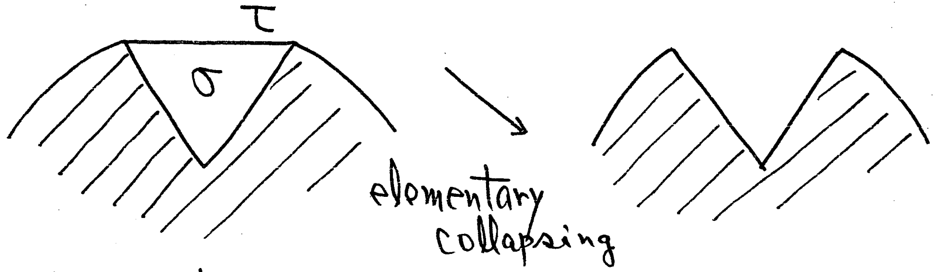
数理解析研究所講究録
第 442 巻 1981 年 128-135

3次元多様体上のcollapsing map

神戸大 教養　池田 裕司
東洋大 工　山下 正勝

3次元組合せ多様体Kについて考える. 境界$\dot{K}$はKでfullであるとする. $c: K \searrow L$をsimplicial collapsing, Fをcのcollapsing field, 即ちcから定まるrooms (σ, τ)の全体$\{(\sigma, \tau)\}$とする.

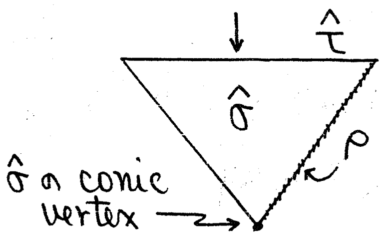


cから自然にinduceされるPL map $f_c: |K| \to |L|$をcollapsing mapと呼ぶ. spine Lのsimplex αに対して、αのinterior $\mathring{\alpha}$のf_cによる逆像のclosureをαの(cによる) inverseといい, $c^{-1}(\alpha)$とあらわす. 即ち

$$c^{-1}(\alpha) \equiv \overline{f_c^{-1}(\mathring{\alpha})}$$

である.

$\rho\in K$ が F の room $\hat\sigma$ $(=(\hat\sigma,\hat\tau))$ の proper face であり、ρ が $\hat\sigma$ の conic vertex を含むとき、$\hat\sigma$ は



ρ に対して vertical である、ということにする。

我々の目標は $\vec{C}(\alpha)$ の様子を調べることであるが、それには先ず α の各 vertical room $\hat\sigma_\lambda$ ごとに $\vec{C}_{\hat\sigma_\lambda}(\alpha)$ を調べて、その後でそれらを集めてやればよい。即ち、

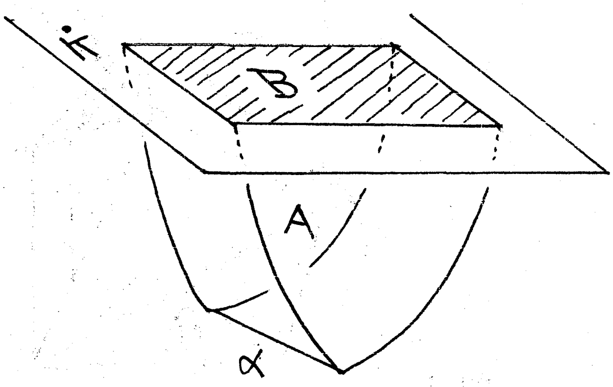
$$\vec{C}(\alpha)=\bigcup_{\lambda}\vec{C}_{\hat\sigma_\lambda}(\alpha).$$

こゝでは α が 1-simplex の場合に限定して、実際に $\vec{C}_{\hat\sigma}(\alpha)$ としてどのような集め方をしてやればよいかの説明もしてみたい。即ち、

<u>状況</u> ・$\alpha\in L$ は 1-simplex で、$\alpha\cap|\dot K|=\emptyset$ とする。
・α は vertical 2-room $\hat\sigma$ を持つ、とする。

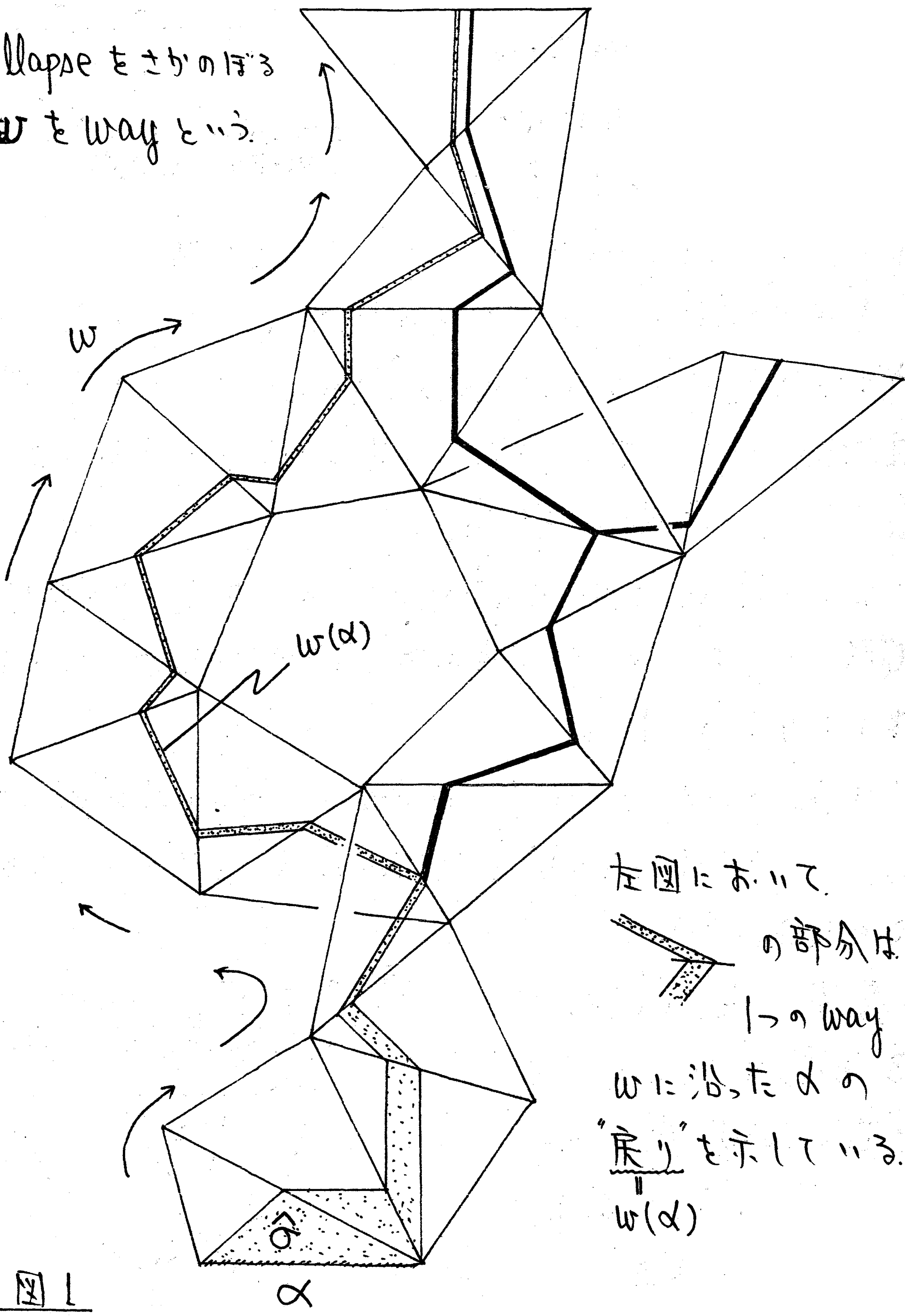
この状況のもとで、

<u>定理</u> ・$A\equiv\vec{C}_{\hat\sigma}(\alpha)$ は 3-ball である、
・$B\equiv\vec{C}_{\hat\sigma}(\alpha)\cap|\dot K|$ は 2-ball in $\dot A$ である、
・$\alpha\in\dot A$ である。



ことを示す。

※ collapse をさかのぼる
流れ $\mathfrak{w}$ を way という

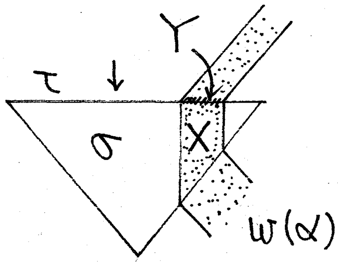


左図において
の部分は
1つの way
w に沿った α の
"戻り" を示している.
w(α)

図1

αの逆像は先ず$\hat{\sigma}$から順次2-roomsをさかのぼってゆく。αを河口として、1つ1つ支流を選択して源流へたどりつく径路を2-wayという。全体としてそれらはTreeの構造をもつ（図1参照）。この逆像を$w(\alpha)$とあらわす。但しwは1つの2-wayである。

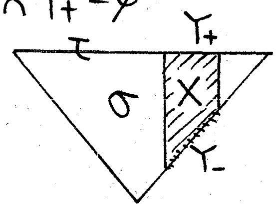
(σ,τ)をw上の2-roomとするとき



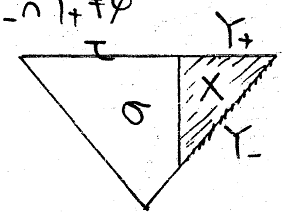
$$X \equiv w(\alpha) \cap \sigma$$
$$Y \equiv w(\alpha) \cap \tau$$

とおくと、下図のような2つの場合が考えられる。

(イ) $Y_- \cap Y_+ = \emptyset$



(ロ) $Y_- \cap Y_+ \neq \emptyset$



※ この場合は必然的に$\sigma \cap \alpha \neq \emptyset$

さて2-way上の2-room$\hat{\sigma}$に対してこのσ上の（maximalな）3-wayが存在する。そしてそれらは

$$\sigma \notin \dot{K} \Rightarrow \text{丁度}2\text{つ}$$
$$\sigma \in \dot{K} \Rightarrow \text{丁度}1\text{つ}$$

である。いまZをσ上の1つの（maximalな）3-wayとする。この3-way Zに従ってさかのぼったXの逆像を$Z(X)$とあらわすことにすると、次のように

なっている：

⊘ $z(X) = 3$-ball.

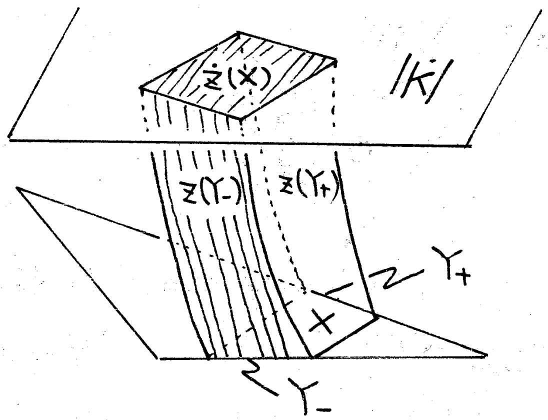
⊘ $z(X) \cap |\dot{K}| = \partial(z(X)) \cap |\dot{K}| = 2$-ball.

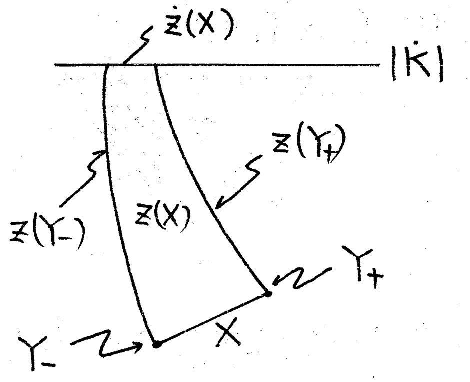
※ この 2-ball を $\dot{z}(X)$ と書くことにする.

⊘ $z(Y_*) = \begin{cases} 2\text{-ball, 又は} \\ Y_* \end{cases}$, 但し Y_* は Y_+ 又は Y_-.

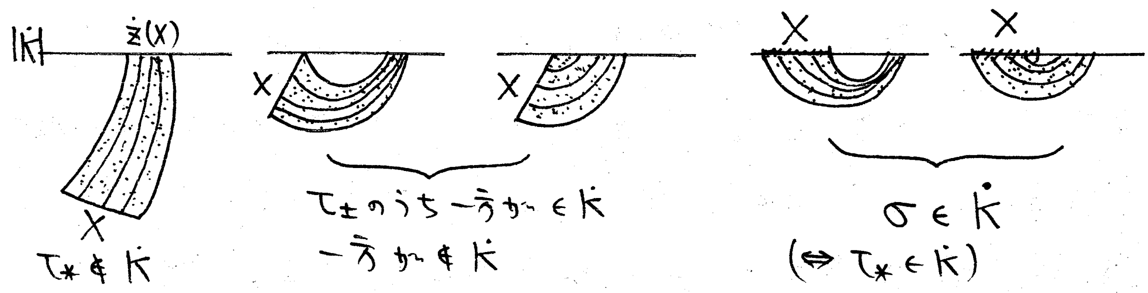
⊘ $X \cup \dot{z}(X) \cup \{z(Y_+) \cup z(Y_-)\}$ は $\partial(z(X))\ (= S^2)$ 上の $S^1 \times I$.

この様子を示したものが下の左図であり、Xの幅を無視して、2次元モデルであらわしたものが下の右図である.





z(X)の様子はσの位置によって見かけ上次の5種がある.



いま σ を 2-way 上の 2-room とし、τ_-, τ_+ をそれぞれ σ の face 上にある entrance とする．とくに τ_+ の方を σ の entrance とする．代表して τ_* とあらわすことにする．κ を τ_* の1つの vertical 3-room とする．σ の vertical 3-room ρ からスタートして $st(\tau_*, \kappa)$ の中の 3-rooms だけを伝うような κ までの 3-way が存在するとき、κ は σ に compatible である、ということにしよう．

τ_* の vertical 3-rooms のうち、σ に compatible なものの数を $v(\sigma, \tau_*)$ と書き、pair $(v(\sigma,\tau_-), v(\sigma,\tau_+))$ を $d(\sigma)$ とあらわす．(正確には $d(w,\sigma)$ と書くべきであろう) $\tau_* \in \dot{\kappa}$ のとき上に dot をつけ、そうでないとき無印とする．たとえば $d(\sigma) = (2, \dot{1})$ ならば $\tau_- \notin \dot{\kappa}$, $\tau_+ \in \dot{\kappa}$ ということである．

<u>Lemma</u> w を maximal な 2-way とし、σ を w 上の 2-room とするとき、$d(\sigma)$ は次の各場合しかない：

(イ) σ が w の最後の 2-room であるとき．

$(\dot{1},\dot{0}),\ (\dot{1},1),\ (2,\dot{0}),\ (\dot{2},1),\ (2,1)$

(ロ) σ が w の途中の 2-room であるとき．

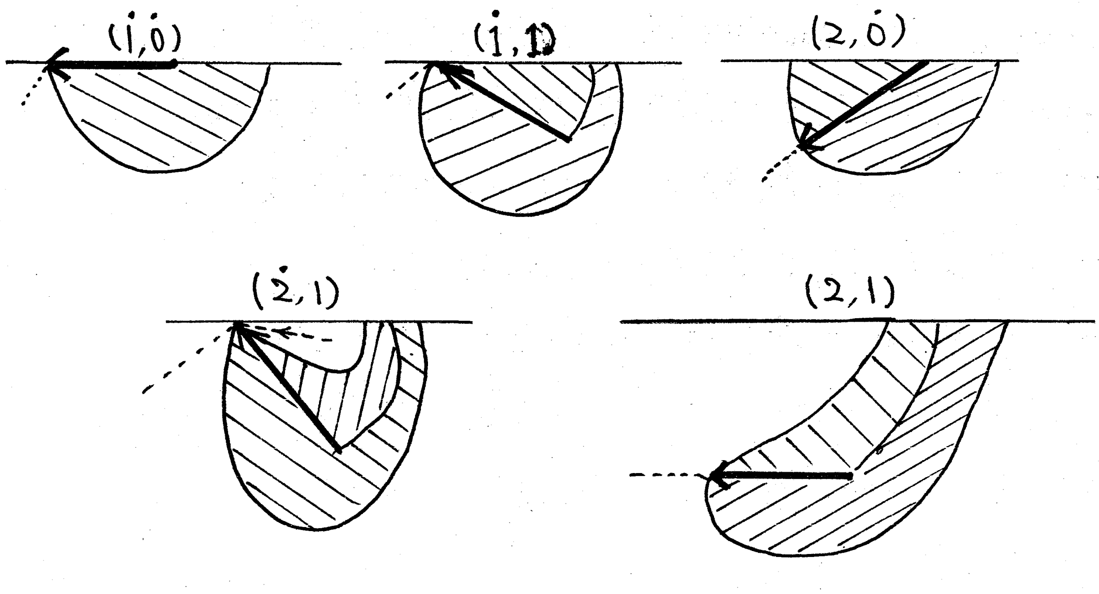
$(\dot{1},\dot{1}),\ (\dot{1},2),\ (2,\dot{1}),\ (2,2),\ (2,\dot{2}),\ (\dot{2},2)$

(ハ) σ が w の最初の 2-room であるとき．

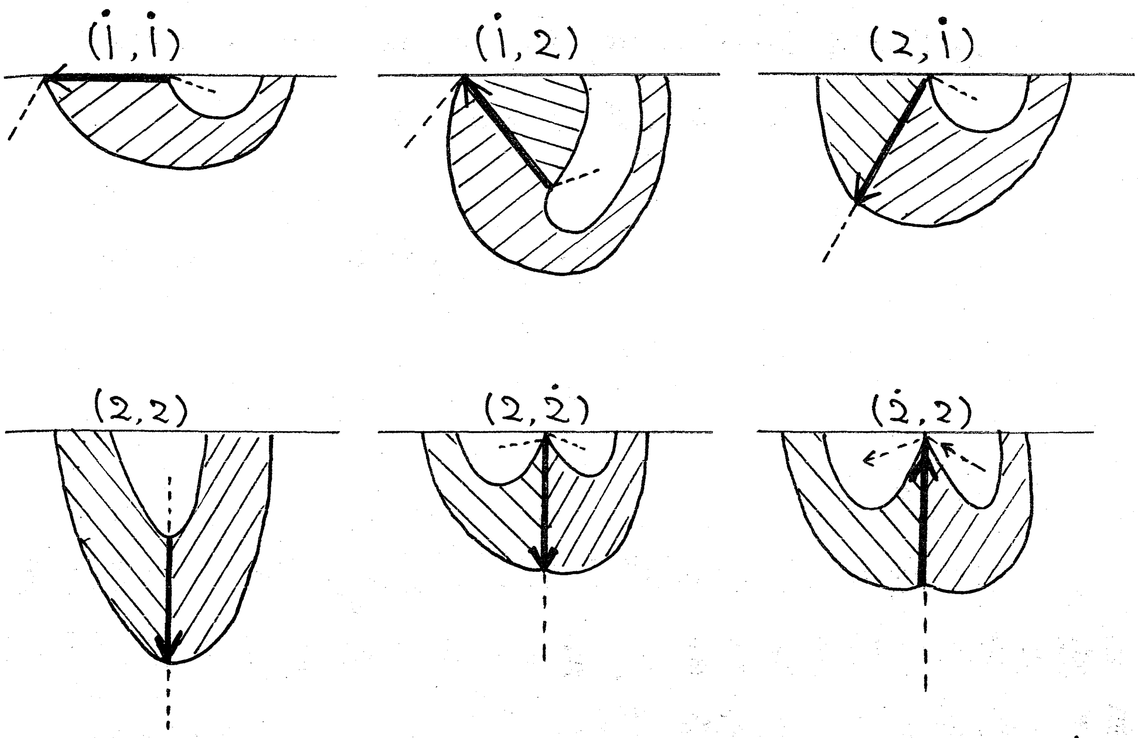
$(2,\dot{1}),\ (2,2)$

σは1つ又は2つの vertical 3-room を持ち、X をこの各 vertical 3-room の方向に戻してやると 3-ball になるが、それらを併せたものもまた 3-ball になる. このようにして得られる 3-ball と |K| との関係などは Lemma の d(σ) の各場合に応じて次の図のようになっている.
図で ……←——…… は、矢印の方向が collapse の方向，矢印の全体が X，矢印の始点が Y_+，終点が Y_- をあらわす. 点線は、その前(又は後)に 2-way が続く様子を暗示したものである. 斜線部分が X の戻り即ち 3-ball である. (図は X 及び Y_* の厚みを無視したもので、1次元低いモデルであらわしてある).

(1) の場合



(ロ) の場合



※ (ハ) の 2ケース は 何れも(ロ)の場合に帰着される

これらの各3-ballを 2-wayの終わりから始まりへさかのぼって集めてやれば、定理の結果を得る

(以上)