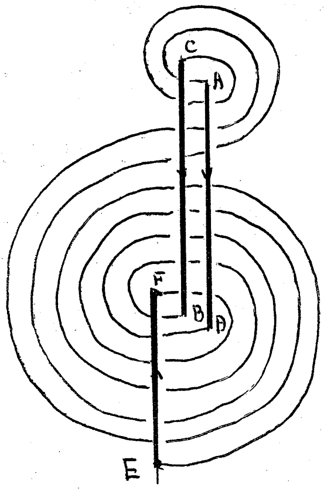


図8-1

$K(5,1;-2)$

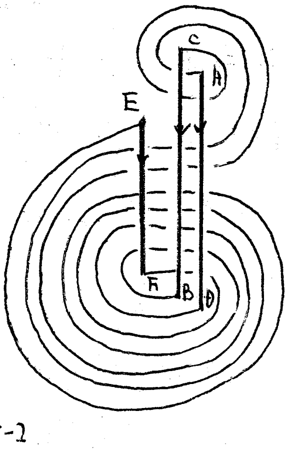


図8-2

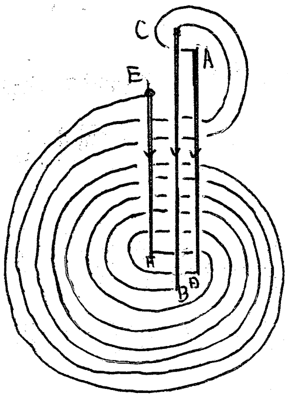
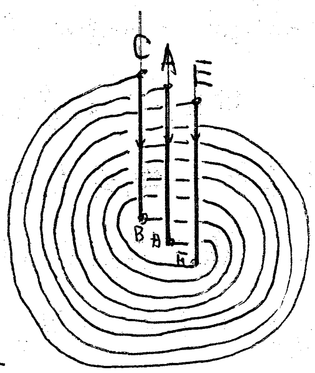


図8-3



$T(8,3)$

図8-4

さて、$K(P,Q;r)$ は 3-bridge knot であるが、次の knot の bridge index は 2 である。

<u>Prop 4</u> 次の knot は 2-bridge knot type に属する。

$$K(4n+1,\ 2n+1;\ 0) \approx K(8n+1,\ 6n+1)$$

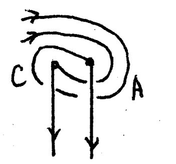
$$K(4n+1,\ 2n+1;\ 1) \approx K(8n+3,\ 2n+1)$$

$$K(4n+3,\ 2n+1;\ 0) \approx K(8n+5,\ 2n+1)$$

$$K(4n+3,\ 2n+1;\ -1) \approx K(8n+7,\ 6n+5)$$

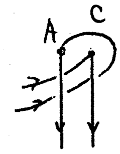
<u>Proof</u>　これらの knot は Lemma 1 で述べた (s,t) が $(2,1)$ となるものである。よって、$r=0$ のとき、$\rho(CB)$ と BC の交わりは1点 C だけから成る。又、$K(4n+1,2n+1;1)$ のとき（図 9-1），$K(4n+3,2n+1;-1)$ のとき（図9-2）もこの性質はくずれない。よって、点 C に関する move operation が行なえ、2-bridge knot を得る。//

ほとんどの knot $K(p,q;r)$ は、Alexander polynomial により、bridge index が3であることや、torus knot でないことが示せるが、例外もある。



$K(4n+1,2n+1;1)$

図9-1



$K(4n+3,2n+1;-1)$

図9-2

<u>Prop 5</u>　次の knot の Alexander polynomial は、2-bridge torus knot のそれと同じであるが、異なる knot である。すなわち、bridge index 3 の knot である。

(1)　$K(4n+1,1;3n) \not\simeq T(6n+1,2)$　$(n=1,2,\cdots)$

(2)　$K(4n-1,1;3n-3) \not\simeq T(6n-1,2)$　$(n=2,3,\cdots)$

<u>証明のアウトライン</u>：

(1) の knot の $\pi K = \langle a,b,c \mid a(bca)^{2n}b^{-1}(a^{-1}c^{-1}b^{-1})^{2n},\ a(b^{-1}a^{-1}c^{-1})^{2n-1}b^{-1}a^{-1}(bc)^{3n}c^{-1}(c^{-1}b^{-1})^{3n}ab(cab)^{2n-1} \rangle$ であることより、Alexander polynomial を求めると、$\dfrac{t^{12n+2}-1}{(t^{6n+1}-1)(t+1)}$ が得られる。これは $T(6n+1,2)$ のそれと等しい。異なることを示すために村杉 signature を求め

ると、$\sigma(K(4n+1,1;3n))=2n$, $\sigma(T(6n+1,2))=6n$ が得られ、異なることが示せる。

(2) の knot の $\pi K=\langle a,b,c \mid a(bca)^{2n-1}b^{-1}(a^{-1}c^{-1}b^{-1})^{2n-1},\ a(b^{-1}a^{-1}c^{-1})^{2n-2}b^{-1}a^{-1}(bc)^{3n-3}c^{-1}(c^{-1}b^{-1})^{3n-3}ab(cab)^{2n-2}\rangle$ であることより $\Delta(x)=\dfrac{x^{12n-2}-1}{(x^{6n-1}-1)(x+1)}$ が得られ $T(6n-1,2)$ と同じことがわかる。又、村杉 signature は、$\sigma(K(4n-1,1;3n-3))=2n+2$, $\sigma(T(6n-1,2))=6n-2$ より、$n\geqq 2$ では異なる。//

Remark: (2) において $n=1$ のときは、同じ knot type となる。(Prop 1)。 (1) の証明の別証として、unknotting number を用いた証明がある (近藤)。

この他、この section に書くべきことも多くあるが、紙面の都合で、後は結果だけ述べておく。詳しくは、[6] を参照して下さい。

<u>Prop 6</u>. 次の knot の Alexander polynomial は互に等しいが、相異なる knot type の knot である:

$n, k\geqq 1$, $n\neq k$ のとき、

(1) $K(4n+1,1;3n+3k)\not\approx K(4k+1,1;3n+3k)$

(2) $K(4n-1,1;3n+3k-3)\not\approx K(4k-1,1;3n+3k-3)$

$n, k\geqq 1$ のとき、

(3) $K(4n+1,1;3n-3k)\not\approx K(4k-1,1;-3n+3k-3)$

$K(p,q;r)$ を branched set とする $S^3=\mathbb{R}^3\cup\{\infty\}$ の 2-fold branched covering space を $\mathfrak{D}(p,q;r)$ と書くことにする。

<u>Prop 7</u>　$\mathfrak{D}(p,q;r)$ は homology lens space である。

<u>Prop 8</u>　$\mathfrak{D}(4n+1, 2n+1; r)$ 、$\mathfrak{D}(4n+3, 2n+1; r)$ は Seifert mfd である。

<u>Theorem 3</u>　任意の (p,q) に対し、$\mathfrak{D}(p,q;r)$ が homology sphere となる r が存在する。

4. コンピュータ実験の結果と問題

p の値が17以下の全ての $K(p,q;r)$ は、Prop 2, 3 で示したもの以外に torus knot は存在せず、Prop 2, 4 で示したもの以外は、2-bridge knot と同じ knot type にはならないことが証明できた。そこで、

予想：　Prop 2, 3 以外の knot は全て torus knot でない。また、Prop 2, 4 以外の knot の bridge index は3である。

又、$K(5,1;2)\approx K(7,5;-1)$ である。よって、$K(p,q;r)$ は、(p,q,r) と1対1対応はつかない。

問題：$K(p,q;r)\approx K(p',q';r')$ となる triplet

(p, q, r) と (p', q', r') の関係を明らかにせよ。

References

[1] J.S. Birman and H.M. Hilden : Heegaard splitting of branched covering of S^3, Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975) 315-352

[2] R.I. Hartley : On two bridge knot polynomials. J. Austral. Math Soc. 28 (1979), 241-249

[3] J.M. Montesinos : Variedades de Seifert que son recubridores ciclicos ramificados de dos hojas, Bol. Soc. Mat. Mexicana. 18 (1973), 1-32

[4] 森川 治 : An algorithm for decreasing bridge numbers of knots. 東工大・情報科学科修士論文 (1979)

[5] 森川 治 : 結び目の作図とその簡素化, bit 13 (1981) 812-821

[6] 森川 治 : A class of 3-bridge knots, to appear in Math. Sem. Notes of Kobe Univ.

[7] K. Murasugi : On a certain numerical invariant of link types, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 387-442

[8] D. Rolfsen : Knots and Links, Publish or Perish Inc. Berkley, 1976

[9] H. Schubert : Knoten mit zwei Brücken. Math.

Z. 65 (1956) 133-170

[10] Y. Shinohara: On the signature of knots and Links, Ph.D. Florida, 1969

[11] 戸川隼人: マトリックスの数値計算, オーム社

[12] H. Trotter: Non invertible knots exist, Topology 2 (1964) 275-280