数理解析研究所講究録
第 442 巻 1981 年 74-79

Pretzel Link $\mathcal{L}(2p_1,\cdots,2p_\mu)$ の genus について

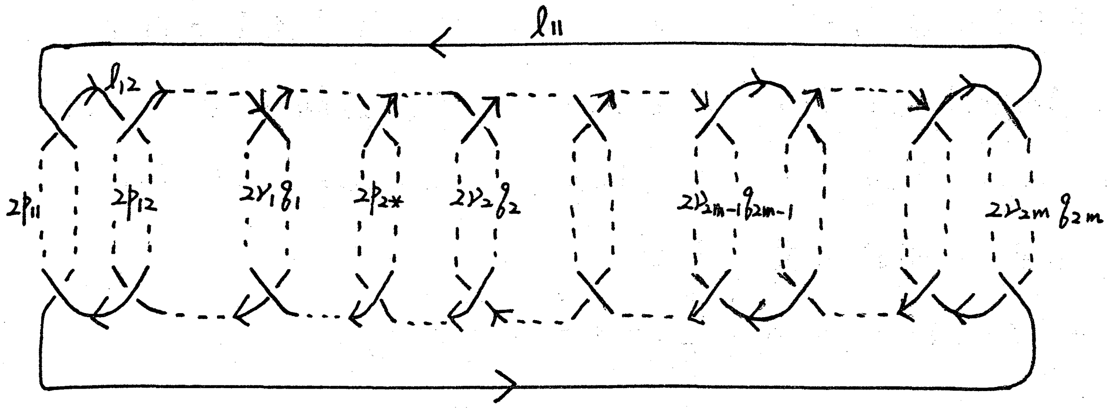
山口女子大　　中川　洋子

ここで考える pretzel link $\mathcal{L}(2p_1,\cdots,2p_\mu)$ は、$\mu\geq 3$ かつ $p_i\neq 0$ $(i=1,\cdots,\mu)$ とする．これらの pretzel link の genus について考えてみたい。

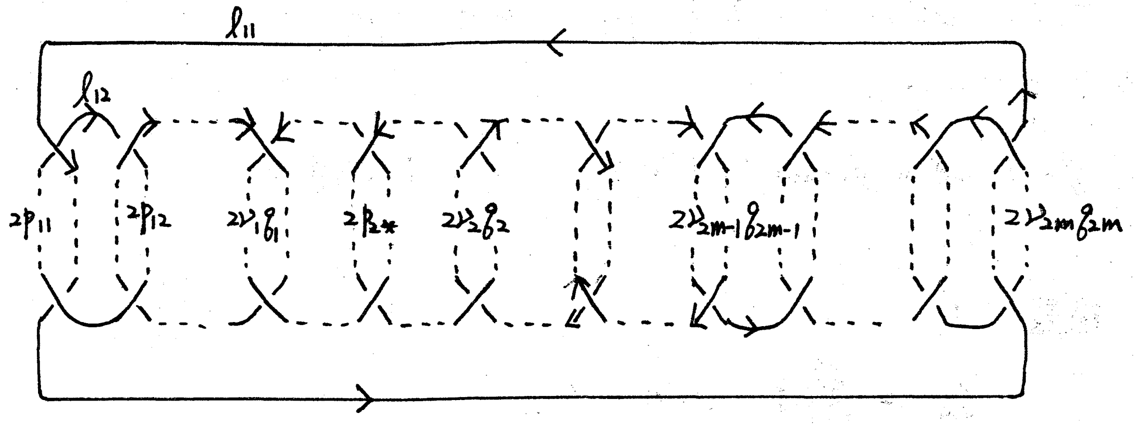
$\mathcal{L}_0(2p_1,\cdots,2p_\mu)=l_1\cup\cdots\cup l_\mu$ は、genus 0 の surface を張るように各 component に、orientation が与えられているとする。この $\mathcal{L}_0$ と underlying set は同じだが、各 component の orientation は異なる pretzel link を

$$\mathcal{L}(2p_1,\cdots,2p_\mu)=\varepsilon_1 l_1\cup\cdots\cup\varepsilon_\mu l_\mu\quad(\varepsilon_i=\pm 1)$$

と表わすことにする。一般に、$\mathcal{L}$ が $\mathcal{L}_0$ に equivalent でなければ、$\varepsilon_1=1$，$\varepsilon_\mu=-1$ と仮定することが出来る。以後、図にあるような形で pretzel link $\mathcal{L}$ を考えることにする。



$$\mathcal{L}_0(2p_{11},\cdots,2\nu_1 q_1,2p_{21},\quad\cdots\quad,2\nu_{2m}q_{2m})$$
$$=l_{11}\cup\cdots\cup l_{1n_1}\cup l_{1n_1+1}\cup l_{21}\cup\cdots\quad\cup l_{2m,n_{2m}+1}$$



$$\mathcal{L}(2p_{11},\cdots,2p_{1n_1},2\nu_1 q_1,2p_{21},\cdots,2\nu_2 q_2,\cdots,2p_{2m,n_{2m}},2\nu_{2m}q_{2m})$$
$$=(l_{11}\cup l_{12}\cup\cdots\cup l_{1n_1}\cup l_{1n_1+1})\cup(-1)(l_{21}\cup\cdots\cup l_{2n_2+1})$$
$$\cup(l_{31}\cup\cdots\quad\cup l_{3n_3+1})\cup(-1)(l_{41}\cup\cdots\cup l_{4n_4+1})$$
$$\vdots$$
$$\cup(l_{2m-1,1}\cup\cdots\quad\cup l_{2m-1,n_{2m-1}+1})\cup(-1)(l_{2m,1}\cup\cdots\cup l_{2m,n_{2m}+1})$$

$$\left(\begin{array}{l} n_1+n_2+\cdots+n_{2m}+2m=\mu \\ \nu_i=\pm 1,\ q_i>0 \\ \qquad i=1,2,\cdots,2m \end{array}\right)$$

[1] または [3] に示されている方法をまねて、$\mathcal{L}$ に Seifert surface S を張る。この surface S の cell-decomposition を考えて、それぞれ 0-cell, 1-cell, 2-cell の個数を数えると、

$$\#(0\text{-cell}) = 4\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{n_i}|p_{ij}| + 4\sum_{i=1}^{2m} g_i ,$$

$$\#(1\text{-cell}) = 6\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{n_i}|p_{ij}| + 6\sum_{i=1}^{2m} g_i ,$$

$$\#(2\text{-cell}) = 2\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{n_i}|p_{ij}| + 4m - \mu ,$$

となっている。

g_S を S の genus とすると、次のことが解る。

補題 1.

$$g_S = \sum_{i=1}^{2m} g_i - 2m + 1 .$$

証明　オイラーの標数を考えれば明らかである。

[2] で、pretzel link $\mathcal{L}$ の Alexander polynomial が求まるので、これを用いて $\Delta(t, \cdots, t)$ の degree d を求める。この degree d と link の genus g に関して、次の事が知られている。

補題 2 ([4])

$$2g + \mu - 2 \geq d \ .$$

一般に、$g_s \geq g$ であるから、

$$g_s \geq g \geq \frac{d-(\mu-2)}{2}$$

より、$d = 2\sum_{i=1}^{2m} g_i - 4m + \mu$ がえれば、$\mathcal{L}$ の genus は Seifert surface の genus g_s であることが解る。ただし、これには条件が必要で、次のことが解る。

補題 3.

i) ある j ($j=1, \cdots, 2m$) に対し、$\nu_{2j-1} \cdot \nu_{2j} = 1$ であれば、$d = 2\sum_{i=1}^{2m} g_i - 4m + \mu$ である。

また ii) 全ての j ($j=1, \cdots, 2m$) に対し、$\nu_{2j-1} \cdot \nu_{2j} = -1$ であるとき、$\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{p_{ij}} \neq 0$ ならば、

$$d = 2\sum_{i=1}^{2m} g_i - 4m + \mu - 2 \quad \text{である。}$$

以上より、次がえる。

定理 以下の条件をみたせば、$\mathcal{L}$ の genus は Seifert surface の genus に等しい。

i) $\nu_{2j-1} \cdot \nu_{2j} = 1$ となる j ($j=1, \cdots, 2m$) が

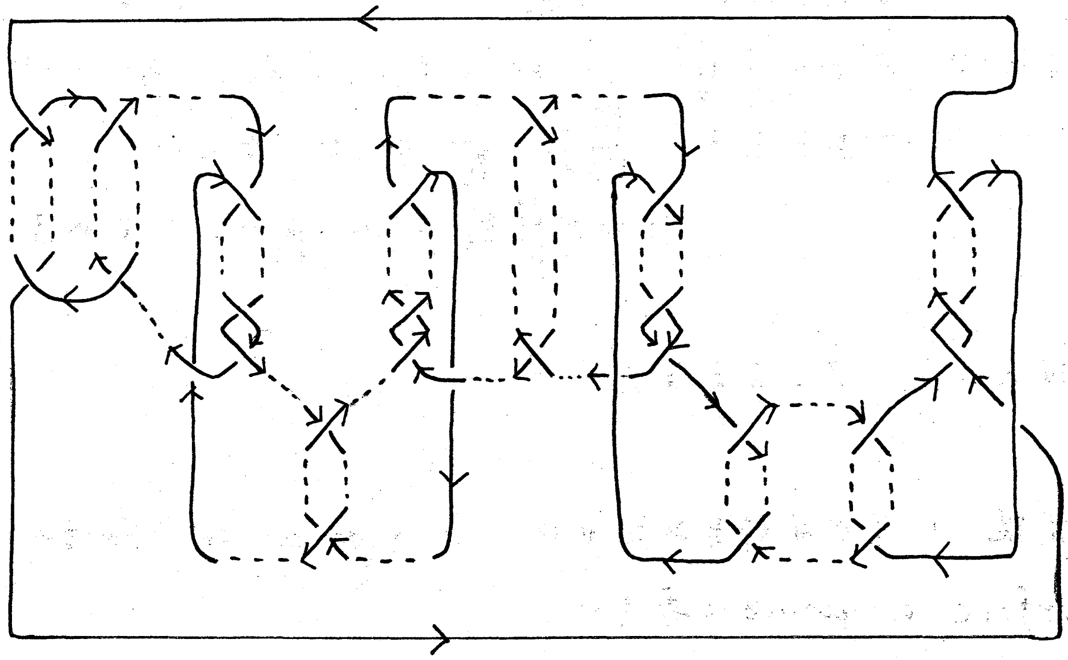
存在する.

または、ii) 全ての j ($j=1, \cdots, 2m$) に対し、$\nu_{2j-1}\cdot\nu_{2j}=-1$

であって、$\displaystyle\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{p_{ij}} \neq 0$ である。

証明　i)の場合は、補題1と3より明らか.

ii)の場合は、$\mathcal{L}$ の projection を次の図のように変形して、surface を張り直す。この新しい surface は、genus が1つ少なくなっている。また $\Delta(t, \cdots, t)$ の degree は2つ少ないので、この場合もまた、$g_s = g$ となっている.



参考文献

[1] R. H. Crowell: *Genus of Alternating Link Types.* Ann. of Math., vol 69 (1959), 258 - 275.

[2] Y. Nakagawa: *On the Alexander Polynomials of Pretzel Links* $L(2p_1, \cdots, 2p_n)$ (to appear).

[3] H. Seifert: *Über das Geschlecht von Knoten.* Math. Ann. vol. 110 (1934), 571 - 592.

[4] G. Torres: *On the Alexander Polynomials.* Ann. of Math. 57 (1953), 57 - 89.