数理解析研究所講究録
第442巻 1981年 64-73

リンクのGromov不変量および3次元多様体の双曲的領域のホモトピー不変性について

早大 理工　　相馬 輝彦

我々は[4]においてリンクexteriorのGromov不変量とリンクとの関係を考えた．この論文では[4]の"Note Added in Proof"で述べたことの正確な証明を与える．また既約コンパクト3-多様体でその境界がトーラスからなるもののトーラス分解における双曲的成分全体（これを双曲的領域ということにする）はホモトピー不変であることを示す．これは[3，定理29.1]からも得られるがここではGromov不変量を使ったより簡単な証明を与える．

§1. 準備

この論文ではすべてPL-カテゴリーの中で議論する．また3-多様体はつねに向きづけ可能とする．

Xを任意の位相空間とし，$C_*(X)=\sum_{k\geq 0} C_k(X)$を$\mathbb{R}$-係数の特

異鎖複体とする．$C_{\mathbb{R}}(X)$ の任意の元 c は $c=\sum_i r_i\sigma_i$ の形で定義される．ここで $r_i\in\mathbb{R}$，σ_i は特異単体．このとき c の<u>ノルム</u> $\|c\|$ を

$$\|c\|=\sum_i|r_i|\geq 0$$

で定義する．

Mをコンパクトな3-多様体でその境界 ∂M はいくつかのトーラスからなるものとする．このときMの（Thurston型の）<u>Gromov 不変量</u> $\|M\|_0$ を

$$\|M\|_0=\lim_{\varepsilon\to 0}\inf\{\|c\|;\ c\in C_3(M),\ [c]=[M,\partial M],\ \|\partial c\|<\varepsilon\}$$

で定義する．

Lを S^3 のリンクとする．$E(L)=S^3-\mathrm{int}\,N(L)$ をLの<u>リンク exterior</u> という．ここで $N(L)$ はLの S^3 における正則近傍である．Lの<u>Gromov 不変量</u> $\|L\|_0$ を

$$\|L\|_0=\|E(L)\|_0$$

で定義する．我々は [4] の中で次の定理を証明した．

<u>定理1</u>. L_1, L_2 を S^3 の２つのリンクとする．このとき次の(i), (ii), (iii)が成立する．

(i) $\|L_1+L_2\|_0=\|L_1\|_0+\|L_2\|_0$,

(ii) $\|L_1 \# L_2\|_0 = \|L_1\|_0 + \|L_2\|_0$,

(iii) ノットのGromov不変量はノット群によって決まる.

定理3において定理1(iii)をリンクの場合に拡張する. これ以後の記号, 定義はすべて[4]に従う.

§2. 双曲的領域のホモトピー不変性

Mを既約コンパクト3-多様体で, ∂Mは空でないいくつかのトーラスからなるとする. このときThurstonの定理[5, 定理A]とトーラス定理[2, 定理3.5]により, int Mの中にincompressibleで互いに素なトーラス$T_1 + \cdots + T_n$が存在して, Mを$T_1 + \cdots + T_n$に沿って切り開いたコンパクト3-多様体(これを$M_{T_1+\cdots+T_n}$と表す)の各連結成分NはSeifertファイバード空間であるかまたはint Nは双曲的3-多様体(負の定曲率(=-1)をもつ完備, 有限体積のRiemann多様体)になる. 前者の場合Nをこのトーラス分解の<u>Seifert成分</u>, 後者の場合Nを<u>双曲的成分</u>という. 双曲的成分の素な和集合(disjoint union)をMの<u>双曲的領域</u>といい$\mathcal{H}(M)$と書く. [2, 定理3.5]により$\mathcal{H}(M)$はトーラス分解によらずMのみによって決まることがわかる.

実際，次の定理より $\mathcal{H}(M)$ が M のホモトピー型に依らないことがわかる．

<u>定理</u>2．M, N を既約コンパクト3-多様体で，トーラスからなる境界をもつものとする．M, N がホモトピー同値のとき，$\mathcal{H}(M)$ と $\mathcal{H}(N)$ は同相になる．このとき特に $\|M\|_0=\|N\|_0$ が成立する．

証明．$H_1,\cdots,H_k$ を N の双曲的成分とする．したがって $\mathcal{H}(N)=H_1+\cdots+H_k$．また N のトーラス分解を $H_i\cap H_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ となるようにとる．もし $H_i\cap H_j\neq\emptyset$ のときは H_i と H_j の間にいくつかの $T^2\times I$ に同相な Seifert 成分を加えたトーラス分解を考えればよい．図1参照．

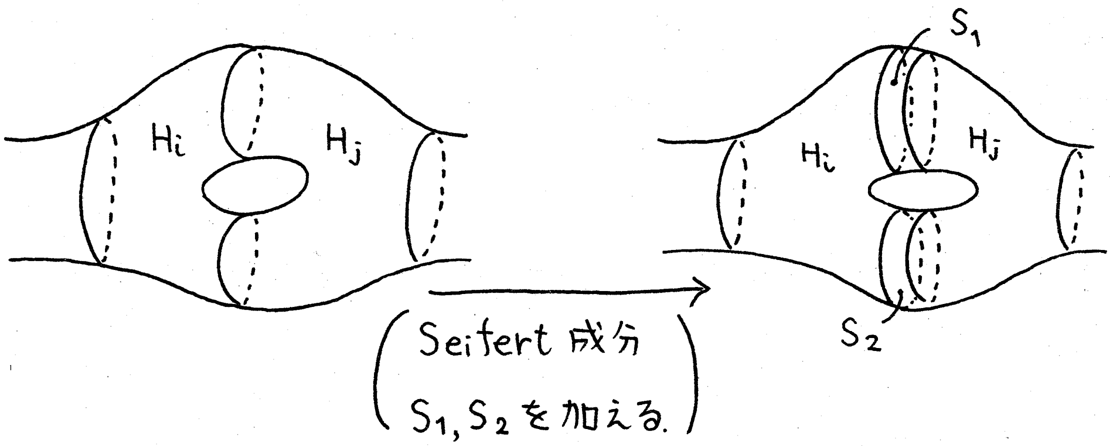

図 1.

同様にして $H_i \cap \partial N = \emptyset$ ($i = 1, \cdots, k$) と仮定できる.

$f: M \longrightarrow N$ をホモトピー同値写像とする. このとき $f^{-1}(T_1 + \cdots + T_n)$ は互いに素ないくつかの incompressible トーラスおよびアニュラスからなると仮定してよい ([1, 補題 6.5] 参照). ここで $T_1 + \cdots + T_n$ は N のトーラス分解を定義している incompressible トーラス. $f^{-1}(H_i) = H_i'$ とおく. $f_*: \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(N)$ は全射だから, $H_i' \neq \emptyset$ である.

主張1. $f(\partial H_i') = \partial H_i$ と仮定できる.

証明. T を $\partial H_i'$ の 1 つの連結成分とすると, $f(T) \subset H_i$ となる. H_i は本質的トーラスは含まないので $f(T)$ は ∂H_i のある連結成分にホモトピックになる. $f(T)$ をそのホモトピーに沿って ∂H_i の中に押し込む. $H_i \cap H_j = \emptyset$ ($i \neq j$) としたから, ホモトピーは $f^{-1}(H_j)$ ($j \neq i$) を動かさずに実現できる. □

主張2. H_i' は $T^2 \times I$ に同相な連結成分をもたないと仮定できる.

証明. H_i' のある連結成分 C が $T^2 \times I$ に同相であるとする. このとき主張1より $f(\partial C) \subset \partial H_i$. C の図2のような分解を

考える.

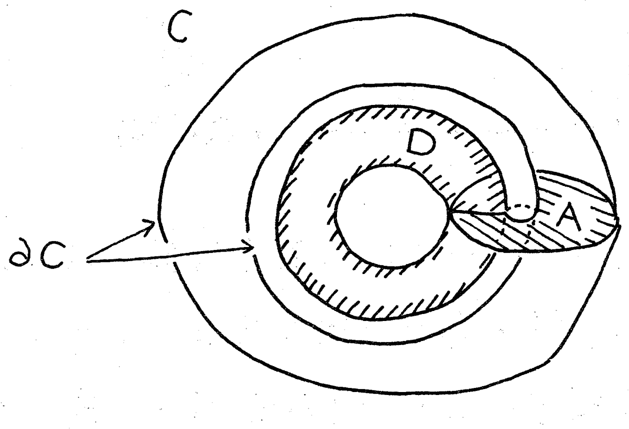

図 2.

H_iは本質的なアニュラスを含まないから, fをホモトピーで動かして $f(A \cup \partial C) \subset \partial H_i$ となるようにできる. このとき $f(\partial D) \subset \partial H_i$となる. ∂H_iはH_iで incompressible であり, $\pi_2(H_i)=0$ だから, fをホモトピーで動かして $f(D \cup A \cup \partial C) \subset \partial H_i$ となるようにできる. $C_{A+D} \approx B^3$, $f(\partial(C_{A+D})) \subset \partial H_i$, $\pi_3(H_i)=0$ であるから, fをホモトピーで動かして $f(C) \subset \partial H_i$ とできる. 最後に $f(C)$をH_iの外側の Seifert 成分の中へと押し出すことによって, $f^{-1}(H_i)=H_i'-C$とできる. $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ $(i \neq j)$であるから, これらのホモトピーは$f^{-1}(H_j)$ $(i \neq j)$ を動かさずに定義できる. □

<u>定理2の証明の続き</u>. CをH_i'の1つの連結成分とするとき次の可換な図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(C) \arrow[r, "(f/C)_*"] \arrow[d, "i_*"'] & \pi_1(H_i) \arrow[d, "j_*"] \\
\pi_1(M) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(N)
\end{tikzcd}$$

ここで $i: C \to M$, $j: H_i \to N$ は包含写像. i_*, j_* は単射, f_* は同型であるから, $(f/C)_*$ は単射である. したがって Waldhausen [6, 定理6.1] より, $f/H_i': H_i' \to H_i$ は n_i 重被覆写像 $(n_i \geq 1)$ $p_i: H_i' \to H_i$ にホモトピックになる. したがって H_i' は M のいくつかの双曲的成分の和集合となる. すなわち $H_1' + \cdots + H_k' \subset \mathcal{H}(M)$. Gromov 不変量の定義より, $\|H_i'\|_0 = n_i \|H_i\|_0$ となる. このとき次の不等式が成り立つ ([4, 補題2] 参照).

$$\|N\|_0 = \|H_1\|_0 + \cdots + \|H_k\|_0 \underset{(*)}{\leq} n_1 \|H_1\|_0 + \cdots + n_k \|H_k\|_0$$
$$= \|H_1'\|_0 + \cdots + \|H_k'\|_0 \underset{(**)}{\leq} \|M\|_0.$$

また同様にして, $\|M\|_0 \leq \|N\|_0$ も示される. したがって $\|M\|_0 = \|N\|_0$ となり, 不等式 (*), (**) は等式になる. (*) の等式成立より, $n_1 = \cdots = n_k = 1$. したがって各 p_i は同相写像になる. (**) の等式成立より, $\mathcal{H}(M) = H_1' + \cdots + H_k'$ (双曲的成分の Gromov 不変量が正であることに注意せよ). したがって

$p_1 + \cdots + p_k: \mathcal{H}(M) \longrightarrow \mathcal{H}(N)$ は同相写像になる. □

§3. リンクのGromov不変量のリンク群による不変性

LをS^3のリンクとするとき，$\pi L = \pi_1(E(L))$とおく．

定理3．L_1, L_2をS^3のリンクとする．$\pi L_1 \cong \pi L_2$のとき$\|L_1\|_0 = \|L_2\|_0$となる．

証明．L_1, L_2のsplitting：

$$L_1 = L_{11} + \cdots + L_{1k},$$

$$L_2 = L_{21} + \cdots + L_{2\ell}$$

を考える．ここで各L_{ij}はnon-splittable．このとき

$$\pi L_1 \cong \pi L_{11} * \cdots * \pi L_{1k},$$

$$\pi L_2 \cong \pi L_{21} * \cdots * \pi L_{2\ell}$$

となる．$E(L_{ij})$は既約でありかつ$\partial E(L_{ij})$はトーラスからなることより，πL_{ij}は非自明な自由積に分解しない（[1, 定理7.1]参照）．したがってKuroshの部分群定理（[7, 定理2.3.14]参照）より，$k = \ell$となり（splittingの順序を取り直した後で）$\pi L_{1i} \cong \pi L_{2i}$が成立する．したがって$E(L_{1i})$と$E(L_{2i})$はホモトピー同値になるので，定理2より

$$\|L_{1i}\|_0 = \|E(L_{1i})\|_0 = \|E(L_{2i})\|_0 = \|L_{2i}\|_0$$

となる．したがって定理1(i)より

$$\|L_1\|_0 = \|L_{11}\|_0 + \cdots + \|L_{1k}\|_0$$
$$= \|L_{21}\|_0 + \cdots + \|L_{2l}\|_0$$
$$= \|L_2\|_0 .$$

これで定理3の証明が完成した. □

LをS^3のリンクとする. E(L)がグラフ多様体のとき, Lをグラフリンクという.

系. (i) LをS^3のリンクとするとき, $\|L\|_0=0$ であるための必要十分条件はLがグラフリンクになることである.

(ii) 2つのリンクL_1, L_2が$\pi L_1 \cong \pi L_2$を満たすとする. このときL_1がグラフリンクであればL_2もグラフリンクになる.

証明は[4, 系1]および定理3より明らか.

参考文献

[1] J. Hempel, 3-manifolds, Ann. of Math. Studies No. 86, Princeton Univ. Press. 1976.

[2] W. Jaco and P. Shalen, A new decomposition theorem for irreducible sufficiently-large 3-manifolds,

Proc. Symp. in Pure Math. 32 (1978), 71–84.

[3] K. Johanson, Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries, Lecture Notes in Math. 761, Springer-Verlag 1979.

[4] T. Soma, The Gromov invariant of links, Invent. Math. (to appear).

[5] W. Thurston, Hyperbolic structures on 3-manifolds (preprint).

[6] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. 87 (1968), 56–88.

[7] H. Zieschang, E. Vogt and H. Coldewey, Surfaces and planar discontinuous groups, Lecture Notes in Math. 835, Springer-Verlag 1980.