数理解析研究所講究録
第 443 巻 1981 年 208-222

3次元多様体上の non-singular Morse-Smale flow はいつ横断的葉層構造をもつか？

東大 理　矢野 公一

Tamura-Sato [9] は次の問題を提起した。

問　与えられた葉層構造に対して，これが横断的葉層構造をもつかどうか決定せよ。

3次元多様体の余次元1葉層構造に対する横断的余次元1葉層構造の存在に関しては，Tamura-Sato [9] 他，Nishimori [6], [7] 等の結果がある。一方，曲面上の S^1 bundle を1次元葉層構造と見たとき，これに横断的葉層構造が存在するか，即ち与えられた bundle が flat な接続をもつかどうかは bundle の Euler 類で完全に決定されることが知られている。(Milnor [4], Wood [11]) この結果は更に，Eisenbud-Hirsch-Neuman [2] によって Seifert fibring の場合に，また Sullivan, Smillie, Gromov 等によって高次元の場合に (Gromov [3]) それぞれ拡張されている。

本稿では，力学系的には最も簡明であると思われる non-singular Morse-Smale flow に対して，3次元の場合，それが横断的葉層構造をもつ為の条件を求める。手法は Asimov [1]，Morgan [5] による round handle decomposition 及び Novikov [8] による vanishing cycle の議論である。

§1. Non-singular Morse-Smale flow と round handle decomposition

以下，多様体はすべて3次元で向きづけ可能とする。

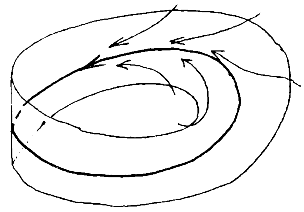
定義（詳しくは Asimov [1] 参照）　M を閉多様体，X を C^∞ vector field，$\varphi=\{\varphi_t\}$ を X が生成する flow とする。φ が non-singular Morse-Smale flow（以下 NMS と略）であるとは以下の条件が満たされるときをいう。

(i) $X(x)\neq 0$ for ${}^\forall x \in X$。

(ii) φ の non-wandering set は有限個の閉軌道の和であって，かつすべての閉軌道は双曲型。

(iii) 任意の閉軌道 γ, γ' に対して $W^s(\gamma) \pitchfork W^u(\gamma')$。但し，$W^s, W^u$ は各々，安定，不安定多様体。

注1）"ねじれ"をもつ双曲的閉軌道が存在し得るが，以下は簡単の為，これは考えないこととする。即ち，NMSとして各閉軌道の安定，不安定多様体が向きづけ可能のもののみを扱う。



注2）閉軌道 γ, γ' に対して $W^s(\gamma)\cap W^u(\gamma')\neq\phi$ のとき $\gamma\leqq\gamma'$ と定義すると，条件(ii),(iii)よりこれは partial ordering となる。以下の議論に於ては(iii)のかわりにこの条件（no cycle condition）で充分である。

NMSの存在問題に関連して Asimov [1] は round handle decomposition の概念を導入した。以下を <u>round handle</u> と呼ぶ。

$(S^1\times D^2, \phi)$ round 0-handle

$(S^1\times D^1\times D^1, S^1\times\partial D^1\times D^1)$ round 1-handle

$(S^1\times D^2, S^1\times\partial D^2)$ round 2-handle

MがNに round handle (R, R') を attach して得られる多様体であるとは，embedding $f: R'\to\partial N$ が存在して $M=N\cup_f R$ となるときをいう。

<u>定義</u> 多様体 M の <u>round handle decomposition</u>（以下，RHD と略）とは filtration

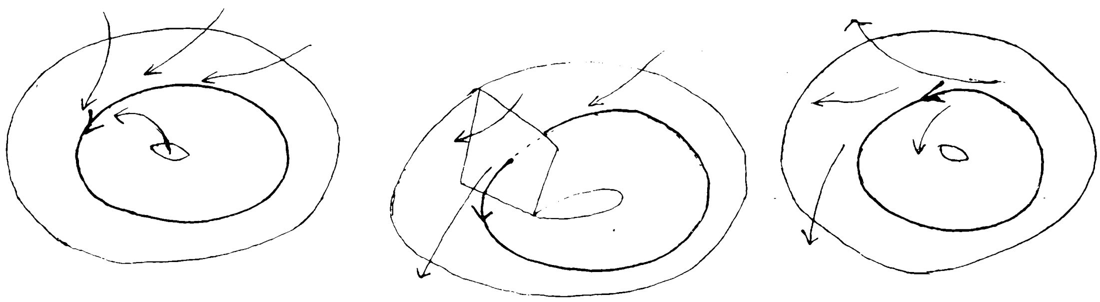
$$\phi = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$$

であって，各 M_{j+1} が M_j に round handle を attach して得られた多様体であるものをいう。

注3） RHD の handle の attaching の順序は次元の低いものからであるとしてよい。

<u>定理（Asimov [1]，Morgan [5]）</u> NMS と RHD とは自然に対応する。

証明の概略） RHD が与えられたとき，各 round handle (R, R') の内部に双曲的閉軌道を1つだけもち，かつ $\partial R \supset R'$ で vector が outward である様な vector field を構成すれば，



round 0-handle　　round 1-handle　　round 2-handle

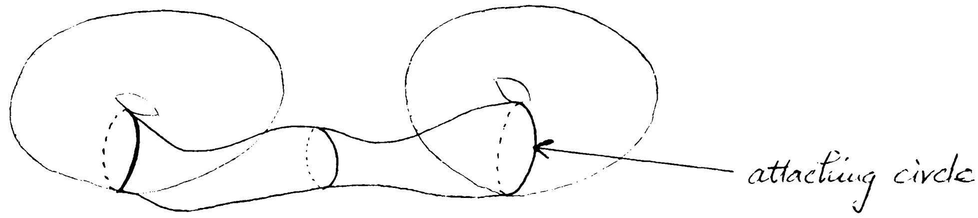
これは total space の NMS を与える。 逆に NMS に対して，上記の様に閉軌道に round handle が対応する RHD が存在する。 □

§2. Round 1-handle の attaching

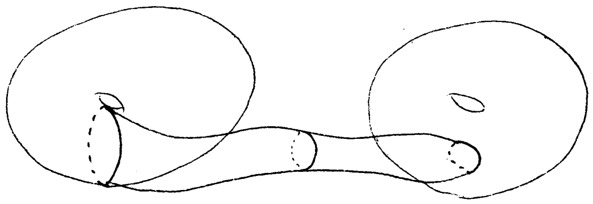
§1 の定理によって NMS の構造と RHD の構造が対応しており，また後者は各々の round handle の attaching に帰着されるが，鍵となるのは round 1-handle である。 今，多様体 N に round 1-handle ($S^1\times D^1\times D^1$, $S^1\times\partial D^1\times D^1$) が写像 $f: S^1\times\partial D^1\times D^1 \to \partial N$ で attach されているとき，f による $S^1\times\partial D^1\times\{0\}$ の各連結成分の image を attaching circle と呼ぶ。

境界が T^2 の和である多様体への round 1-handle の attaching は次の 11 種類に分類される。 (1)〜(4) は 2つの連結成分へまたがる attaching，(5)〜(11) は 1つの連結成分への attaching。

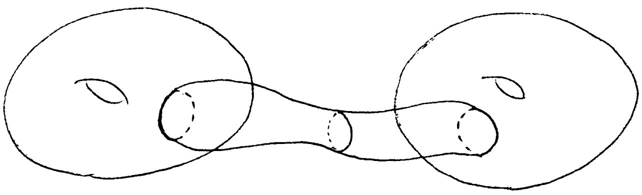
(1)



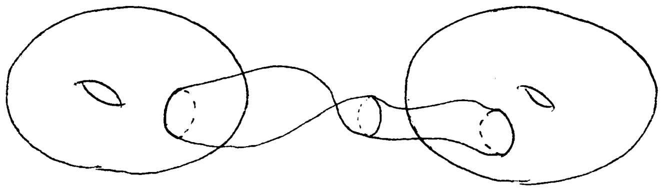
(2)



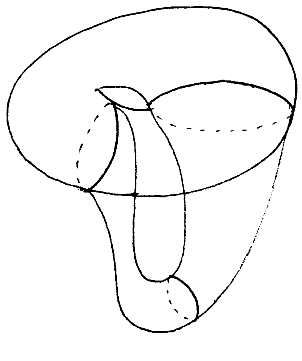
(3)



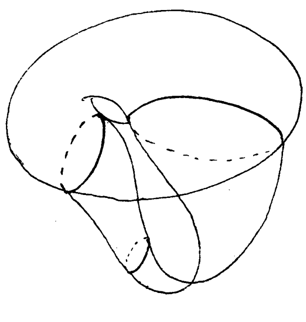
(4)



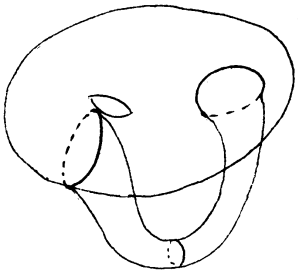
(5)



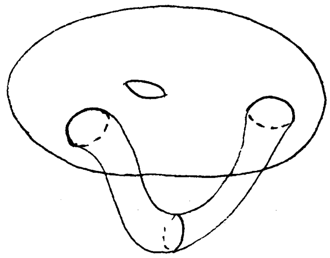
(6)



(7)

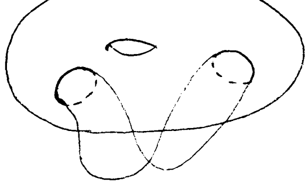


(8)

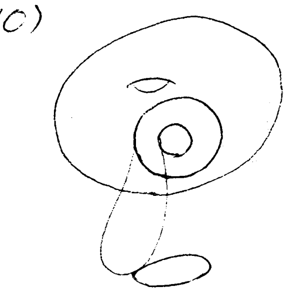


6

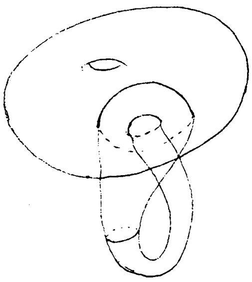
(9)



(10)



(11)



例えば (1) の方法で attach された round 1-handle を Type (1) などと呼ぶ。

<u>補助定理</u>　N を境界が T^2 の和である多様体とする。N に round 1-handle を (3), (8) 以外の方法で attach すれば，新しく出現する境界はやはり T^2 である。

Round 0-handle の attaching は $S^1\times D^2$ との disjoint union，round 2-handle の attaching は T^2 境界を $S^1\times D^2$ で"埋める"ことである。従ってこの補助定理により，例えば，与えられた RHD の round 1-handle が type (1), (2) のもののみである等の表現が許される。

§3. 結果

<u>定理1.</u> NMS に対して，対応する RHD の round 1-handle の attaching circle が境界上で homotopic to zero でない，即ち round 1-handle が type (1), (5), (6) のもののみであれば，この NMS は C^1級[*)]の横断的葉層構造をもつ。

<u>定理1'.</u> NMS に対して，対応する RHD の round 1-handle が type (1), (5) のもののみであれば，この NMS は C^∞級の横断的葉層構造をもつ。

<u>定理2.</u> NMS が C^2級の横断的葉層構造をもてば，対応する RHD の round 1-handle は type (1), (5), (6) のものに限る。

<u>系1</u> NMS 及びそれに横断的な C^2級葉層構造をもつ3次元閉多様体は graph 多様体である。即ち，有限個の embedded torus で切断すれば，(punctured surface) $\times S^1$ の有限和となる。

---

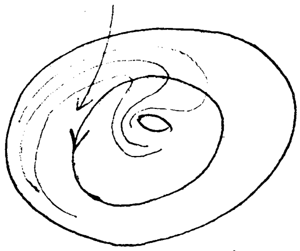
*) C^1級になることは土屋氏の Observation。

また Wood [10] の "possible conjecture" に対して次の否定的解答を得る。

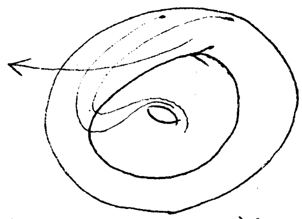
<u>系2</u>　M を3次元 C^∞ 級閉多様体, $\mathfrak{X}^1(M)$ を M 上の C^1 級 vector field 全体のなす空間とする。このとき開集合 $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^1(M)$ であって, $\mathcal{U}$ の各元が横断的葉層構造を持たぬものが存在する。

§4. 横断的葉層構造の構成

定理 1′ の証明の概略を述べる。今, 多様体 M 上の NMS 及び対応する RHD $\phi = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$ が定理 1′ の条件を満たしているとする。各 round-handle ごとに横断的葉層構造を構成してゆけばよい。まず, round 0-handle, 2-handle には Reeb component をはめ込む。(Reeb component については Novikov [8] を見よ。)



round 0-handle

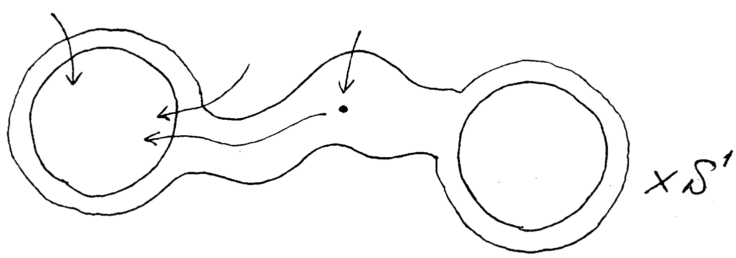


round 2-handle

Round 1-handle (R, R') に対しては Morgan [5] に従って <u>fatten handle</u> $C(R)$ を考える。これは round 1-handle に attach される側の境界の collar を付け加え，水増ししたものである。即ち，

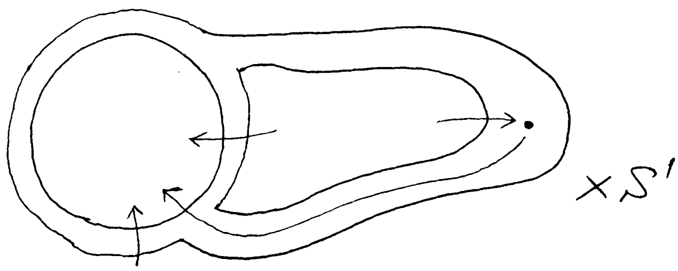
(R, R') が type (1) のとき

$$C(R) = (T^2\times[0,1]\cup T^2\times[0,1])\cup_f R$$

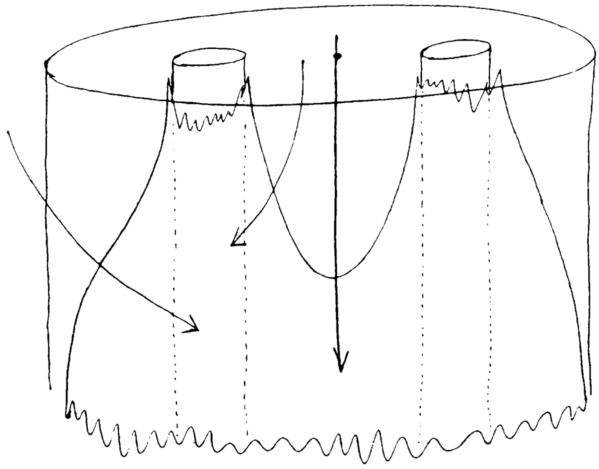


(R, R') が type (5) のとき

$$C(R) = T^2\times[0,1]\cup_f R\ 。$$



この fatten handle の内部の flow は上図の様になっているから，(two punctured disk)$\times S^1$ の bundle foliation を境界のところで流せば flow に横断的となる。これらを貼りあわせて total space M での横断的葉層構造を得る。



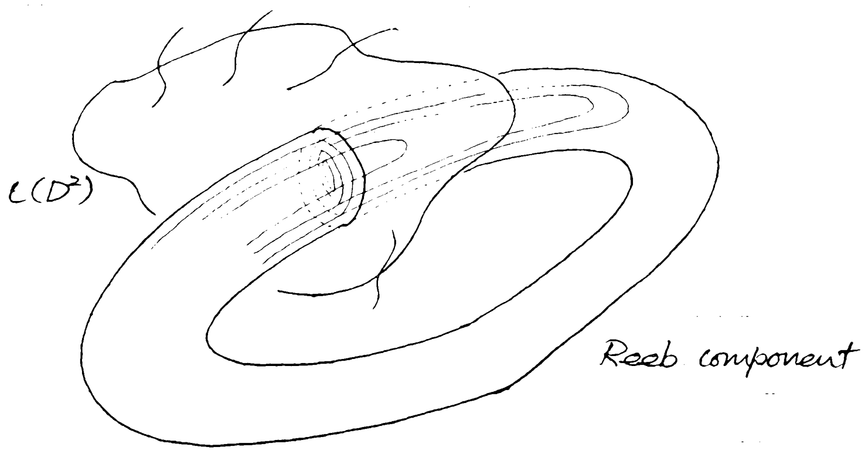
type (1)

§5. 横断的葉層構造の非存在

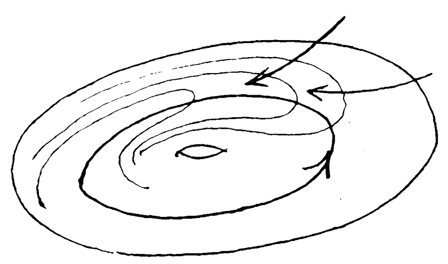
Novikov [8] による vanishing cycle の議論を次の型で引用する。

<u>定理 (Novikov [8])</u>　$\mathcal{F}$ を 3 次元多様体 M の C^2 級葉層構造とする。埋め込み $\iota: D^2 \to M$ で $\iota|\partial D^2$ が $\mathcal{F}$ に横断的であるものが存在すれば，$\mathcal{F}$ の Reeb component で $\iota(D^2)$ と交わるものが存在する。

これを用いて 定理A を証明するが，その為には次の補助定理も必要である。



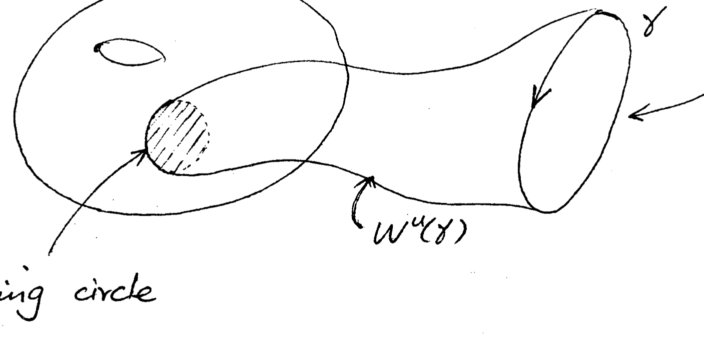
<u>補助定理</u>　$(S^1\times D^2, \mathcal{F}_R)$ を Reeb component とする。このとき $S^1\times D^2$ の vector field で $\mathcal{F}_R$ に横断的なものは、$S^1\times D^2$ の内部に閉軌道をもつ。



証明は Brouwer の固定点定理による。

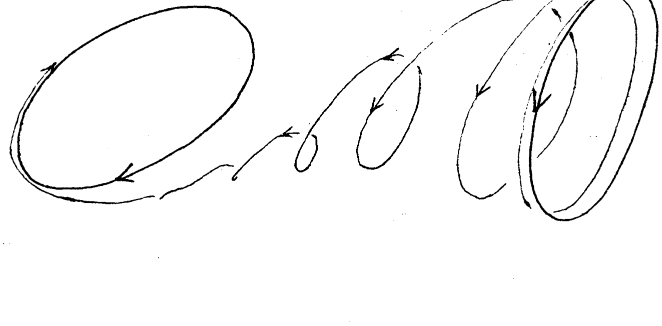
定理2の証明）背理法による。多様体 M 上の NMS が C^2 級の横断的葉層構造をもち、かつ対応する RHD の round 1-handle には type (1), (5), (6) 以外のものが存在すると仮定する。このとき attaching circle で境界上 homotopic to zero なるものが存在するから、Novikov の定理の仮定を

満たす埋め込み $\iota : D^2 \to M$ が次の様に構成できる。



Novikovの定理によって $\iota(D^2)$ と交わる Reeb component が存在し，またもとの vector field は葉層構造に横断的だから，補助定理によって $\iota(D^2)$ と交わる閉軌道が存在しなければならないが，これは ι の構成と矛盾する。 よって定理Xが証明された。 □

系Xの証明） 定理Xの証明は local なものであったから，任意の多様体に，例えば次の様な vector field を埋め込めば，これは横断的葉層構造をもたない。



一方，このようなvector fieldはC^1級の摂動に関して安定だから求める結果を得る。 □

定理1，系1の証明は略す。

文献

[1] D. Asimov : Round handles and non-singular Morse-Smale flows, Ann. Math., 102 (1975) 41-54.

[2] D. Eisenbud - U. Hirsch - W. Neumann : Transverse foliations of Seifert bundles and self homeomorphisms of the circle, to appear.

[3] M. Gromov : Volume and bounded cohomology, to appear in IHES Publ. Math.

[4] J. Milnor : On the existence of a connection with curvature zero, Comm. Math. Helv., 32 (1958) 215-233.

[5] J. Morgan : Non-singular Morse-Smale flows on 3-dimensional manifolds, Topology, 18 (1979) 41-53.

[6] T. Nishimori : Existence problem of transverse foliations for some foliated 3-manifolds, to appear.

[7] T. Nishimori : Foliations transverse to the turbulized foliations of punctured torus bundles over a circle, to appear.

[8] A. Novikov : Topology of foliations, AMS transl., (1967) 286 – 304.

[9] I. Tamura – A. Sato : On transverse foliations, to appear in IHES Publ. Math.

[10] J. Wood : Foliations on 3-manifolds, Ann. Math., 89 (1969) 336 – 358.

[11] J. Wood : Bundles with totally disconnected structure group, Comm. Math. Helv, 46 (1971) 257 – 279.