

## Duffing 方程式の数値解と 1 つの予想

名古屋大学 教養部 白岩 謙一

### §0 はじめに

Duffing 方程式の数値的研究は、林千博氏及びその門下の上田暁亮氏（京大・工）及び川上博氏（徳島大・工）を中心として精力的に行われ、現在日本で最も研究が進んでいる分野の一つである。筆者は最近名古屋大学大型計算機センターを利用して、常微分方程式の数値的研究を開始した。これは上田・川上両氏の研究や最近計算機を使って仕事をしている宇敷重広氏に教唆され、さらに、1981年1月初めに京都で行われた Symposium での Ja. Gr. Sinai 氏の講演にも触発されたものである。なお、名古屋大学大型計算機センター利用に因りて種々御教示頂いた、二宮市三氏、秦野常世氏及びセンターの相談員の方々に謝意を表す。

### §1 単純不動点と Newton 法

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を  $C^2$  級の写像とし、 $p_0 \in \mathbb{R}^n$  を  $T$  の不動点、

すなわち, 次の(1)を満たす点とする.

$$(1) \quad T(p_0) = p_0$$

いま,  $p_0$  における  $T$  の微分 (または Jacobi 行列)  $DT(p_0)$  が 1 を固有値に持たないとき,  $p_0$  を  $T$  の 単純不動点 (simple fixed point) とする.

いま,  $p_0$  を  $T$  の単純不動点とする.  $T$  は  $C^2$  級だから  $DT$  は連続である. ゆえに,  $p_0$  の適当な近傍  $U$  をとると, 次の(2)が成立する.

$$(2) \quad x \in U \implies DT(x) \text{ は } 1 \text{ を固有値に持たない.}$$

そこで, 写像  $G: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  を次の

$$(3) \quad G(x) = (I - DT(x))^{-1} (T(x) - x)$$

で定義すると, これは(2)からうまく定義できて, (1)から次の

$$(4) \quad G(p_0) = p_0, \quad DG(p_0) = 0$$

が成立することがわかる.  $T$  は  $C^2$  級だから,  $G$  は  $C^1$  級である. ゆえに  $DG$  は連続で, 上の(4)から,  $p_0$  の適当な近傍  $V$  をとると, 次の(5)が成立する.

$$(5) \quad p_0 \in V \subset U \text{ で, } x \in V \implies |DG(x)| \leq \frac{1}{2}$$

(ここで  $|DG(x)|$  は線形写像  $DG(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  のノルムとする.) すると, (4), (5)から, 適当な  $V$  (例えば  $p_0$  を中心とする開球) に対して, 次の(6)が成立する.

$$(6) \quad G(V) \subset V \text{ で, } G: V \rightarrow V \text{ は縮小写像.}$$

ゆえに,  $G$  は  $V$  で  $T$  の不動点をえらう. そして (4) から,  
これは  $p_0$  と一致する. ゆえに, 縮小写像の原理から,  $V$  の任意の点  $x_0$  に対して

$$(7) \quad x_{n+1} = G(x_n) \quad (n \geq 0)$$

とみると,  $x_n \rightarrow p_0$  が成立する. (7) を (3) を使って書き直すと,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - DT(x_n))^{-1} (T(x_n) - DT(x_n)x_n) \\ &= (1 - DT(x_n))^{-1} \{ (1 - DT(x_n))x_n - (x_n - T(x_n)) \} \\ &= x_n - (1 - DT(x_n))^{-1} (x_n - T(x_n)) \end{aligned}$$

となり, 次の (8) が成立する.

$$(8) \quad x_0 \in V, \quad x_{n+1} = x_n - (1 - DT(x_n))^{-1} (x_n - T(x_n))$$

とみると,  $x_n \rightarrow p_0$ .

いま,  $H(x) = x - T(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  とみると,  $T(x)$  の不動点は,  $H$  の零点, すなわち,  $H(x) = 0$  となる点  $x$  と一致する. この  $H$  の零点を Newton 法で求めるとき, これは (8) 式である. 以上をまとめると次のようになる.

定理 1  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を  $C^1$  級とし,  $p_0 \in \mathbb{R}^n$  を  $T$  の単純不動点とすると,  $p_0$  の適当な近傍  $V$  があって,  $V$  の任意の点  $x_0$  に対して  $x_{n+1} = x_n - (1 - DT(x_n))^{-1} (x_n - T(x_n))$  ( $n \geq 0$ )

とみると,  $n \rightarrow \infty$  のとき,  $x_n \rightarrow p_0$  である.

この定理を用いて,  $T$  の単純不動点を数値計算によって求め

めることとなる。

## §2 Poincaré 写像

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  を  $C^2$  級写像とし, 適当な正数  $\omega$  に対して

$$(9) \quad f(x, t + \omega) = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

が成立するものとする。すなわち,  $f$  は  $t$  に関して周期  $\omega$  の周期写像である。いま, 次の形の微分方程式

$$(10) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

を考へる。そして, 任意の初期条件に対して, 解の最大存在区間は  $\mathbb{R}$  であるものとし, 各  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して, 初期条件を  $(x, 0)$  とする延長不可能な解を  $\phi(x, t)$  とする。すなわち,  $\phi(x, t) \in \mathbb{R}^n$  は  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  の  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  に対して定義され, 次の (11) を満たす。

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\phi(x, t)) = f(\phi(x, t), t), \quad \phi(x, 0) = x$$

$f$  は  $C^2$  級だから, このような  $\phi$  は一意的で,  $C^2$  級である。

いま, 方程式 (10) に対して, その Poincaré 写像  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を次の (12) 式によって定義する。

$$(12) \quad T(x) = \phi(x, \omega), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

すると  $T$  は  $C^2$  級の微分同相写像である。そして, 任意の正整数  $n$  に対して,  $T$  の周期  $n$  の周期点 ( $T^n$  の不動点) と方程式 (10) の周期  $n\omega$  の周期解が 1対1 に対応する。

そこで §1 の方法で  $T$  の単純不動点を求めるには,  $DT(x)$

$= D_x \varphi(x, \omega)$  を求める必要がある。そこで、 $D_x \varphi(x, \omega)$  は  $\varphi$  の  $x$  に関する偏微分 (Jacobi 行列) である。(11) 式を用いると、次の等式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (D_x \varphi(x, t)) &= D_x \left( \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) \right) = D_x (f(\varphi(x, t), t)) \\ &= D_x f(\varphi(x, t), t) D_x \varphi(x, t) \end{aligned}$$

$$D_x \varphi(x, 0) = 1 \quad (\text{単位行列})$$

すなわち、 $D_x \varphi(x, t)$  は次の変分方程式と初期条件を満たす。

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} A(x, t) = D_x f(\varphi(x, t), t) A(x, t) \\ A(x, 0) = 1 \quad (\text{初期条件}) \end{cases}$$

(12) が  $t = \omega$  であるとき、この方程式を解き、 $t = \omega$  と置けば、それが  $DT(x)$  と一致する。

以上を数値計算でプログラム化すれば、 $T$  の単純な不動点、すなわち、(10) の周期  $\omega$  の周期解 (単純なその) を求めることができる。周期  $n\omega$  の周期解 (単純なその) についても同様である。

Sinai は誤差の評価を行うことにより、Lorenz 方程式の周期解の存在を数学的に厳密に証明することに成功したというが、Duffing 方程式の場合にも、以上のような計算法の誤差の評価が可能であれば、周期解の存在を数学的に証明することができるものと考えられる。

### §3 計算例

次の形の Duffing 方程式を考へる。

$$(14) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} + x^3 = B \cos t$$

この方程式は、次のような方程式と同値である。

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -Ay - x^3 + B \cos t \end{cases}$$

この方程式の Poincaré 写像を  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  とし、上掲の考察した例の 1 つである。

$$(16) \quad A = 0.25, \quad B = 8.5$$

の場合について計算した。計算法は 4 次の Runge-Kutta 法とし、ステップ幅は  $2\pi/300$  で、単精度及び倍精度の両方を用いた。

初期値を  $x_0 = (3.0, 0.0)$  とし、Poincaré 写像  $T$  による軌道の一部  $\{T^n(x_0) \mid 0 \leq n \leq 1000\}$  をグラフで表示したものが図 1 (単精度) 及び図 2 (倍精度) である。これらの図からわかることは、この運動は非同期的で不規則であり、単精度でも倍精度でも似たような図形を画くことである。

一方、この軌道を  $1 \leq n \leq 24$  の範囲で数値的に表示したものが表 1 (上が単精度、下が倍精度) である。この表からわかることは、 $n$  が小さいときは単精度による数値と倍精度による数値は大體一致するが、 $n=10$  位になると、これらの数値の間に大幅に差が出て来る。そして、 $n=22$  とすれば

图 1

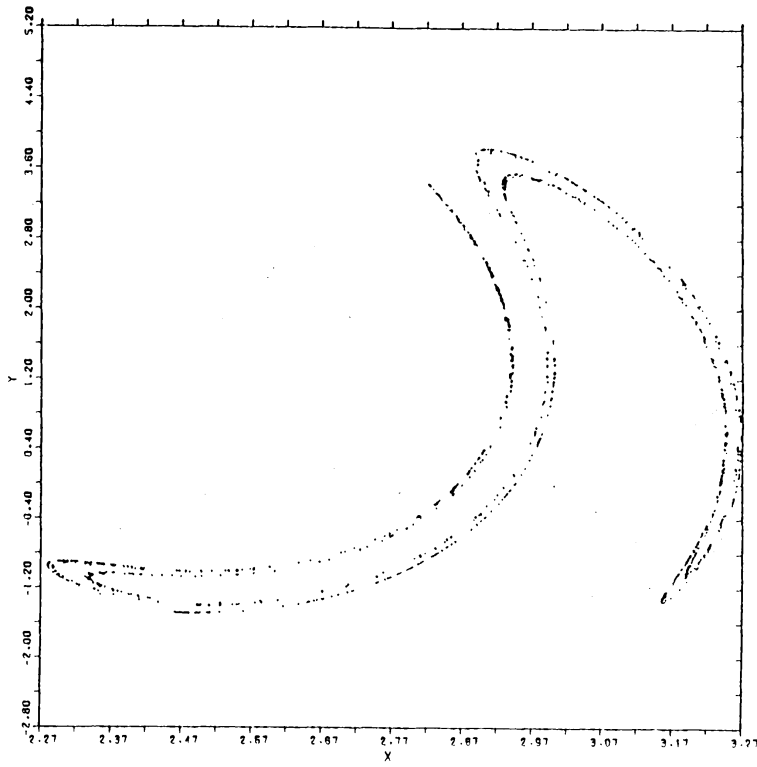
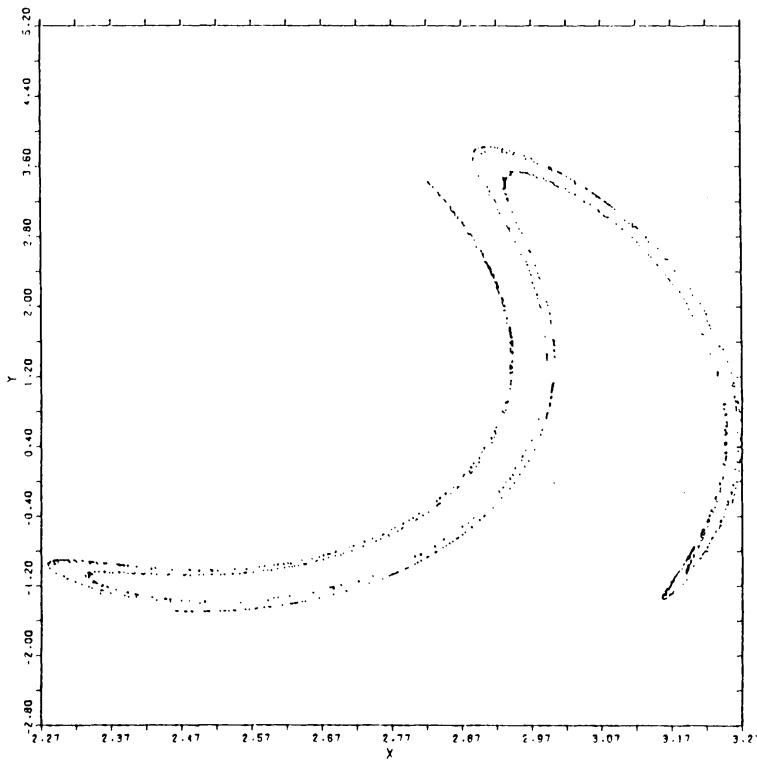


图 2



A = 0.25000 B = 8.50000  
 X(0) = 3.00000 Y(0) = 0.0  
 KIZAMI = FIZ/ 300 KAISU = 24

K	X	Y	K	X	Y	K	X	Y
1	2.35397	-1.27041	2	2.91767	2.23933	3	2.93743	3.80120
4	3.15536	-1.29566	5	2.47050	-1.47457	6	2.88827	0.25805
7	2.37051	-1.21229	8	2.93052	1.92863	9	2.88890	3.59544
10	3.20923	-0.95415	11	2.90309	-0.36089	12	2.27899	-0.95067
13	2.82135	3.43549	14	3.25556	-0.22001	15	2.93082	3.39548
16	3.22528	-0.65776	17	3.00083	1.38844	18	2.97716	2.16262
19	3.00228	3.56218	20	3.17321	-1.09194	21	2.63622	-1.37063
22	2.59545	-0.94949	23	2.68010	-0.86100	24	2.52533	-1.04866

A = 0.25000 B = 8.50000  
 X(0) = 3.0000000000 Y(0) = 0.0  
 KIZAMI = FIZ/ 300 KAISU = 24

K	X	Y	K	X	Y	K	X	Y
1	2.3532821	-1.2716125	2	2.9179834	2.2348605	3	2.9394973	3.7935745
4	3.1557768	-1.2941047	5	2.4726162	-1.4771772	6	2.8851913	0.2200851
7	2.3626278	-1.1949924	8	2.9265221	2.0598367	9	2.8908268	3.8088905
10	3.1649525	-1.3007174	11	2.9309487	-1.4743069	12	2.7930596	-0.4264934
13	2.8706052	-1.0321104	14	2.9341176	1.8904407	15	2.8947760	3.5068119
16	3.2194898	-0.7831661	17	2.9891288	0.7295050	18	2.6851340	-1.2183415
19	2.5104969	-1.0091548	20	2.8556318	-0.2468785	21	2.3364242	-1.0310546
22	2.9050876	2.5116933	23	3.0804507	3.1868615	24	3.1968264	-0.7849513

表 1



全く似てお似つかぬ値となる。しかし、図1, 2から、その軌道は殆んど同じような図形を示すことがわかってゐる。

この事実については、§4で1つの予想を述べよとせよ。

次に§1, §2で述べた方法で、この例に於いての単純不動点を探すと、次の3個が見つかった。計算は倍精度である。そして、DTの固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ と合わせて表示すると、次の表2となる。




$$P_1 = (2.99165\dots, 1.29820\dots), \quad \lambda_1 = 6.98105\dots, \quad \lambda_2 = 0.02977\dots$$

$$P_2 = (3.22359\dots, 1.54147\dots), \quad \lambda_1 = -0.11093\dots, \quad \lambda_2 = -1.87380\dots$$

$$P_3 = (2.62427\dots, -0.96249\dots), \quad \lambda_1 = -0.11093\dots, \quad \lambda_2 = -1.87380\dots$$

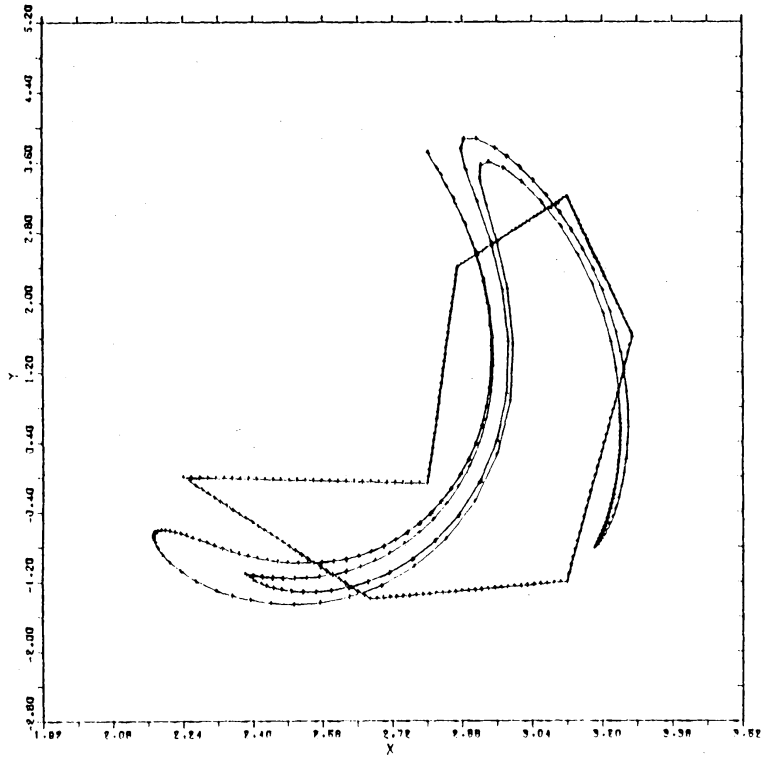
表 2

したがって、これらはすべて鞍点である。

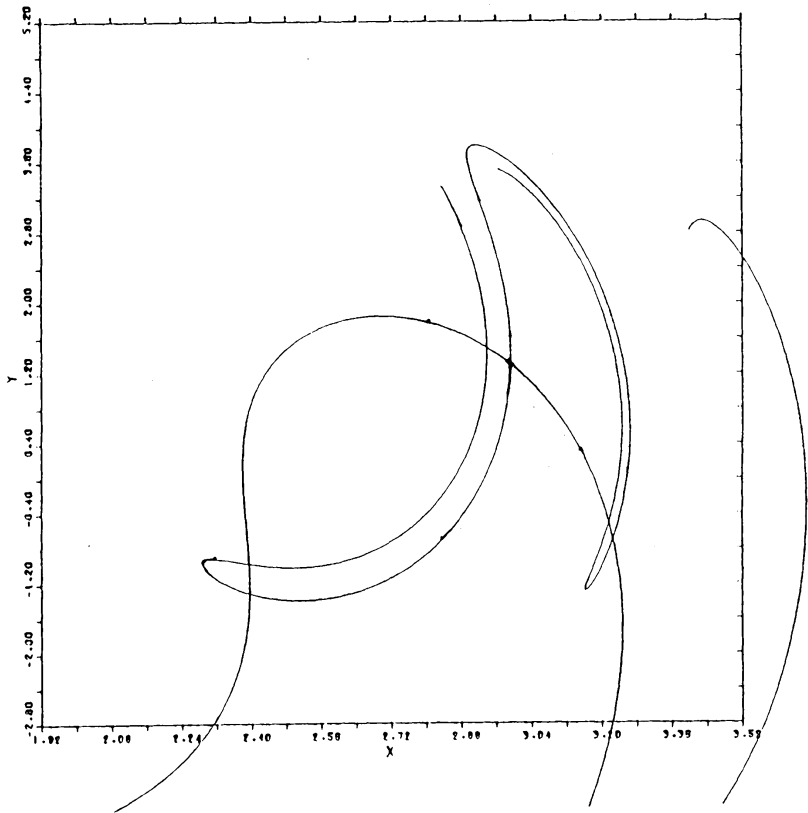
次に図3の7角形  を  $T$  で写像した像は同じ図3の  の形の図形になることがわかる。この像は図1, 図2の図形と似てゐるが、位相的に考へると Smale の馬蹄形微分同相写像 (horseshoe diffeomorphism) の変形 (または一般化) である  と一致する。

次に点  $P_1$  における安定多様体及び不安定多様体を求めると図4のようになる。安定多様体及び不安定多様体を数値的に求める方法については、川上什一「御示唆を頂いたが、例之ば Hartman: Ordinary Differential Equations, Wiley の

3



4



Chapter IX, Lemma 5.1, pp. 234 - 238 にあるような逐次近似法によつて局所的な安定多様体を求め、これを Poincaré 写像を用いて全体に拡大するという方法をとることとした。この図4で図1及び図2の図形と似た形の曲線が  $P_1$  の不安定多様体で、もう一方の簡単な形の曲線とその断片が、 $P_1$  の安定多様体である。図4には homoclinic points が表れていることに注意されたい。

よつて図1, 図2, 図3, 図4から判断すると,  $A=0.25$ ,  $B=8.5$  の場合 (15) 式の Duffing 方程式に表れる strange attractor は Smale の写縮形微分同相写像 (の一般化) の非遊走集合であるように考えられる。

#### §4 1. の予想

一般に strange attractor が観察される場合には、1. の予想を提出したい。その準備として、C.C. Conley の定義した鎖回歸集合 (chain recurrent set) 及び R. Bowen の定義した擬軌道追跡条件 (pseudo-orbit tracing property) の概念を述べる。

$X$  を距離空間,  $d$  をその距離とし,  $T: X \rightarrow X$  を同相写像とする。  $\alpha$  を正数とし,  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  を  $X$  の点列とするとき,  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  が 擬軌道 であるとは、次の条件

$$(17) \quad d(T(x_i), x_{i+1}) < \alpha, \quad i \in \mathbb{Z}$$

が成立するときをいう。また、 $\beta$  を正数とするとき、擬軌道  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  が点  $x \in X$  で  $\beta$  追跡 ( $\beta$ -trace,  $\beta$ -shadow) されるとは、次の条件

$$(18) \quad d(T^i(x), x_i) \leq \beta, \quad i \in \mathbb{Z}$$

が成立することである。

また、 $T$  が 擬軌道追跡条件 を満たすとは、任意の正数  $\beta$  に対し、適当な正数  $\alpha$  があって、任意の  $\alpha$  擬軌道は適当な  $X$  の点によって  $\beta$  追跡されることをいう。

計算機による数値計算で求められる軌道は実は適当な正数  $\alpha$  に対する  $\alpha$  擬軌道であって、この  $\alpha$  は単精度より倍精度のときの  $\alpha$  が小さいものと考えられる。

次に、点  $x \in X$  が 鎖回帰的 (chain recurrent) であるとは、任意の正数  $\alpha$  に対して、適当な  $\alpha$  擬軌道  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  で次の条件 (19) を満たすものが存在するときをいう。

(19) 適当な自然数  $N$  があって、 $x_{i+N} = x_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , かつ  $x_0 = x$  である。

鎖回帰的である点全体の集合  $R = R(T)$  を  $T$  の 鎖回帰集合 (chain recurrent set) といい、 $X = R$  となるとき、 $T$  は 鎖回帰的 (chain recurrent) であるという。Conley は次のことを証明した。  $R$  は非遊走集合  $\Omega$  を含む閉不変集合であって、 $X$  がコンパクトなとき、 $T|_R : R \rightarrow R$  は鎖回帰的

である。また, J. E. Franke - J. F. Selgrade (J. Diff. Eq. 26 (1977), 27-36) は,  $X$  がコンパクトな微分可能多様体で,  $T$  が微分同相写像のとき,

$$R \text{ が双曲型 (hyperbolic)} \iff \begin{cases} \text{no cycle 条件を満足する公理 A} \\ \text{微分同相写像} \end{cases}$$

が成立することを示し, このとき,  $\Omega = R$  であることを示した。

以上の概念と計算例等々を, コンピューターを用いて観測される (strange) attractor  $\Lambda$  は次の条件を満足する 不変集合 であると考えられる。

(a)  $\Lambda$  は attractor である。すなわち, 次の条件 (i), (ii) を満足するような  $\Lambda$  の適当な開近傍  $U$  が存在する。

(i)  $T^n(U) \subset U, n \geq 0$

(ii)  $\Lambda$  の任意の開近傍  $V$  に対し, 適当な自然数  $N$  があって,  $n \geq N \Rightarrow T^n(U) \subset V$

(b)  $\Lambda$  は鎖回帰的である。

(c)  $\Lambda$  は推移的 (transitive) である。すなわち, 適当な点  $x \in \Lambda$  があって, その軌道  $\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  は  $\Lambda$  で稠密である。

(d)  $T|_{\Lambda}$  は擬軌道追跡条件を満足する。