

有限鏡映群の不变式と
孤立特異点の flat coordinate system *

埼玉大学理学部 矢野 瑞

§ 0. はじめに 二つめの「Weyl 群の不变式」 齋藤恭司(数解研), 矢野瑞(埼玉), 関口久郎(都立), 加藤清生(筑波) 渡部敏(山形) と題した講演の記録である。

有限鏡映群は、その不变式環が多项式環に等しい、不变式の次数と種類を数え、位数で等しい、などがよく知られてる。([2], [3], [5], [6])。一方、孤立特異点の A, D, E 型と呼ばれるものが、また A, D, E 型の Lie 環の nilpotent variety の特性をもつて ([28]), B, C, F, G 型ではむしろ ([29]), 又、X から Y へと立場を入れ替わる ([25], [26]) とする。Coxeter 群 H_3 , H_4 , $I_{2(n)}$ に対する Y が $\overset{\text{対応する}}{\rightarrow}$ ([36], [38]) なども明確にされてる。(表 1, 2, 3, 4 参照)

Y は、超曲面孤立特異点の構造から、上述の対応関係を T=0, 0, 有限鏡映群の性質を見なす (2, 3 と並んで)。

最後の話は、有限 Coxeter 群の不变式環の生成元を unique に指定する方法を指出した。([32], [33], [34])。これは A, D, E 型特異点の versal deformation の parameter space *この論説の目次は最後 p.20 にあります。

は、或る "linear structure" を導入する α と平行 \pm 4 ([35])
 ([36]), 現在一般の孤立特異点に対する α の平行 \pm 4 値値 \pm 4 つ
 ある。
 (K.Saito, On the periods of primitive integrals の一部分, などが
 ように α の平行 \pm 4 値値 \pm 4 である). 特に半純形型特異点には
 2 つ, 上述の "linear structure" (deformation of parameter space
 o flat coordinate system による) の存在は、前序より
 非余型一階微分方程式の形は \pm 4 で \pm 4 つ, 具體的には
 討論型化し, 古典的多項式函数の復元は \pm 4 flat coordinate
 system が確定 (T). 二つ複型化 (用ひ) の手法は, 佐藤幹夫等
 による \pm 4 類数の平行 \pm 4 の類似を) が \pm 4 あり, 前序は特異点の
 事形の \pm 4 類数を述べる (2 つ).

\pm 4, 有理鏡映群 \pm 4 と \pm 4, 整素鏡映群 \pm 4 を表す (\pm 4).
 例) [12] [5] 2 方 \pm 4 は分類 \pm 4 で \pm 4 T, 構成する状況を登
 報 (T = 12, [14] [] 2" 12 \pm 4, \pm 4 ともかく). [14] 12
 Weyl \pm 4 に特別な形 \pm 4 embedded \pm 4 と u.g.g.r. と分類 (, [] 2" 12
 graded Lie algebra と "Weyl \pm 4" と u.g.g.r. は \pm 3 = 2 \pm
 4 (T = 12). Coxeter \pm 4 と場合 \pm 4 は 12, 不変式 \pm 4 deformation \pm
 parameter space \pm 4 と \pm 4 と 2" 12 \pm 4 は \pm 4 = 4 T = 12. 2, Bries
 korn-Slodowy \pm 4 formulation \pm 4 と \pm 4 と 2" 12 \pm 4 は \pm 4 = 4 T = 12.
 例) \pm 4 は \pm 4 と \pm 4 と invariant $\{m_1, \dots, m_k\}$ は, u.g.g.r. \pm
 reflecting hyperplanes \pm 4 と \pm 4 と free arrangement \pm 4 と

Σ 上の定理 3. logarithmic vector fields の weights と一致する ($\mathbb{C}P^n$).

n, g, j, r の discriminant の特徴性から定理 3 の不等式 $H \leq$

左端が左半分、右端は $\log.$ vec. f. の $\frac{2n}{\ell}$ と $\frac{n}{\ell}$ の半

要性を指す (、右端は既知の不等式 \leq の奇妙な用法である)

が Σ である (表 5). (左 \leq 右) の関係は $[15]$ に示す $\mathbb{C}P^n$ の

と duality と似た (\prec 、分類結果はもとより $\mathbb{C}P^n$ で示す), 現在理論的準備が行なわれつつある。

以下に述べる、上記の準備は因し、併せて手引りを明確化する。

§ 1. 有理整数環の不等式環

G : 有理群 k : 体, $\text{ch}(k)/|G|$ ($|G|$ は G の位数).

以下では $k \cong \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (但し \mathbb{C} の場合、これが最も用いられる条件である).

$V \cong k^d$, $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ faithful linear rep.

且つ $\forall i \in G \subset \text{GL}(V)$ とすると. $V^* \cong V$ a dual space

と, V^* a symmetric algebra $S(V^*)$ と G -不変部分環 $R \subseteq S(V^*)$,

$$R = S(V^*)^G \quad \text{とす}. \quad (= k[V^*]^G)$$

R は Ceresa-Macaulay である, Hochster-Eagon Amer. J. Math. (1971),

Dade (1971) は ± 12 ; 次が既定である.

Theorem 1.1 $\exists P_1, \dots, P_d \in R$, algebraically independent homogeneous elements, $\deg P_i = |G|$, $\{P_i\}$ B-sequence, and $\exists Q_1, \dots, Q_d \in R$

$$\text{s.t. } R = \bigoplus_{i=1}^d Q_i \bar{k}[P_1, \dots, P_d].$$

Definition 1.1. $\delta(G) = \min \{ \delta \mid \text{such } \delta \text{ as in Thm 1.1} \}$.

Corollary 1.3. $|G| = \prod \deg P_i / \delta(G)$ (If G is finite)

$$\text{特に } \delta(G) \leq |G|^{\ell-1} //$$

Remark 1.4. (Huffman Sloane, Adv in Math (197)) $\delta(G) \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$,

評価 $\delta(G) \leq |G|^{\ell-1}$ が渐近的 \Rightarrow best possible $\exists \ell \in \mathbb{Z} \geq 2$, $\delta(G) \geq |G|^{\ell-1}$ の具体的な例を \mathbb{Z}^n と \mathbb{R}^n で示す。

Definition 1.5. ① $g \in GL(V)$ が reflection である \Leftrightarrow (条件)

g は semi-simple であり, $\text{rank}(1-g)=1$. すなはち $g=1$.

(order $g=2$ の場合は $(\exists \lambda)$, $g=\lambda I$).

② $\text{Ker}(1-g)=H_g$. すなはち g の反射面 L が H_g である.

($\exists L$, $V=L \oplus H_g$, $L \perp H_g$ かつ $\text{ord } g$ 乗法作用する).

(\mathbb{C} 上の Weyl group の $\forall \sigma \in S$ は $\sigma^2=1$ で $\sigma < 1$, 一般に \mathbb{F}_q 上の Maschke 定理を用いる).

Theorem 1.6. (例 21 Bourbaki Lie Theory 4.5.6 § 6 Ch IV no 5.5 Th. 4)

G は reflection 生成元 $\Leftrightarrow \delta(G)=1$.

(\mathbb{R} , Th. 1.1 Cor. 1.3) $R \cong k[P_1, \dots, P_\ell]$, $|G| = \prod \deg P_i$).

この定理の $\mathbb{R}=\mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合は [3] [5] (= A), [6] の一般的証明を用いて証明する (Chevalley の定理とは異なり), [6] は一般的証明を用いて証明する (Chevalley の定理とは異なり), 何事かとつけ加えて \mathbb{R} と \mathbb{C} の場合を証明する.

不適当な手並みを述べて証明する。[6] では reflection と order 2 が混ざり合っており、証明には A_1 と A_2 の order 2 の適用を用いる。

Weyl 群の不適当な \mathbb{R} 上の $R \cong k(P_1, \dots, P_\ell)$, $\prod \deg P_i = |G|$ の [2] は \mathbb{R} 上の。

今後 \mathbb{R}, \mathbb{C} で $\text{char } k=0$ または $k=\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Theorem 1.7. (Coxeter-Shephard-Todd) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

の場合、鏡映 \mathcal{L} の生成元 p_i を \mathbb{R} の次に list する直積 \mathcal{L} 。

① $\mathbb{k} = \mathbb{R}, ([3])$ a. A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 (versal def)

(Coxeter \mathcal{L}) b. B_l, F_4, G_2 ("versal" def)

c. $H_3, H_4, I_2(p)$ $p=5, p \geq 7$. (free def).

② $\mathbb{k} = \mathbb{C} ([5])$ a. $G(r, l, \lambda), G(r, r, l), N. 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 14, 16,$

(u.g.g.r.) 17, 18, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 32, 33, 34.

b. $G(r, p, l)$: $2 \leq p \leq r, 7, 11, 12, 13, 15, 19, 22, 31$.

Remark 1.8 ① Th. 1.6 ② $\mathbb{C}^V/G \cong \mathbb{k}^l$ である。すな

座標空間が R の次に \mathbb{C}^V/G の次に \mathbb{C}^l である。Th. 1.7 ① は \mathbb{C}^l の次に V/G は

② は \mathbb{C}^l の次に \mathbb{C}^V/G である。すなはち \mathbb{C}^l の次に \mathbb{C}^V/G である。③ は

2. 1 は A, D, E の versal deformation ④ は 2. 1 は \mathbb{C}^l の次に "versal"

def. ⑤ は free deformation. a. b. 12. Weyl などと (2 種類) ある。

⑥ Th. 1.7 ⑦ 1=2, 11, 2, 12. 2=3 12. λ (2 種類) 13. 3=4 12

4=5 12, 24, 27. 5=6 complex polytope 3=7 23 2=3. b. 2=12

$l+1$ 個の鏡映 \mathcal{L} の生成元 p_i , complex polytope の種類 3=2 2=3 2=12

$G(r, p, l) \cong 31$ である。 (鏡映 \mathcal{L} の次に \mathbb{C}^l の次に \mathbb{C}^V/G の次に \mathbb{C}^r)

§ 2. Flat generator system

Coxeter \mathcal{L} の不变式 \mathcal{L} の生成元 p_1, \dots, p_l は unique 5

指定の方法がある。これは flat generator system である。

→ flat である, flat connection であるなどと定義される。

いとこども CON_A は linear structure といふと “平坦”
といふ。つまり A の V 上の \mathbb{R} -valued な \mathbb{R} -線形写像。

しかし、この用語には幾何学的な意味、指算代数的な意味がある。

仮定：以下 G は既約、すなはち V への作用は既約である。

$V \cong \mathbb{R}^k$ は G -不変正定値内積が定数倍を持つ unique は

存在する。これを (1) と記す。(何か \mathbb{R} 上で G 上で \mathbb{R} に \mathbb{R} に)

それで \mathbb{R} が \mathbb{R} となる。

$$(dP/dQ) = \sum_{ij} \frac{\partial P}{\partial \xi_i} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} (\xi_i | \xi_j)$$

と定義する。ここで dP は P の外微分、 ξ_1, \dots, ξ_k

Definition 2.1. $R \rightarrow$ homogeneous generator system P_1, \dots, P_ℓ

を flat といふ。すなはち、 $L = \sum_{i=1}^\ell \mathbb{R} P_i$ と表せる。

① $D \cdot (d \cdot | d \cdot) : R \times R \rightarrow R$, $D = 2/\deg P_\ell$, $\deg P_i \leq \deg P_\ell$
を L は制限する, \mathbb{R} -valued とする, ② L は non-degenerate
bilinear form とする \mathbb{R} とする。

Theorem 2.2. flat generator system は存在し、 L は
unique である。

この定理は初め [32] におこつて、 $A, B, D, E_6, F_4, G_2, H_3, H_4, I_2(p)$
に対する証明（たゞ方法は、[18][19][20] など）で証明（たゞ、
左不变式による具体的構造 ([22] に詳しく述べ) を用いて実際には
構成的、すなはち uniqueness は $A, B, D, E_6, F_4, G_2, H_3, H_4, I_2(p)$ に示すまゝである）。

その後 [35] に より F_2 , F_3 と あたたかく 明が できた。又、実体の
構成と [33], [34] における まとめて $\{ \}$

Example 2.3. $I_2(p)$. (order $2p \Rightarrow$ dihedral group).

$$V^* = \mathbb{R}\xi_1 + \mathbb{R}\xi_2, \{\xi_1, \xi_2\} \text{ orthonormal basis } \Sigma \in \mathcal{T}(3) \quad u = \xi_1 + \sqrt{-1}\xi_2$$

$$\Sigma \models J \vdash I^2 \quad x_2 = u\bar{u} \quad (= \xi_1^2 + \xi_2^2), \quad x_p = (\sqrt{-1})^p (u^p + (-\bar{u})^p) \quad \text{in } R \rightarrow$$

$$(dx_2/dx_2) = 4x_2, \quad (dx_2/dx_p) = 2px_p, \quad (dx_p/dx_p) = 4p^2 x_2^{p-1}.$$

$\{x_1, x_2, x_3\}$ flat generator system in \mathbb{R}^3 .

$$(\text{卷} \rightarrow \text{大}k, 2 \rightarrow \text{卷} \rightarrow 12, u \rightarrow -\bar{u}, u \rightarrow e^{-\exp(-\frac{2\pi i}{p})} \bar{u}^{-2^k \pm 3})$$

Example 2.4 A_l ($l+1 = 2 + 4 \sqrt{3} \frac{1}{2}$)

$$V^* = \sum_{i=1}^{l+1} R\xi_i / R(\sum_{i=1}^{l+1} \xi_i) \quad \text{即,} \quad \xi_i \mapsto \xi_{\sigma(i)} \quad \sigma \in S_{l+1} \quad \text{是}\}$$

問33。 (V が $\sum \operatorname{Re} z_i$ 中の $z_1 + \dots + z_{k+1} = 2\pi i$ の 1 次元空間かをせよ)。

$\sum_{i=1}^{l+1} \xi_i$ 是 $p_1 = \sum \xi_i$ 的一次基本对称式 (modulo $p_1 = \sum \xi_i$)。

$$P_i^d = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_d = i \\ 2 \leq i_j \leq d+1}} p_{i_1} \cdots p_{i_d} \in \mathbb{K}, \quad \text{and } i = d \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$$

$$(1 + CP)_i^\alpha = \sum_{d \geq 0} (\alpha)_d C^d P_i^d$$

$$(x, \log(1+cp))_i = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{(-c)^d}{d} p_i^d \approx \text{系数 } 2$$

$$x_i = \frac{l+1}{i-1} (1+p)^{\frac{1}{l+1}(i-1)} \quad i=2, \dots, l+1$$

flat generator system $\pm 5 \pm 3$. ch 12 遠 = $\pm 17\text{Hz}$,

$$P_i = \frac{l+1}{l+1-i} \left(1 - \frac{1}{l+1} X\right)_i^{-(l+1-i)} \quad i=2, \dots, l$$

$$P_{l+1} = -(l+1) \log \left(1 - \frac{1}{l+1} X\right)_{l+1}$$

この問題は、今後が A, B, D 型の flat generator system を構成するときも同じで、当初は評判が悪かった。しかし(後文 §3)を見ると、この問題は根本的に有効である。尚、 (dx_i / dx_j) と x_i の式と (2) explicit に書かれた公式はまだ見つけていない。

我々の flat coordinate system を構成するとき、Coxeter の不変式 θ の basis と unique な指述の方法は今までなかったが、我々の方法が初めてそれを実現した。[1] では、特別な場合の証明と (2) unique な指述する方法が示されている。さすに θ は Weyl 群に対して、 t ; 一種類 unique な指述の方法があることを示す。

§3. Brieskorn-Slodowy 理論 $\xrightarrow{\text{Th. 3.8}}$ Kostant's generator system.

この §2 の中で θ の B-S 理論を説明し、特にこの理論を用いて示す。さすに、周囲は t と一致するが、Kostant の R の生成元を t に写して説明する。

(3.1) \mathfrak{g} : simple Lie algebra / C, G : \mathfrak{g} の adjoint group

(\hookrightarrow §2 の G は鏡像群の直積である。 $W(G)$ が今 \mathfrak{g} の G に等しい)

\mathfrak{f} : \mathfrak{g} の Cartan subalgebra, $\lambda = \text{range } \mathfrak{f}$ ($= \dim \mathfrak{f}$)

$W(G)$: $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}) \rightarrow$ Weyl 群 (A, B, D, E, F, G 型の Coxeter の)

$Z_{\mathfrak{g}}(X)$: $X \in \mathfrak{g}$ の centralizer, \mathfrak{g}^*, f^* : \mathfrak{g} の dual space

$X \in \mathfrak{g}$ if $\text{ad}(X); Y \mapsto [X, Y]$ is semisimple, nilpotent

$$\mathcal{N}(g) = \{x \in g \mid x \text{ nilpotent}\}.$$

Theorem 3.2 (Chevalley) canonical surjection $S(g^t) \rightarrow S(f^t)$

12 ~~two~~ algebra isomorphism $S(G^*) \xrightarrow{\cong} S(G^*)^{W(G)}$ to induce to 3.

Definition 3.3 Invariant morphism (\cong adjoint quotient)

$\chi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{F}/W(G)$ は次の如きである.

$\Rightarrow X = X_s + X_n$ (semi-simple, nilpotent part $\neq 0 \Leftrightarrow (X_s, X_n) \neq 0$)

$$X \mapsto X_s \mapsto Gx_s \cap f \mapsto (Gx_s \cap f)/_{W(G)} \quad (\text{at } 12 - 52' \# 3)$$

Remark 3.4 χ_{12} 具体的 $= 12 f/w(G)$ ，应该为 $S(f^k)^{w(G)}$

$\cong \mathbb{C}[P_1, \dots, P_e]$ たり定理(4.12)より、 P の G -不変性あり

$P(X_S) (= P(gX_S) \exists g \in G gX_S \in \mathcal{F})$ は $\frac{1}{|S|}$ の $\frac{1}{|G|}$ 倍で $\varepsilon + o(\varepsilon)$

$$Y \ni X \mapsto \chi(X) = (\mathbf{p}_1(X_s), \dots, \mathbf{p}_e(X_s)) \in \mathcal{F}/W(G).$$

Theorem - Definition B.5. (Kostant - Steinberg - Dynkin)

① $X \in N(g)$ 时, $\dim Z_g(X) - \text{rank } g$ 为非负偶数.

$$\textcircled{2} \quad \{X \in N(g) \mid \dim Z_g(X) = l\} \subset (\{X \in N(g) \mid \dim Z_g(X) = l+2\})$$

は空でない半- G -orbit となる。各元は regular (subregular)

nilpotent element & "if i".

Definition 3.6 $X \in \mathfrak{g}$ a G -orbit $G \cdot X$ a tangent space $\rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\text{令 } \mathcal{Y} = T_X(\mathcal{G}X) \oplus S. \quad \text{则 } \mathcal{Y} = X + S = S_X.$$

$\mathbb{E}[X|I=1, \dots, 3] \cdot X$ as Transversal slice ε not in I

$S \in$ Killing form ($\in \mathfrak{t}$) \Rightarrow 直交補 $\stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{S} \supset T_2$ 成立, orthogonal slice \Leftrightarrow $\mathfrak{S} \cap \mathcal{N}(g)$ \cong $TDS(X, Y, H) \stackrel{\text{Jacobsen-Morozov}}{=} X + Z_g(Y) \subset$ orthogonal slice

Theorem (3.7. (Kostant)) X_0 : regular nilpotent

S_{X_0} : orthogonal slice $\Rightarrow X|_{S_{X_0}} : S_{X_0} \cong \mathfrak{f}/\mathfrak{w}(G)$ biholomorphic //
 $(\exists n \in \mathbb{Z}, \forall X \in \mathfrak{g}_f, \text{codim } G_X = l \stackrel{\text{(H)}}{=} \Rightarrow G_X \cap S_{X_0} = \{1\text{pt}\} \pm 1)$.

Theorem 3.8 ([28], [29]). X_0 : subregular nilpotent

S_{X_0} : transversal slice $\Rightarrow X|_{S_{X_0}} : S_{X_0} \rightarrow \mathfrak{f}/\mathfrak{w}(G)$.

① $X_{S_{X_0}}^{-1}(0) = S_{X_0} \cap \mathcal{N}(g)$ 1 pt. $\Leftrightarrow g \text{ a type } \geq 13$ (type \Rightarrow rational double point) \Leftrightarrow locally biholomorphic. (BPS $g \in A \oplus \mathbb{Z}^3$, $A \in$ rat. double)

② $t \in \mathfrak{f}/\mathfrak{w}(G) \setminus \{0\}$, $X_{S_{X_0}}^{-1}(t) \neq \emptyset$ \Leftrightarrow ① \Leftrightarrow t rational double pt.

\Rightarrow (versal) deformation \cong locally biholomorphic. //

\mathbb{P}^1 (p.) \Rightarrow rational double points \Rightarrow Σ \cong \mathbb{P}^1 . B_2, C_2, F_4, G_2
 $\stackrel{\text{等}}{\cong}$ \cong rational double pt. \cong $A_{2k-1}, D_{2k+1}, E_6, D_4, \stackrel{\text{等}}{\cong}$ \cong E_7 .

(versal) deformation $\pm \mathbb{P}^1$, \mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}^3 , $\mathbb{P}^3 \cong$ 3 slices \cong \mathbb{P}^1 , global \cong isomorphic \cong $\mathbb{P}^1 \oplus \mathbb{P}^1$ (\oplus \cong \cong).

\cong \mathbb{P}^1 , Th. 3.7 \Rightarrow \exists \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^1 (\subset \mathbb{P}^2 , \perp \mathbb{P}^1). X_0 \in regular nilpotent, $\{X_0, H_0, Y_0\} \cong$ principal S -triple \cong $\mathbb{P}^1 \oplus \mathbb{P}^1$, $\text{ad}(H_0)$

$\Rightarrow Z_g(Y_0) \cong \mathbb{P}^1$ \Rightarrow $12 - (2d_i - 1) \quad i=1, \dots, l \quad d_i = \deg P_i$

\cong \mathbb{P}^3 . \Rightarrow \exists \mathbb{P}^1 \perp \mathbb{P}^1 \in $\mathcal{U}_i \cong$ \mathbb{P}^1 , $Z_g(Y_0) = \sum \mathbb{P}^1 \mathcal{U}_i$.

$\dim \mathcal{U}_i = 2$, $S_{X_0} \ni X_0 + \sum q_i \mathcal{U}_i \mapsto (P_1(q), \dots, P_l(q)) \in \mathfrak{f}/\mathfrak{w}(G)$

\cong biholomorphic $\cong \mathbb{P}^1$, $S(\mathfrak{f}^*)^{W(G)} \cong \mathbb{C}[q_1, \dots, q_l] \cong \mathbb{P}^1$.

Definition 3.9 ([30]) $\{g_1, \dots, g_\ell\}$ が 不変式 種子 (Kostant's)
生成元の系となる。(構成する) $\sum \mathbb{C}g_i$ は unique である (3.)

Example 3.10. ~~A₂~~. (Example 2.4 の \mathbb{R})

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}) \text{ は regular nilpotent.}$$

$$\text{orthogonal slice 12} \quad X_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ g_2 & 0 & -1 \\ g_3 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \subset X_0 + \sum g_i \cdot i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{invariant morphism 12} \quad \det(\lambda + X) = \sum_{i=0}^{l+1} p_i(X) \lambda^{l+1-i} \quad 1 = \pm 3$$

$$\text{即} \quad X \mapsto (p_1(X), \dots, p_{l+1}(X)) \in (\mathbb{R}^{\times})^{l+1}$$

$$\det(\lambda + X_g) = \sum_i (1-Q)_i^{-l+2-i} \lambda^{l+1-i} \quad (\text{Remark 3.11})$$

$$\text{より} \quad [p_i = (1-Q)_i^{-l+2-i}] \text{ である. } \quad \text{これは Example 2.4}$$

$$\text{と 1.7 の 論述 法を用いて. } Q_i^d = \sum g_{i_1} \cdots g_{i_d} \quad i_1 + \cdots + i_d = i \quad 2 \leq i \leq l+1.$$

この表示が 2.4 における p_i の 表示 と まとめて $X \mapsto \mathbb{R}^{l+1}$

微分し, $X = (l+1)Q$ と した もつてあることを 気付く である

). 実際, 我々が flat generator system を構成 (た直後, 岩塙先生
曰く、「我々の $\{X_i\}$ が 上で $\{g_i\}$ と 1:1 に はるかに はるかに 似合つてゐる?」) と い

題に された. 同じことはないのが, よく似てゐる。

Remark 3.11 上記 $\boxed{\quad}$ を 元して太く. たての 計算 が.

$GL(\infty)$ の generic element A の 13 有理数 $\varepsilon_1, \varepsilon_{l+1}, \dots, \sum_j |\varepsilon_j| < \infty$ とする

$$\sigma_j(A) = \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_i^j \quad (i \geq 0), \quad \bar{P}_j(A) = X_{\boxed{\varepsilon_j}}(A) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l+1}) \otimes j \text{ は 基本 2:1 } \frac{g_j}{g_{j+1}} \text{ が }$$

$$g_j(A) = X_{\boxed{\varepsilon_j}}(A) = \sum \varepsilon_i \cdots \varepsilon_{i_j} \quad (i \geq 0).$$

$$\exp(-\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \frac{t^j}{j}) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \bar{P}_h t^h = \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_j t^j \right)^{-1} \text{ である.}$$

$$\text{従って}, \sum (-)^h p_h t^h = \sum_{j \geq 0} (-)^j (g_1 t + g_2 t^2 + \dots)^j \\ = \sum_j \sum_k \sum_d (-)^j \binom{j}{k} Q_d^{j-k} g_1^k t^{k+d} \\ = \sum_h (-)^h \left(\sum_{k=0}^h (-)^k (1+Q)_k^{-h-k+1} g_1^{h-k} \right) t^h$$

したがって (\bar{p}_h) は \mathbb{Z} 上の 2×2 の行列である。

$$\bar{p}_h = \chi_{\begin{pmatrix} g_1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^h} = \det \begin{vmatrix} g_1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{h+1} (-)^k (1+Q)_k^{-h-k+1} \lambda^{h+1-k}$$

従って, $h = l+1$ のとき, $g_1 = \lambda \in \mathbb{C}^*$ ならば χ は \mathbb{Z} 上の 2×2 の行列である。

Remark 3.12 も 1 より A_ϵ の versal deformation は

$$\chi^{l+1} + t_2 \chi^{l+1} + t_3 \chi^{l+2} + \dots + t_{l+1}.$$

Theorem 3.8 $t = \epsilon$ のとき t_i は基本多項式 p_i と等しい。

従って, Ex. 3.10 より $\chi^{l+1} + \sum_{i=2}^l (1-Q)_i^{-l+i} \chi^{l+1-i}$ が $\{g_i\}$ 座標

で ϵ deformation である。すなはち, flat coordinate x_i (Ex. 2.4)

$$t = \epsilon, \quad \frac{1}{l+1} x_i = s_i \geq x_i + 1 \geq i+1 \quad \Rightarrow \text{式} 1;$$

$$\frac{1}{l+1} \chi^{l+1} + \sum_{i=2}^l (1-S)_i^{-l+i} \frac{\chi^{l+1-i}}{l+1-i} - \log(1-S)_{l+1}$$

$$\sum_{h=0}^l \left(\sum_{i=0}^h (1-Q)_i^{-h-i} \chi^{h-i} \right) t^h = \sum \det \begin{pmatrix} \chi^{-1} & 0 \\ g_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ g_h & x \end{pmatrix} t^h = (1-g(t)-xt)^{-1}$$

$$2. \quad \sum_{h=1}^{l+1} \left(\sum_{i=0}^{h-1} (1-S)_i^{-h-i} \frac{x^{h-i}}{h-i} - \log(1-S)_h \right) t^h = \underset{\substack{\text{式} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 987, 988, 989, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 995, 996, 997, 997, 998, 999, 999, 1000, 1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1005, 1006, 1007, 1008, 1009, 1009, 1010, 1011, 1012, 1013, 1014, 1015, 1016, 1017, 1017, 1018, 1019, 1019, 1020, 1021, 1022, 1023, 1024, 1025, 1026, 1027, 1028, 1029, 1029, 1030, 1031, 1032, 1033, 1034, 1035, 1036, 1037, 1038, 1039, 1039, 1040, 1041, 1042, 1043, 1044, 1045, 1046, 1047, 1048, 1049, 1049, 1050, 1051, 1052, 1053, 1054, 1055, 1056, 1057, 1058, 1059, 1059, 1060, 1061, 1062, 1063, 1064, 1065, 1066, 1067, 1068, 1069, 1069, 1070, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1076, 1077, 1078, 1079, 1079, 1080, 1081, 1082, 1083, 1084, 1085, 1086, 1087, 1088, 1089, 1089, 1090, 1091, 1092, 1093, 1094, 1095, 1095, 1096, 1097, 1097, 1098, 1099, 1099, 1100, 1101, 1102, 1103, 1104, 1105, 1106, 1107, 1108, 1109, 1109, 1110, 1111, 1112, 1113, 1114, 1115, 1115, 1116, 1117, 1117, 1118, 1119, 1119, 1120, 1121, 1122, 1123, 1124, 1125, 1126, 1126, 1127, 1128, 1128, 1129, 1130, 1130, 1131, 1132, 1132, 1133, 1134, 1134, 1135, 1136, 1136, 1137, 1138, 1138, 1139, 1140, 1140, 1141, 1142, 1142, 1143, 1144, 1144, 1145, 1146, 1146, 1147, 1148, 1148, 1149, 1150, 1150, 1151, 1152, 1152, 1153, 1154, 1154, 1155, 1156, 1156, 1157, 1158, 1158, 1159, 1160, 1160, 1161, 1162, 1162, 1163, 1164, 1164, 1165, 1166, 1166, 1167, 1168, 1168, 1169, 1170, 1170, 1171, 1172, 1172, 1173, 1174, 1174, 1175, 1176, 1176, 1177, 1178, 1178, 1179, 1180, 1180, 1181, 1182, 1182, 1183, 1184, 1184, 1185, 1186, 1186, 1187, 1188, 1188, 1189, 1190, 1190, 1191, 1192, 1192, 1193, 1194, 1194, 1195, 1196, 1196, 1197, 1198, 1198, 1199, 1200, 1200, 1201, 1202, 1202, 1203, 1204, 1204, 1205, 1206, 1206, 1207, 1208, 1208, 1209, 1210, 1210, 1211, 1212, 1212, 1213, 1214, 1214, 1215, 1216, 1216, 1217, 1218, 1218, 1219, 1220, 1220, 1221, 1222, 1222, 1223, 1224, 1224, 1225, 1226, 1226, 1227, 1228, 1228, 1229, 1230, 1230, 1231, 1232, 1232, 1233, 1234, 1234, 1235, 1236, 1236, 1237, 1238, 1238, 1239, 1240, 1240, 1241, 1242, 1242, 1243, 1244, 1244, 1245, 1246, 1246, 1247, 1248, 1248, 1249, 1250, 1250, 1251, 1252, 1252, 1253, 1254, 1254, 1255, 1256, 1256, 1257, 1258, 1258, 1259, 1260, 1260, 1261, 1262, 1262, 1263, 1264, 1264, 1265, 1266, 1266, 1267, 1268, 1268, 1269, 1270, 1270, 1271, 1272, 1272, 1273, 1274, 1274, 1275, 1276, 1276, 1277, 1278, 1278, 1279, 1280, 1280, 1281, 1282, 1282, 1283, 1284, 1284, 1285, 1286, 1286, 1287, 1288, 1288, 1289, 1290, 1290, 1291, 1292, 1292, 1293, 1294, 1294, 1295, 1296, 1296, 1297, 1298, 1298, 1299, 1300, 1300, 1301, 1302, 1302, 1303, 1304, 1304, 1305, 1306, 1306, 1307, 1308, 1308, 1309, 1310, 1310, 1311, 1312, 1312, 1313, 1314, 1314, 1315, 1316, 1316, 1317, 1318, 1318, 1319, 1320, 1320, 1321, 1322, 1322, 1323, 1324, 1324, 1325, 1326, 1326, 1327, 1328, 1328, 1329, 1330, 1330, 1331, 1332, 1332, 1333, 1334, 1334, 1335, 1336, 1336, 1337, 1338, 1338, 1339, 1340, 1340, 1341, 1342, 1342, 1343, 1344, 1344, 1345, 1346, 1346, 1347, 1348, 1348, 1349, 1350, 1350, 1351, 1352, 1352, 1353, 1354, 1354, 1355, 1356, 1356, 1357, 1358, 1358, 1359, 1360, 1360, 1361, 1362, 1362, 1363, 1364, 1364, 1365, 1366, 1366, 1367, 1368, 1368, 1369, 1370, 1370, 1371, 1372, 1372, 1373, 1374, 1374, 1375, 1376, 1376, 1377, 1378, 1378, 1379, 1380, 1380, 1381, 1382, 1382, 1383, 1384, 1384, 1385, 1386, 1386, 1387, 1388, 1388, 1389, 1390, 1390, 1391, 1392, 1392, 1393, 1394, 1394, 1395, 1396, 1396, 1397, 1398, 1398, 1399, 1400, 1400, 1401, 1402, 1402, 1403, 1404, 1404, 1405, 1406, 1406, 1407, 1408, 1408, 1409, 1410, 1410, 1411, 1412, 1412, 1413, 1414, 1414, 1415, 1416, 1416, 1417, 1418, 1418, 1419, 1420, 1420, 1421, 1422, 1422, 1423, 1424, 1424, 1425, 1426, 1426, 1427, 1428, 1428, 1429, 1430, 1430, 1431, 1432, 1432, 1433, 1434, 1434, 1435, 1436, 1436, 1437, 1438, 1438, 1439, 1440, 1440, 1441, 1442, 1442, 1443, 1444, 1444, 1445, 1446, 1446, 1447, 1448, 1448, 1449, 1450, 1450, 1451, 1452, 1452, 1453, 1454, 1454, 1455, 1456, 1456, 1457, 1458, 1458, 1459, 1460, 1460, 1461, 1462, 1462, 1463, 1464, 1464, 1465, 1466, 1466, 1467, 1468, 1468, 1469, 1470, 1470, 1471, 1472, 1472, 1473, 1474, 1474, 1475, 1476, 1476, 1477, 1478, 1478, 1479, 1480, 1480, 1481, 1482, 1482, 1483, 1484, 1484, 1485, 1486, 1486, 1487, 1488, 1488, 1489, 1490, 1490, 1491, 1492, 1492, 1493, 1494, 1494, 1495, 1496, 1496, 1497, 1498, 1498, 1499, 1500, 1500, 1501, 1502, 1502, 1503, 1504, 1504, 1505, 1506, 1506, 1507, 1508, 1508, 1509, 1510, 1510, 1511, 1512, 1512, 1513, 1514, 1514, 1515, 1516, 1516, 1517, 1518, 1518, 1519, 1520, 1520, 1521, 1522, 1522, 1523, 1524, 1524, 1525, 1526, 1526, 1527, 1528, 1528, 1529, 1530, 1530, 1531, 1532, 1532, 1533, 1534, 1534, 1535, 1536, 1536, 1537, 1538, 1538, 1539, 1540, 1540, 1541, 1542, 1542, 1543, 1544, 1544, 1545, 1546, 1546, 1547, 1548, 1548, 1549, 1550, 1550, 1551, 1552, 1552, 1553, 1554, 1554, 1555, 1556, 1556, 1557, 1558, 1558, 1559, 1560, 1$$

$$\text{Prop 5. } \exp\left(-\sum_{k>0} \tilde{F}_{A_k}(x,s) \frac{t^{k+1}}{k+1}\right) = 1 - xt - s(t) \quad s(t) = \sum_{j \geq 2} s_j t^j$$

$\exists \nexists 1 = 1 \sim,$

$$\left(\sum_{k>1} \tilde{F}_{B_k}(x,s) \frac{t^{2k}}{2k} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+xt-s(t)}{1-xt-s(t)} \right) \quad s(t) = \sum_{j \geq 1} s_{2j} t^{2j} \right)$$

$$\bullet \coth \left(\sum \tilde{F}_{B_k}(x,s) \frac{t^{2k}}{2k} \right) = 1 - xt - s(t). \quad s(t) = \sum_{j \geq 1} s_{2j} t^{2j}$$

$$\left(\sum_{k>1} \tilde{F}_{C_k}(x,y,s) \frac{t^{2k}}{2k} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\sqrt{xt-s(t)}}{1-\sqrt{xt-s(t)}} \right) - xy^2 \log \frac{1+t}{1-t} \right)$$

$$\sum \tilde{F}_{D_{k+1}}(x,y,s) \frac{t^{2k}}{2k} = \sum \tilde{F}_{C_k}(x,y,s) \frac{t^{2k}}{2k} + 2y \sum s'_{k+1} \frac{t^{2k}}{2k}$$

$(= F')$ $\begin{cases} B, D \xrightarrow{\text{def}} \text{Weil-Petersson flat generatorsystem} \\ B, D, C \xrightarrow{\text{def}} \text{deformation } \mathcal{X} \text{ in flat coordinates in 1 or 3} \end{cases}$

类似形 \rightarrow 令 σ_i 表示 $\sigma_i = \sum_{l=1}^k \sigma_i^{l+1} t^l$ 在 \mathbb{P}^1 上 $\left(\begin{smallmatrix} \text{上部} & \text{下部} \\ \text{左} & \text{右} \end{smallmatrix}\right)$

Proposition 3.13. $(+) \times (l+1)$ 乘 $\sigma_l = (\varepsilon_1^{l+1} + \dots + \varepsilon_{l+1}^{l+1}) \in X_0, X_1, \dots, X_{l+1}$

σ_i 表示 i 表示 $\sigma_i = \sum_{l=1}^k \sigma_i^{l+1} t^l$, $x = -\sigma_0, s_i = -\sigma_i \frac{t^{i+1}}{i+1}$

代入 $1 + \sigma_i$ $\tilde{F}_{A_k}(x,s) \xrightarrow{\text{def}} A_k \text{型 vessel deformation}$

flat coordinate $1 + \sigma_i$ 表示 σ_i 在 \mathbb{P}^1 上 $\left(\begin{smallmatrix} \text{上部} & \text{下部} \\ \text{左} & \text{右} \end{smallmatrix}\right)$, $(-) \sum \varepsilon_i^{l+1} \in$

基本对称 $\sigma_i = p_1, p_2, \dots, p_{l+1}$ 表示 $\sigma_i = (-)^{i+1} p_i$, $s_i = (-)^{i+1} p_i$

太 \rightarrow $t \mapsto t^{l+1} \in \tilde{F}_{A_k}(x,s) \in \mathbb{P}^1$

Example 3.14 $\sigma_1 = p_1, \sigma_2 = p_1^2 - 2p_2, \sigma_3 = p_1^3 - 3p_2p_1 + 3p_3$

$$\sigma_4 = p_1^4 - 4p_2p_1^2 + 4p_3p_1 + 2p_2^2 - 4p_4 = 4t^4 + 4t^2 + 2t^3 - 4t^5$$

$$\tilde{F}_{A_1} = x, \quad \frac{1}{2} \tilde{F}_{A_2} = \frac{x^2}{2} + s_2, \quad \frac{1}{3} \tilde{F}_{A_3} = \frac{x^3}{3} + s_2x + s_3$$

$$\frac{1}{4} \tilde{F}_{A_4} = \frac{x^4}{4} + s_2x^2 + s_3x + s_4 + \frac{1}{2}s_2^2.$$

要 $\exists 1 =$, flat generators $\rightarrow A_k \xrightarrow{\text{def}} \mathbb{P}^1$, $\frac{1}{l+1} \sum \varepsilon_i^{l+1}$

基本对称 σ_i 表示 $\sigma_i = p_i$ 时, p_i $\forall i \leq l-1$ 的关系 $\sigma_i = \sigma_i + \sigma_{l-i}$

§4. Flat coordinate system, Free deformation.

(4.1) $f: \mathbb{C}^{n+1,0} \rightarrow \mathbb{C},_0$ と isolated sing point $0 \in t \mapsto$
holomorphic function. $\tilde{F}: \mathbb{C}^{n+1} \times S,_{\infty} \rightarrow \mathbb{C},_0$ と $f \mapsto$ unfolding
parameter space $(S,_{\infty})$, $\dim S = m$. $t \in t \mapsto t \mapsto \mathbb{C}^m$.

$(\mathbb{C}^{n+1},_0), (S,_{\infty})$ と local coordinate $t = (x_0, \dots, x_n), (t_1, \dots, t_m)$ と
(\exists 2 条件 $\Sigma 2 t_i \neq 0$ の \tilde{F} が $\tilde{F} \mapsto t \mapsto \mathbb{C}^m$).

$$(4.1.1) \quad \tilde{F}: \mathbb{C}^{n+1} \times S,_{\infty} \rightarrow \mathbb{C},_0 \text{ holomorphic}$$

$$(4.1.2) \quad \tilde{F}|_{\mathbb{C}^{n+1} \times S,_{\infty}, 0} = f$$

$$(4.1.3) \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t_m}(x, t) \equiv c_m \neq 0.$$

$$(4.1.4) \quad \left\{ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t_i}(x, t) \right\}_{1 \leq i \leq m-1} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0} / (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)^2 \text{ 独立.}$$

$$\text{これより, } \begin{cases} \tilde{F}(x, t) = F(x, t') + c_m t_m, & t' = (t_1, \dots, t_{m-1}) \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t_i}(0, 0) = 0, & i = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

と表す可以. たゞ $i=0$, (4.1.1)~(4.1.4) より \tilde{F} は \mathbb{C}^m に座標系

(s_1, \dots, s_m) で表す可以. とて式が成立する.

$$\frac{\partial s_i}{\partial t_m} = 0, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad \frac{\partial s_m}{\partial t_m} = c_m \neq 0$$

適当な代表 $s \in \mathbb{C}^m$, $X = \{(x, t) \mid \tilde{F}(x, t) = 0\}$, $S = \{t\}$

$T = \{(t')\}$ とすると, $\text{map } \varphi, p: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ とする.

$$\varphi: X \rightarrow S \quad (x, t') \mapsto (t', -\frac{1}{c_m} F(x, t'))$$

$$p: S \rightarrow T \quad (t', t_m) \mapsto (t')$$

Definition 4.2 1. $\Omega_{\varphi} = \varphi^*(\Omega_X / \sum_{i=1}^{m-1} dt_i \wedge \Omega_X + dF \wedge \Omega_X)$

2. $\Omega_{\varphi, T} : e_i = [\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t_i}(x, t) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n] \quad i=1, \dots, m$ と Ω_{φ} の

2. 生成元 ($T = \mathcal{O}_T$ -submodule) (度数 \rightarrow 既约多项式)

Definition 4.3 ([36]) Unfolding $X \rightarrow S$ is free if $\pi_1^{\text{et}}(X) \cong \pi_1^{\text{et}}(S)$.

$\Omega_{\mathcal{G}, T}$ is a \mathcal{O}_S -module ($\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{(1)}$), \mathcal{O}_T -free rank $m^2 + 3 = 2$.

($X \rightarrow S$ の versel で「 ± 12 」 free で「 ± 3 」 (前後))

$$Q_4 \approx 2 \text{ 元} \quad f_i = [g_i(x, t) dx] \quad (i=1, 2) \quad (x \in (-\pi, \pi), X \rightarrow T)$$

したがって、 $t =$ residue symbol (\equiv と) 内等式を走査子。(前序) (順序)

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \operatorname{Res}_{X/T} \left(\frac{g_1(x,t)}{2F}, \frac{g_2(x,t)}{2F} \right) \in \Omega_T.$$

Definition 4.4 rational double point \rightarrow free deformation

$X \rightarrow S \rightarrow T$ 为纤维丛的切线， S 为局部坐标。

system (t_1, \dots, t_m) is flat

$2T_2 + 4T_3 = 2 \{1,3\}$ (存在唯一性) (unique)

$$L = \sum \mathbb{C} e_i \subset \Omega_{q,T}, \quad e_i = \left[\frac{\partial F}{\partial t_i} dx \right], \quad i=1, \dots, m, \quad t_i \in \mathbb{R}$$

$\langle , \rangle : L \times L \rightarrow \mathcal{O}_T$ は、定数値非退化である。

(= ch 12 Vessel w/ $\bar{z} \neq 0$ free deformation \rightarrow this is (+/- \bar{z} or 0))

Theorem 4.5 (E36) : The Coxeter group of type $E_3(3)$

so it, "It's a free deformation" $X \rightarrow S$ or $\pi_2(S)$, is?

$$2t = 3 \quad \text{if } t \in S \setminus \{t \mid q'(t) \text{ is singular}\}$$

$X \rightarrow S$ & discriminant set $\Sigma \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ Coxeter $\tilde{\Delta}$ o
discriminant Σ biholomorphic

2. flat coordinate system σ^1 to $(1, \sqrt{2})$, flat

generator system 213) - 題 4.3 . //

→構成の Coxeter system = folding → $\mathfrak{f}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{k}$ 」を±
 43. 表 3 は H, I と α が pre deformation ξ , flat coordinate
 system (S) に \mathfrak{k} を表す (3) .

Definition 4.6 Coxeter system (W, S) & Coxeter system (W', S') \vdash fold $\pm \eta_3$ $(\vdash \vdash (W, S) \sim (W', S'))$ $\vdash 12$:

F. $S = \bigsqcup S_i$ の各 i が \mathbb{Z} で生成する部分群 $S'_i = (S_i \text{ が } W \text{ を生成する部分群})$
 の長さ (最大 ∞) (存在する, $\Sigma \in \{12, 1d, 2\}$) と Σ' ,
 $\Sigma' = \{S'_i \mid S'_i \neq \text{id}\}$. Σ' が生成する W' の部分群を
 W'' と Σ'' と Σ' の Coxeter system とすと
 $(W'', \Sigma'') \cong (W', \Sigma')$. $\Sigma'' = \{\Sigma_i \mid \Sigma_i \text{ は } \Sigma \text{ の元} \}$, $\Sigma'' = \{S'_i \mid S'_i \text{ は } \Sigma \text{ の元} \}$,
 $(W', \Sigma') \cong (W, S)$. Σ'' は orthofolding と呼ぶ.

Theorem 4.7 ① $\mathbb{R}\mathbb{E}^n$ to PC Coxeter \mathcal{F} $\xrightarrow{\text{ortho}}$ folding is $\mathbb{F}_{\frac{1}{2}, \mathbb{Z}^n}$
 $\subset \mathbb{H}^3$. 1. root \mathcal{F} $\xrightarrow{\text{folding}}$ induces $\mathbb{F}_2 \in \mathcal{F}$ (i.e.,

$$A_{2\ell-1}, AB_\ell, D_{\ell+1} \curvearrowright C_\ell, E_6 \curvearrowright F_4, D_4 \curvearrowright G_2$$

$$2. \quad 2 \rightarrow \text{exceptional } \mathfrak{Z} \leftarrow \quad D_6 \curvearrowright H_3, \quad E_8 \curvearrowright H_4$$

3. Perfect folding $W \setminus I_2(h(w))$ $\cong \{h(w)\} \cup W - \text{Core}(h)$.

② $W \setminus W'$ が \mathbb{Z} , W は標準表現空間 V の部分空間

³¹ V' が走り、 W' は V' に標準基化で作用して、 $\varphi_{V'}$ は

$$S(V^*)^{W'} \cong S(V^*)^W / (V' \subseteq 0 \in \text{33 不式})$$

従って、正交法線 $W \approx W'$ は「 \perp 」、 W'' deformati-

a parameter space S_W a subspace $S_{W'}$ $\cong \mathbb{R}^3$.

$\cong \text{def} = L'$ unfolding $X_W \rightarrow S_W$ &

$W \not\equiv t^2 L$, $X_{W'} \rightarrow S_{W'}$ & if so,

\cong in W' type $\xrightarrow{\text{unfolding}}$ free deformation $L' \not\equiv L$

Proposition 4.8 L is not \mathbb{Z}^n , flat

Coordinate system $s \in \mathbb{K}^3$ linear

Subspace $\in L_W$, $L_W \cong \mathbb{Z}^4$; $\text{def} \in \mathbb{K}^2$ $L_{W'} \hookrightarrow L_W$

is linear embedding $\mathbb{Z}^n \not\cong \mathbb{Z}^m$.

Example 4.9 $E_6 \rightarrow$ flat coordinate system $(s_i)(F_4)$.

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{E_6}(x, s) = & x^4 + y^3 + s_2 x^2 y + s_5 x y + (s_6 - \frac{1}{24} s_2^3) x^2 + (s_8 + \frac{1}{4} s_2 s_6 - \frac{1}{576} s_2^4) y \\ & + (s_9 - \frac{1}{12} s_2^2 s_5) x + s_{12} - \frac{1}{24} s_2^2 s_8 + \frac{1}{8} s_6^2 - \frac{1}{288} s_2^3 s_6 - \frac{1}{24} s_2 s_5^2 \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{F_4} \text{ is } s_5 = s_9 = 0 \in \mathbb{Z}^2 \text{ if } L \not\cong L_W.$$

Example 4.10 $E_7 \rightarrow$ flat coordinate system $(s_i)([33])$

$$t_2 = s_2, t_5 = s_5, t_6 = s_6 - \frac{4}{9} s_2^3, t_8 = s_8 - \frac{4}{3} s_2 s_6 + \frac{1}{9} s_2^4, t_{10} = s_{10}$$

$$t_{12} = s_{12} - s_2 s_{10} - \frac{1}{6} s_2^2 s_8 - \frac{5}{6} s_6^2 + \frac{5}{9} s_2^3 s_8 - \frac{1}{3} s_2^6$$

$$t_{14} = s_{14} - \frac{1}{3} s_2 s_{12} - \frac{1}{3} s_6 s_8 + \frac{1}{18} s_2^3 s_8 + \frac{1}{6} s_2 s_6^2 - \frac{1}{54} s_2^4 s_6$$

$$\begin{aligned} t_{18} = & s_{18} - \frac{1}{3} s_2^2 s_{14} - \frac{2}{3} s_6 s_{12} - s_8 s_{10} + \frac{4}{3} s_2 s_6 s_{10} - \frac{1}{2} s_2^4 s_{10} - \frac{1}{3} s_2 s_8^2 \\ & + \frac{1}{3} s_2^2 s_8 s_8 + \frac{4}{27} s_6^3 - \frac{1}{9} s_2^3 s_6^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} s_2^6 s_6 + \frac{109}{2 \cdot 39} s_2^9. \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{E_7}(x, t) = -\frac{1}{3} (x^3 y + y^3) + t_2 x y^2 + t_6 y^2 + t_8 x y + t_{10} x^2 + t_{12} y + t_{14} x + t_{18}.$$

Example 4.11 $E_8 \rightarrow$ flat coörd. ([34]).

$$\tilde{F}_{E_8}(x, t) = -(\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} y^3) + t_1 x^3 y + t_4 x^2 y + t_6 x^3 + t_7 x y + t_9 x^2 + t_{10} y + t_{12} x + t_{15}.$$

$$t_1 = s_1, t_4 = s_4 - 2s_1^4, t_6 = s_6 - 2s_1^2 s_4 + \frac{6}{5} s_1^6, t_9 = s_9 - 2s_1 s_6 - \frac{2}{3} s_1^3 s_4 + \frac{19}{15} s_1^7$$

226

$$t_9 = s_9 - \frac{3}{2}s_1^2s_7 - s_1^2s_6 - \frac{3}{2}s_1s_4^2 + \frac{23}{5}s_1^5s_4 - \frac{28}{15}s_1^9$$

$$t_{10} = s_{10} - s_1s_9 - \frac{1}{2}s_1^3s_7 - s_4s_6 + \frac{3}{2}s_1^4s_6 + \frac{1}{2}s_1^2s_4^2 - \frac{2}{15}s_1^6s_4 - \frac{11}{45}s_1^{10}$$

$$\begin{aligned} t_{11} = & s_{12} - s_1^2s_{10} - \frac{4}{3}s_1^3s_9 - 2s_1s_4s_7 + \frac{12}{5}s_1^5s_7 - s_6^2 + 2s_1^2s_4s_6 - \frac{7}{30}s_1^6s_6 \\ & - \frac{1}{3}s_4^3 + \frac{7}{3}s_1^4s_4^2 - \frac{107}{30}s_1^8s_4 + \frac{82}{55}s_1^{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{15} = & s_{15} - s_1^3s_{12} - s_1s_4s_{10} + \frac{4}{5}s_1^5s_{10} - s_6s_9 + \frac{7}{15}s_1^6s_9 - \frac{1}{2}s_1s_7^2 + \frac{1}{2}s_1^2s_6s_7 \\ & - \frac{1}{2}s_4^2s_7 + \frac{5}{3}s_1^4s_4s_7 - \frac{29}{30}s_1^8s_7 + \frac{1}{2}s_1^3s_6^2 + \frac{1}{2}s_1s_4^2s_6 - \frac{43}{30}s_1^5s_4s_6 \\ & + \frac{14}{45}s_1^7s_6 + \frac{1}{3}s_1^3s_4^3 - \frac{43}{45}s_1^7s_4^2 + \frac{421}{450}s_1^{11}s_4 - \frac{103}{450}s_1^{15}. \end{aligned}$$

H_4 ~ flat coordinates, $s_2 = s_4 = s_7 = s_9 = s_{12} = 0$ \Rightarrow $t_2, t_4, t_7, t_9, t_{12}$.

§ 5. n.g.g.r. ($z=21$) — 錄映算

u.g.g.r. 12 Thm 1.7 ② $2^{\text{次}} \leq m_i \leq 4 \leq 11$.

不變式 $\prod_{i=1}^l d_i$ ~ 生或元 ~ 次數 $\leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_l = h$, $m_i = d_i - 1$.

discriminant \nrightarrow 不變式 \equiv logarithmic vector field X_1, \dots, X_e

\rightarrow weight + 1 $\leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_e \leq 3$.

Theorem 5.1 ([15]) $m_e < h-1 \Leftrightarrow m_i + m_{e+1-i} = h \Leftrightarrow$

ℓ 但 \rightarrow 錄映算 \nrightarrow 生或元 $\leq 4 \leq 11$. //

discriminant \nrightarrow Reduced \nrightarrow \nexists $d_i \in \mathbb{Z}$ s.t. $D = 0$ (i.e. \nexists 次數)

(weight $(d_1, \dots, d_e) \geq 12 \Rightarrow \ell + e$) $\nrightarrow d_i \in \mathbb{Z}$ ≤ 3 .

$$\frac{1}{d} \sum_{i=1}^l d_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{H(G)} \quad (i=1) \quad H(G) \in \mathbb{Z} \text{ 且 } 3. \quad (\text{定理})$$

Theorem 5.2. 1. $H(G)$ 12 但 \nrightarrow \nexists $d_i \in \mathbb{Z}$ ≤ 3 .

2. $H(G) \leq \max\{h, m_e + 1\}$.

3. $H(G) = \max\{h, m_e + 1, H(G)\} \Leftrightarrow G$ 12 ordr 2 \nrightarrow 錄映算 \nrightarrow 生或元 ≤ 4 .

吉屋光明 $t = \frac{2}{\ell} \sum n_i$ は、この事実を出します。

Theorem 5.3 1. t は自然数である

$$2. \quad t = h \quad \text{or} \quad n_e + 1.$$

→ 2つ目は、次の図はあります。(→ 2), がいたの問題

Proposition 5.4 $t = H \Rightarrow H = h$ on $m+1 \rightarrow$ No. 3 \leqslant 5

$\exists^{\prime\prime} \exists = \exists \forall H \exists$ maximal

$$2. H = h \Rightarrow t = H \quad \text{so } G(6, 2, 2) \cup \{H\} \subset \{1, 2, \dots, H\} \text{ is maximal}$$

$$3. H = \text{height} \Rightarrow t = H \rightarrow \text{No. 3 ist zu h, } H \text{ ist maximal}$$

以上 a Thm. 1, 5.2, 5.3, Prop 5.4 はオーバー今題に付いて示す。

±4 ≈ 113. 不要 $\frac{1}{n}$ h, n_{x+1}, H, t 12 ≈ 5 1 = 2 ≈ 4 ≈ 3.

(Coxeter 群は すべて 等しい。)

$\pm \gamma$, Vinberg [1] has defined a "Weyl graded Lie Algebra".

"group" 为二字词 (二字词), n.j.s.r. 为三字词, 为二字词, 为二字词, 为二字词。

第2行の $I = 0 \Rightarrow I^2 = 0 \Rightarrow z$, No. 13 で $\bar{z} = 3$ 。又、 $\bar{z} + 1 = \bar{z}$
 応じて deformation (i.e., discriminant が零のbiholo) は $\frac{1}{2}L$ ($L =$

U. J. g. n. 1 = > " 2 頭 1 に (色を身に付ける) ことがあります、

又～時今 1：ゆうす

§ 6. Flat. の不变式

G is Coxeter \mathbb{R}^3 . V^* a orthonormal basis $\{\vec{z}_1, -\vec{z}_2, \vec{z}_3\}$.

$G(E^{\text{good}}) \geq 1$, $P_1(z), \dots, P_k(z)$ 为 \mathbb{R}^n 中的子集.

Definition 6.1. 1. $P_1(\xi) = \xi_1^2 + \dots + \xi_e^2$

$$2. \quad \left\{ P(\xi) \mid P_i \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) P(\xi) = 0 \quad i=1, \dots, k \right\} \text{ a basis } \in$$

$P_{k+1}(z)$, $(P_{\frac{k}{2}}(z))$ and $P_{\frac{k}{2}+1}(z)$ if $G = D_l$ (l : even) $\not\in \mathcal{Z}$.

Theorem 6.2 ([11]) Definition 6.1 \Leftrightarrow $\exists k \in \mathbb{Z}^+$, $F = \sum_{i=1}^l \mathbb{C} P_i$

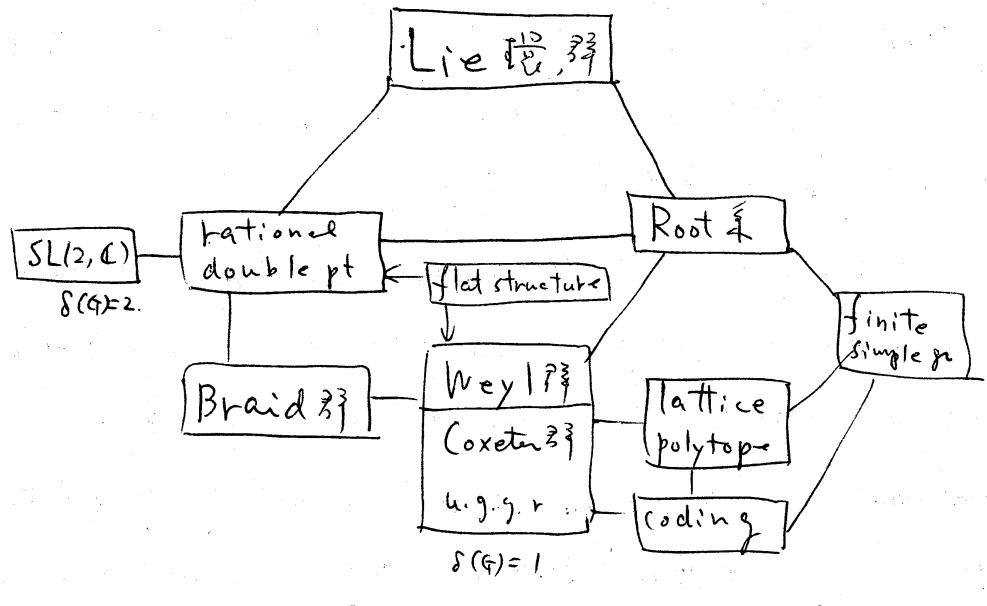
は unique $\Leftrightarrow \exists z$.

Remark 6.3 $P_i(z) \geq 2$ のとき $\delta(G) = i$ の場合と $\delta(G) > i$ の場合

具体的には $\delta(G) \geq 2 \Rightarrow \delta(G) + k \leq l < \delta(G) + 1$; たとえば, $\exists z$ が

flat invariants $\geq -\delta(G) + 2 \Rightarrow \delta(G) + 1 \leq l \leq \delta(G) + 2$ (即ち $l = \delta(G) + 1$)

§7. 根系図



目次

| | | | |
|--------------------------------------|----|----------------|----|
| § 0 12th talk | 1 | § 5 u.g.s.t. | 18 |
| § 1 有理雙点による不変式環 | 3 | § 6 Flatによる不変式 | 19 |
| § 2 Flat generator system | 5 | § 7 根系図 | 20 |
| § 3 Brieskorn Stanley Kostant 生成系 | 8 | § 8 表 1 ~ 5 | 21 |
| § 4 Flat 座標系 system Free deforma- | 14 | References | |

§ 8.

$$f_{A_\ell} = x^{\ell+1} + yz, \quad f_{D_\ell} = x^{\ell-1} - xy^2 + z^2,$$

$$f_{E_6} = x^4 + y^3 + z^2, \quad f_{E_7} = x^3y + y^3 + z^2,$$

$$f_{E_8} = x^5 + y^3 + z^2.$$

$$\tilde{F}_{A_\ell} = f_{A_\ell} + \sum_{i=2}^{\ell+1} t_i x^{\ell+1-i}, \quad \tilde{F}_{D_\ell} = f_{D_\ell} + \sum_{i=1}^{\ell-1} t_{2i} x^{\ell-1-i} + 2t_\ell y,$$

$$\tilde{F}_{E_6} = f_{E_6} + t_2 x^2 y + t_5 xy + t_6 x^2 + t_8 y + t_9 x + t_{12},$$

$$\tilde{F}_{E_7} = f_{E_7} + t_2 xy^2 + t_6 y^2 + t_8 xy + t_{10} x^2 + t_{12} y + t_{14} x + t_{18},$$

$$\tilde{F}_{E_8} = f_{E_8} + t_2 x^3 y + t_8 x^2 y + t_{12} x^3 + t_{14} xy + t_{18} x^2 + t_{20} y + t_{24} x + t_{30}.$$

Ex 1. rational double points & versal deformation.

$$B_\ell \quad f_{A_{2\ell-1}} + t_2 x^{2\ell-2} + t_4 x^{2\ell-4} + \dots + t_{2\ell}$$

$$C_\ell \quad f_{D_{\ell+1}} + t_2 x^{\ell-1} + t_4 x^{\ell-2} + \dots + t_{2\ell}$$

$$F_4 \quad f_{E_6} + t_2 x^2 y + t_6 x^2 + t_8 y + t_{12}$$

$$G_2 \quad x^3 + y^3 + t_2 xy + t_6 \quad (D_4 \text{ is sub})$$

$$BC_\ell \quad f_{A_{2\ell}} + t_2 x^{2\ell-1} + t_4 x^{2\ell-3} + \dots + t_{2\ell} x$$

Ex 2 A D E LK3L root 1 = 对应 3 deformation.

$$H_3 \quad f_{D_6} + s_2 x^4 + \frac{7}{20} s_2^2 x^3 + (s_6 + \frac{1}{20} s_2^3) x^2 + (\frac{3}{10} s_2 s_6 + \frac{1}{400} s_2^4) x \\ + (s_{10} + \frac{1}{100} s_2^2 s_6 + \frac{1}{5000} s_2^5) + \frac{1}{15} s_6 y.$$

$$H_4 \quad -(\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} y^3) + s_2 x^3 y - 2s_2^4 x^2 y + (s_{12} + \frac{6}{5} s_2^6) x^3 \\ + (-2s_2 s_{12} + \frac{19}{15} s_2^7) x y + (-s_2^3 s_{12} - \frac{28}{15} s_2^9) x^2 + (s_{20} + \frac{3}{2} s_2^4 s_{12} \\ - \frac{11}{45} s_2^{10}) y + (-s_2^2 s_{20} - s_{12}^2 - \frac{7}{30} s_2^6 s_{12} + \frac{82}{75} s_2^{12}) x + s_{30} \\ + \frac{4}{5} s_2^5 s_{20} + \frac{1}{2} s_2^3 s_{12}^2 + \frac{14}{45} s_2^9 s_{12} - \frac{103}{450} s_2^{15}.$$

$$\begin{aligned} I_2(2k+1) &= f_{A_{2k}} + \sum_{j=1}^k \frac{(2k+2-2j, j-1)}{j! (2k+1)^{j-1}} s_2^j x^{2k+1-2j} + s_{2k+1} \\ I_2(2k)_A &= f_{A_{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2k+1-2j, j-1)}{j! (2k)^{j-1}} s_2^j x^{2k-2j} + s_{2k} + \frac{s_2^k}{k(2k)^{k-1}} \\ I_2(2k)_D &= f_{D_{k+1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2k+1-2j, j-1)}{j! (2k)^{j-1}} s_2^j x^{k-j} + s_{2k} + \frac{s_2^k}{k(2k)^{k-1}} \end{aligned}$$

$$I_2(12)_E = f_{E_6} + s_2 x^2 y - \frac{1}{24} s_2^3 x^2 - \frac{1}{576} s_2^4 y + s_{12}$$

$$I_2(18)_E = -\frac{1}{3} (x^3 y + y^3) + s_2 x y^2 - \frac{4}{9} s_2^3 y^2 + \frac{1}{9} s_2^4 x y - \frac{1}{81} s_2^6 y + \frac{179}{239} s_2^9$$

$$\begin{aligned} I_2(30)_E &= -\frac{1}{5} (x^5 + y^3) + s_2 x^3 y - 2s_2^4 x^2 y + \frac{6}{5} s_2^6 x^3 + \frac{19}{15} s_2^7 x y - \frac{28}{15} s_2^9 x^2 \\ &\quad - \frac{11}{45} s_2^{10} y + \frac{82}{75} s_2^{12} x + s_{30} - \frac{103}{450} s_2^{30} \end{aligned}$$

表 3. H, I 型の free deformation.

| | | discriminant. |
|------------------|--|---|
| \bullet | $G(r, 1, l)$ | $f_{A_{rl}} + t_r x^{r(r-1)} + t_{2r} x^{r(r-2)} + \dots + t_{lr}$ B _r |
| \bullet | $G(r, 2, l)$ | $f_{D_{\frac{rl}{2}}} + t_r x^{\frac{r(r-1)-1}{2}} + \dots + t_{r(l-1)} x^{\frac{r}{2}-1} + 2t_{\frac{rl}{2}} y$ C ₂ |
| No. 4 | $f_{A_{r-1}}$ | $+ t_r$ $t' \Delta_r (1, t_r, \dots, t_{r(l-1)}, t'^2)$ A ₁ |
| No. 4 | $x^3 + y^3 + t_4 x + t_6$ | A ₂ |
| 5 | $f_{E_6} + t_6 x^2 + t_{12}$ | B ₂ |
| 8 | $f_{E_6} + t_8 y + t_{12}$ | A ₂ |
| 16 | $f_{E_8} + t_{20} y + t_{30}$ | A ₂ |
| 20 | $f_{E_8} + t_{12} x^3 + \frac{1}{5} t_{12}^2 x + t_{30}$ | $I_2(5)$ |
| 25 | $f_{E_6} + t_6 x^2 + t_9 x + t_{12}$ | A ₃ |
| 26 | $f_{E_7} + t_6 y^2 + t_{12} y + t_{18}$ | C ₃ |
| 32 | $f_{E_8} + t_{12} x^3 + t_{18} x^2 + t_{24} x + t_{30}$ | A ₄ |
| <u>31</u> | $f_{E_8} + t_8 x^2 y + t_{12} x^3 + t_{20} y + t_{24} x$ | (?) |

$$9 \quad f_{F_8} + t_8 x^2 y + t_{24} x \quad G_2$$

$$10 \quad f_{E_8} + t_{12} x^3 + t_{24} x \quad B_2$$

$$12 \quad f_{E_6} + t_6 x^2 + t_8 y + \frac{1}{8} t_6^2 \quad (t_{18}/3)^3 + (t_{16}/4)^4$$

$$22 \quad f_{E_8} + t_{12} x^3 + t_{20} y + \frac{1}{5} t_{12}^2 x \quad (t_{20}/3)^3 - (t_{12}/5)^5$$

$\frac{1}{2} 4$ u.g.g.r. \rightarrow 3 deformation

| No. | $\frac{r}{h}$ | $n+1$ | H | No. | Type | $\frac{r}{h}$ | $n+1$ | H | $\frac{2n}{h}$ | e | b.d. |
|-----|---------------|-------|-----------|----------------|-------|---------------|------------|-------------|----------------|----------------------------------|-------------------|
| 3 | r | 2 | $= 2 t_2$ | 23 | H_3 | 10 | 10 | 10 | 10 | • | |
| 4 | 6 | 4 | 3 | 24 | | 14 | 12 | 14 | 14 | | |
| 5 | 12 | 8 | 4 | 25 | | 12 | 8 | 4 | 8 | • | |
| 6 | 12 | 10 | 6 | 26 | | 18 | 14 | 6 | 14 | • | |
| 7 | 12 | 14 | 6 | 27 | | 30 | 26 | 30 | 30 | | |
| 8 | 12 | 6 | 3 | 28 | F_4 | 12 | 12 | 12 | 12 | • | |
| 9 | 24 | 18 | 6 | 29 | | 20 | 18 | 20 | 20 | | |
| 10 | 24 | 14 | 4 | 30 | H_4 | 30 | 30 | 30 | 30 | • | |
| 11 | 24 | 26 | 6 | 31 | x | 24 | 30 | 30 | 30 | • | |
| 12 | 8 | 12 | $= 12$ | 32 | | 30 | 20 | 5 | 20 | • | |
| 13 | 12 | 18 | $= 18$ | 33 | | 18 | 16 | 18 | 18 | | |
| 14 | 24 | 20 | 8 | 34 | | 42 | 38 | 42 | 42 | | |
| 15 | 24 | 26 | 10 | 35 | E_6 | 12 | 12 | 12 | 12 | • | |
| 16 | 30 | 12 | 3 | 36 | E_7 | 18 | 18 | 18 | 18 | • | |
| 17 | 60 | 42 | 6 | 37 | E_8 | 30 | 30 | 30 | 30 | • | |
| 18 | 60 | 32 | 4 | 1 | A_2 | $l+1$ | $l+1$ | $l+1$ | $l+1$ | • | |
| 19 | 60 | 62 | 6 | $G(r, l, 2)$ | | lr | $(l-1)r+2$ | 2 | $(l-1)r+2$ | • | $r \geq 2$ |
| 20 | 30 | 20 | 5 | $G(r, 2, l)$ | x | 6 | 8 | 6 | 8 | • | |
| 21 | 60 | 50 | 10 | $G(r, l/2, l)$ | x | $(l-1)r$ | $(l+r)r+2$ | $4(l-1)r+2$ | $(l-1)r+2$ | • | $r \geq 6$ |
| 22 | 20 | 30 | $= 30$ | $G(r, p, l)$ | x | $(l-1)r$ | $(l-1)r+2$ | $2(l-1)p+2$ | $(l-1)r+2$ | $(l-1)3 \leq p \leq \frac{r}{2}$ | |
| | | | | $G(r, r, l)$ | • | $(l-1)r$ | $(l-2)r+2$ | $(l-1)r$ | $(l-1)r$ | $(l-1)r$ | $l \geq r \geq 2$ |
| | | | | | | $(l-1)r$ | $(l-1)r+1$ | $(l-1)r$ | $(l-1)r$ | $(l-1)r$ | $2 \leq l < r$ |

$\frac{1}{2} 5$ u.g.g.r. \rightarrow 2 invariants

Classical works

- [1] F.Brioschi: Sulla risoluzione delle equazioni di quinto grado, Annali di Math., SerI, 1(1858), 256-259.
- [2] G.Racah: Sulla caratterizzazione delle rappresentazioni..., Rend.Circ.Mat.Palermo, 8(1950), 108-113.
- [3] H.S.M.Coxeter: The product of generators of a finite groups generated by reflections, Duke Math., 18(1951), 765-782.
- [4] J.S.Frame: The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents, Annali di Math., 32(1951), 83-119.
- [5] G.C.Shephard and J.A.Todd: Finite unitary reflection groups, Can.J.Math., 6(1954), 274-304.
- [6] C.Chevalley: Invariants of finite groups generated by reflections, Amer.J.Math., 77(1955), 778-772.
- [7] A.J.Coleman: The Betti numbers of the simple groups, Canad. J.Math., 10(1958), 349-356.
- [8] R.Steinberg: Finite reflection groups, Trans.Amer.Math. Soc., 91(1959), 493-504.
- [9] " : Invariants of finite reflection groups, Canad.J. Math., 12(1960), 616-618.
- [10] L.Solomon: Invariants of finite reflection groups, Nagoya M.J., 22(1963), 57-64.

Nowadays

- [11] L.Flatto: Invariants of finite reflection groups and mean value problems II, Amer.J.Math., 92(1970), 552-561.
- [12] R.P.Stanley: Relative invariants of finite groups generated by pseudoreflections, J.Alg., 49(1977), 134-148.
- [13] L.Flatto: Invariants of finite reflection groups, L'Enseignement math., 24(1978), 237-292.

[14] T.A.Springer: Regular elements of finite reflection groups, *Inventiones Math.*, 25(1974), 159-198.

[15] P.Orlik and L.Solomon: Unitary reflection groups and Cohomology, *Inventiones Math.*, 59(1980), 77-94.

Logarithmic vector fields

[16] K.Saito: Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, *J.Fac.Sci.Univ.Tokyo*, (1980),

[17] V.I.Arnold: Wave front evolution and equivalent Morse lemma, *Commu.P.Appl.Math.*, 29(1976), 557-582.

[18] Yano T., Sekiguchi J.: Coxeter groups ni fuzui suru weighted homogeneous polynomial no microlocal structrue (with an Appendix on $GL(2)$), *RIMS Kokuroku* 281, 1975, 40-105.

[19] J.Sekiguchi and T.Yano: The algebra of invariants of the Weyl groups $W(F_4)$, *Sci.Rep.Saitama Univ.Ser.A* 9(1979), 21-32.

[20] J.Sekiguchi and T.Yano: A note on the Coxeter group of type H_3 , *Sci.Rep.Saitama Univ.Ser.A* 9(1979), 33-44.

[21] T.Yano and J.Sekiguchi: Microlocal structrue of weighted homogeneous polynomials associated with finite Coxeter groups, I, *Tokyo J.Math.* 2(1979), 193-220.

[22] " and " : " ,II, *Tokyo J.Math.* (1981), to appear. to appear.

[23] T.Yano: On a generator system of $W(E_7)$ invariant ring,

[24] A.B.Guivalent': Displacement of invariants of groups that are generated by reflections and are connected with simple singularities of functions, *Functional Anal.Appl.* 14 (1980), 81-89.

Singularities, Lie algebras

- [25] V.I.Arnold: Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and the Lagrangean singularities, Functional Anal.Appl.6(1972),3-25.
- [26] " : Critical points of functions on a manifold with boundary , the simple Lie groups B_k, C_k, F_4 and singularities of the evolutes, Uspehi Mat.Nauk 33(1978),91-105.
- [27] " : Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, displacement of invariants of groups, generated by reflection and singular points of projections of smooth surfaces, Uspehi Mat.Nauk 34(1979),3-38.
- [28] E.Brieskorn: Singular elements of semi-simple algebraic groups, Actes Congres Intern.Math. 1970, t.2,279-284.
- [29] P.Slodowy: Simple singularities and simple algebraic groups, Lecture Note in Math., 815
- [30] J.Sekiguchi: logarithmic vector fields along the discriminant set of a Weyl group, submitted to J.Math.Soc.Japan.
- [31] H.Terao: Free arrangement of hyperplanes,

Flat coordinate system

- [32] K.Saito,T.Yano and J.Sekiguchi: On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group, Comm. in Algebra 8(1980),373-408.
- [33] T.Yano: Flat coordinate system of type E_7 , to appear in Proc. Japan Acad.

- [34] M.Kato and S.Watanabe: Flat coördinate system for the
versal deformation of rational double point of type E_8 , to appear.
- [35] K.Saito: On a linear structure of a quotient variety by
a finite reflection group, Preprint RIMS-288, Res.Ins.Math.Sci.
Kyoto Univ., accepted with proviso by Commun. in Algebra.
- [36] T. Yano: Free deformations of isolated singularities, Sci.
Rep.Saitama Univ.Ser A 9(1980),61-70.
- [37] T.Yano and M.Kato: Free deformations of simple elliptic
singularities, Sci.Rep.Saitama Univ.Ser A 9(1980),71-79.
- [38] T.Yano: Deformation of isolated singularities and folding
of Coxeter systems, in preparation.
- [39] T.Yano: Deformations of rational double points associated
with unitary reflection groups, Sci.Rep.Saitama Univ.Ser A 10(1981).