

When is a local homeomorphism between
continua a homeomorphism?

広島大 総合科学部 富永晃

要約 位相空間 X から位相空間 Y への写像 $f: X \rightarrow Y$ が、
次の条件 (*) をみたすとき、 X から Y への 局所同相写像
(local homeomorphism) とよぶ:

(*) 任意の点 $x \in X$ に対して、その適当な開近傍 U をと
れば、 $f(U)$ は Y における開集合で、 f の U への制限 $f|_U:$
 $U \rightarrow f(U)$ は同相写像 (homeomorphism) である。

このとき如何なる条件のもとで f が同相写像になるか、換言
すれば方程式 $y = f(x)$ ($x \in X, y \in Y$) が一意解をもつかと
いう問題は古くからのものである。

§1 では X, Y が主としてコンパクト連結距離空間すなわ
ち 連続体 (Continuum) の場合にこの問題に関する従来の成
果について略述する。§2 では連続体上に被覆空間論の手法
を適用するため、弧および正方形に対応するものとして、そ
れぞれ chain および net について考察し、これにより Lau

の定理 (§1 (12)) で、条件 *onto* を除いた類似の定理を証明する。これは *Rosenholtz* の問題 (§2) に適用できる。

§1 小史 この節では、標題の問題に関する従来の主な成果を觀みよう。 $f: X \rightarrow Y$ を X から Y の上への局所同相写像とすると、 X, Y, f が以下に示す条件をみたせば、 f は同相写像になる。

(1) *S. Eilenberg* (1934 [5], Théorème III, P. 42)

$X =$ 弧状連結 (arcwise connected) 連続体

$Y =$ 単連結連続体

(2) *S. Banach; S. Mazur* (1934 [1], Satz II, P. 177)

$X =$ 連結距離空間

$Y =$ 局所弧状連結・単連結距離空間

$f =$ proper 局所同相写像

ここで f が proper であるとは、 Y の任意のコンパクト部分集合 K の逆像 $f^{-1}(K)$ がコンパクトであることをいう。

(3) *G. T. Whyburn* (1942 [18], Corollary, P. 199)

$X =$ 連続体

$Y =$ dendrite (= 局所連結で単純閉曲線を含まない連続体 = 局所連結で hereditarily unicoherent な連続体)

(4) G. T. Whyburn (同上)

$X =$ dendrite

$Y =$ 連続体

(5) T. Maćkowiak (1973 [13], Theorem 9, p. 857)

$X =$ 連続体

$Y =$ λ -dendroid (= hereditarily decomposable · hereditarily unicoherent 連続体)

(6) T. Maćkowiak (同上, Corollary 10, p. 858)

$X =$ λ -dendroid

$Y =$ 連続体

Maćkowiak は (5) から (6) を, λ -dendroid の開写像による像は λ -dendroid である ([4] VI, p. 214; XIV, p. 217) ことを用いて導いた。

(7) I. Rosenholtz (1974 [17], Theorem 20, p. 261)

$X =$ arc-like 連続体 (= chainable 連続体 = snake-like 連続体)

$Y =$ 連続体

(8) C. W. Ho (1975 [9], Theorem 2, p. 240)

$X =$ 弧状連結ハウスドルフ空間

$Y =$ 単連結ハウスドルフ空間

$f =$ proper 局所同相写像

(9) T. Maćkowiak (1977 [14], Theorem, P. 64)

$X =$ 連続体

$Y =$ tree-like 連続体

(10) T. Maćkowiak (同上, Corollary, P. 67)

$X =$ tree-like 連続体

$Y =$ 連続体

Maćkowiak は, (9) から (10) を, tree-like 連続体の開写像による像は tree-like である ([15], Corollary 2.3, P. 472) を用いて導いた。

(11) A. Lau (1978 [11], Theorem 2, P. 316; 1979 [12], Theorem, P. 384)

$X =$ 連続体

$Y =$ simple limit

ここで Y が simple limit であるとは, Y は連続体であって, bonding maps f_{ij} が onto であるような, 単連結・局所連結連続体 Y_i の射影的極限 (inverse limit) であることをいう。すなわち $Y = \varprojlim \{Y_i, f_{ij}\}$ 。

(12) A. Lau (1979 [12], Main Theorem, P. 382)

$X =$ simple limit で, しかも X 上には

(**) 位数が素数である如何なる群も自由には作用しない。

$Y =$ 連続体

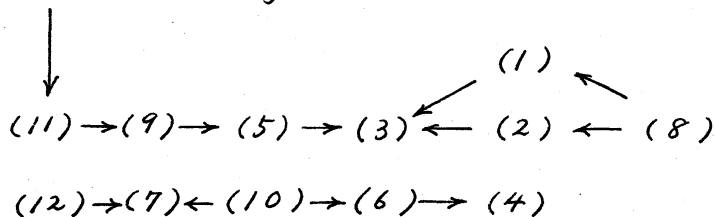
逆に X が *simple limit* のとき, X を他の空間上にうつす任意の局所同相写像が同相写像であるためには (***) が成り立たねばならない。

ここで X に作用する群を G とするとき, それが 自由に (*freely*) 作用するとは, 単位元と異なる任意の元 $g \in G$ は不動点をもたないこと, すなわち $g(x) = x$ なる $x \in X$ が存在しないことである。

注意 1 (12) で, X が同相写像に関して不動点性をもつとき, すなわち X から自身の上への任意の同相写像 h に対して $h(x) = x$ なる $x \in X$ が存在するとき, X から他の空間の上への任意の局所同相写像は同相写像である。実際, 位数が素数である有限群 H が X 上に作用するとして, その単位元と異なる元は X 上の同相写像だから不動点をもつ。すなわち H は自由に作用しない。

注意 2 (1) ~ (12) の相互関係は次のようになる。ただし $A \rightarrow B$ は A から B が導かれることを意味する。

Fox's overlay Theorem ([6], (6.1), P. 64)



(11) \rightarrow (9) は, λ -dendroid は *tree-like* であること, し

がって trees の射影的極限であることと, λ -dendroid が不動点性をもつことからいえる。(9) \rightarrow (5) \rightarrow (3), (10) \rightarrow (6) \rightarrow (4) は tree-like 連続体 \leftarrow λ -dendroid \leftarrow dendrite から, そして (12) \rightarrow (7) は tree-like 連続体 \leftarrow arc-like 連続体かつ arc-like 連続体は不動点性をもつことからいえる。

(12) \rightarrow (10) が成り立つかどうかは今のところ分らない。

注意 3 X, Y がコンパクトでない場合, とくに R^n のとき [8], [3], [16], [7], [2] を, 他の参考文献名については [10] 参照。

§2 定理 この節では, まず被覆空間論の手法を連続体に適用するのに便利と思われる chain と net について述べる。これらはそれぞれ弧と正方形に対応するものである。次にこれによって Lau の定理 (§1 (12)) における "bonding maps は onto とする" という条件を除いた類似の定理を証明する。この定理は, 平面を分離しない連続体のある空間上にうつす局所同相写像は同相写像か, を問う Rosenholtz の問題 ([17], Question 4, p. 262) に適用できる。したがって Lau の方法 ([12], p. 384) によって, この問題は肯定的解をもつ。

定理 $X = \bigcap X_i$ を, 単連結・局所連結連続体 X_i の単調減少列 $X_1 \supset X_2 \supset \dots$ の共通集合である連続体とする。 X から他の空

面の上への任意の局所同相写像が同相写像であるための必要十分条件は、位数が素数である如何なる群も X 上に自由には作用し得ないことである。

補題3が証明の *key lemma* である。

定義 距離空間 M の点 a から b に至る δ -chain とは、順序付けられた点列

$$\alpha = \{ a = x_1, x_2, \dots, x_\ell = b \}$$

で、 $d(x_i, x_{i+1}) < \delta$ ($1 \leq i < \ell$) なるものをいう。 a を 始点、 b を 終点 といい。 $a = b$ のとき a を基点にとつ δ -loop といい。 $\beta = \{ x_\ell, x_{\ell+1}, \dots, x_m \}$ のとき、 $\{ x_1, \dots, x_\ell, \dots, x_m \}$ を $\alpha\beta$ とかく。 $\alpha^{-1} = \{ x_\ell, \dots, x_2, x_1 \}$ とする。 次の δ -net とは有限点集合 $\{ x_{ij} : 1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m \}$ で、かつ $\text{diam} \{ x_{ij}, x_{i,j+1}, x_{i+1,j}, x_{i+1,j+1} \} < \delta$ ($1 \leq i < \ell, 1 \leq j < m$) なるものである。 δ -loop $\alpha = \{ a_1, a_2, \dots, a_\ell = a_1 \}$ に対し、 $x_{i1} = a_i, x_{ij} = x_{im} = x_{\ell j} = a_1$ ($1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m$) なる δ -net $\{ x_{ij} : 1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m \}$ が存在するとき、 α は M にあいて δ -homotopic to zero といって $\alpha \simeq 0(\delta)$ とかく。

X, Y を連続体、 $f: X \rightarrow Y$ を X から Y の上への局所同相写像とする。このとき記号 $\nu, \mathcal{U}, \varepsilon, \mu, \nu, \varepsilon$ を次のように定める。

\mathcal{V} = 次の如き Y の開被覆: $V \in \mathcal{V}$ に対し X の互いに交わらない開集合族 $\mathcal{C}(V) = \{E_1, \dots, E_k\}$ で, $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^k E_i$ かつ $f|E_i: E_i \rightarrow V$ ($1 \leq i \leq k$) が E_i から V の上への同相写像となるようなものがある.

\mathcal{U} = X の開被覆 $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{C}(V)$, ε = \mathcal{V} の Lebesgue 数,

μ = \mathcal{U} の mesh, ν = \mathcal{U} の Lebesgue 数,

λ = 正数で, $A \subset X$, $\text{diam}(A) < \lambda$ ならば $f|A: A \rightarrow f(A)$ は同相写像となるようなもの.

$\beta = \{b_1, \dots, b_l\}$ を, 各 $\{b_i, b_{i+1}\}$ が \mathcal{V} の 1 つの元 V_i に含まれるような Y 内の chain とする. X 内の chain $\alpha = \{a_1, \dots, a_l\}$ が, $f(a_i) = b_i$ で, $\{a_i, a_{i+1}\}$ が $\mathcal{C}(V_i)$ の 1 つの元に含まれるとき, α は β を cover する, あるいは α は β の lifting であるという.

次の補題 1, 2 の証明は容易である.

補題 1 β を, $y \in Y$ を始点とする ε -chain とし, $f(x) = y$ とする. $\mu < \lambda/2$ ならば, x を始点とし β を cover するただ 1 つの chain が存在する.

補題 2 β, β' を, 共に y から y' への Y 内の chains で, $\beta \beta'^{-1} \simeq 0(\varepsilon)$ をみたすものとする. また α, α' を $f(x) = y$ なる $x \in X$ を始点とし β, β' を cover するものとする. もし $\mu < \lambda/2$ ならば, α, α' は同じ終点をもつ. したがって

ε -homotopic to zero である loop の lifting は loop である。

次の補題 3 を示せば, 定理は Lau のそれと同様に証明される。

補題 3 X を定理の連続体とし, $f: X \rightarrow Y$ を X から空間 Y の上への局所同相写像とする。 a, b を $f(a) = f(b)$ である X の点とすると, $g(a) = b$ なる X からそれ自身の上への同相写像 $g: X \rightarrow X$ で, $f \circ g = f$ をみたすものがある。

証明 (1) $\mu < \lambda/2$ とする。

(2) $\tau_0 > 0$ を, $\text{diam}(A) < \tau_0$ なる X の部分集合 A に対し $\text{diam}(f(A)) < \varepsilon$ がなりたつようにえらぶ。

$X = \bigcap X_n$ だから, X の $\tau_0/4$ 近傍に含まれるような X_n がある。

(3) $\delta > 0$ を, $d(z, z') < \delta$ なる $z, z' \in X_n$ は X_n 内で直径 $< \tau_0/2$ の弧で結べるようにとる。これは X_n が局所連結でコンパクトだから可能となる。

(4) $\tau > 0$ を, $\tau \leq \min\{\tau_0, \delta\}$ かつ α が X 内の τ -chain なら, $f(\alpha)$ の任意の lifting は δ -chain となるようにとる。

そこで $g: X \rightarrow X$ を次のように定義する: $x \in X$ に対し, a と x を τ -chain で結ぶ。(4) と (2) から $f(\alpha)$ は Y 内の ε -chain である。 ε は μ の Lebesgue 数だから, (1) と補題 1 より $f(\alpha)$ を, b を始点とする X 内の chain α' に一意的に lift でき

る。 α' の終点を $g(x)$ とする。明らかに $f \circ g = f$ である。

次に g が well defined であることを示そう。 $\alpha = \{a = x_1, x_2, \dots, x_\ell = x\}$, $\alpha' = \{a = x_{\ell+m}, x_{\ell+m-1}, \dots, x_\ell = x\}$ を a と x を結ぶ X 内の τ -chain とし, α_k を x_k と x_{k+1} を結ぶ $\text{diam}(\alpha_k) < \tau_0/2$ なる X_n 内の弧とする (cf. (3), (4)).

閉曲線 $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{\ell+m-1}$ の parametrization を

$$\psi : I = [0, 1] \rightarrow \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{\ell+m-1}$$

とすれば, X_n が単連結だから, 連続写像 $F : I \times I \rightarrow X_n$ で

$$\begin{cases} F(s, 0) = \psi(s), & (0 \leq s, t \leq 1) \\ F(s, 1) = F(0, t) = F(1, t) = a, \end{cases}$$

をみたすものがある。さらに次のような数列 $\{s_i\}, \{t_j\}$ を見出し得る: $0 = s_1 < s_2 < \dots < s_p = 1$, $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_q = 1$, $\text{diam} \{z_{ij}, z_{i,j+1}, z_{i+1,j}, z_{i+1,j+1}\} < \tau_0/2$ ($z_{ij} = F(s_i, t_j)$) かつ $0 = s_{i(1)} < \dots < s_{i(k)} < \dots < s_{i(\ell+m)} = 1$, $z_{i(k),1} = x_k$ なる部分列 $\{s_{i(k)}\}$ がある。

$x_{ij} \in X$ を, $d(x_{ij}, z_{ij}) < \tau_0/4$, $x_{i0} = x_{i1} = x_{ip} = a$ ($0 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$), $x_{i(k),1} = x_k$ ($1 \leq k \leq \ell+m$) とするようにならば。すると $\{x_{ij}\}$ は X 内の τ_0 -net で, $\{f(x_{ij})\}$ は Y 内の ε -net となる。そこで

$$\beta = \{f(a) = f(x_{11}), f(x_{21}), \dots, f(x_{i(\ell+m),1}) = f(x)\},$$

$$\beta' = \{f(a) = f(x_{p1}), f(x_{p-1,1}), \dots, f(x_{i(\ell+m),1}) = f(x)\}$$

とあけば, $\beta\beta'^{-1} \simeq 0(\varepsilon)$ となる. したがって始点が a である β, β' の *liftings* は, 補題 2 によって同じ終点 $f(x)$ をもつ.

f が X をそれ自身の上への同相写像であることは容易に示し得る.

定理の証明は, Lau のそれ ([12], p. 383) に準ずる.

References

- [1] Banach, S. and S. Mazur: Über mehrdeutige stetige Abbildungen, *Studia Math.* 5 (1934), 174 - 178.
- [2] Borel, A. and J. P. Serre: Impossibilité de fibrer un espace euclidien par des fibres compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 230 (1950), 2258 - 2260.
- [3] Cartan, H.: Sur les transformations localement topologiques, *Acta Litt. Sci. Szeged*, 6 (1933), 85 - 104.
- [4] Charatonik, J. J.; Confluent mappings and unicoherence of continua, *Fund. Math.*, 56 (1964), 213 - 220.
- [5] Eilenberg, S.: Sur quelques propriétés des transformations localement homéomorphes, *Fund. Math.* 24 (1934), 35 - 42.
- [6] Fox, R. H.: On shape, *Fund. Math.* 74 (1972), 47 - 71.
- [7] Gordon, W. B.: On the diffeomorphisms of Euclidean space, *Amer. Math. Monthly* 79 (1972), 755 - 759.

- [8] Hadamard, J.: Sur les transformations ponctuelles, Bull. Soc. Math. France 34 (1906), 71 - 84.
- [9] Ho, C. W.: A note on proper maps, Proc. Amer. Math. Soc. 51 (1975), 237 - 241.
- [10] Jungck, G. F.: Local homeomorphisms, Dissertation, 1977.
- [11] Lau, A.: Certain local homeomorphisms of continua are homeomorphisms, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (1978), 315 - 317.
- [12] ——— : Certain local homeomorphisms of continua are homeomorphisms.II, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 27 (1979), 381 - 384.
- [13] Maćkowiak, T.: A note on local homeomorphisms, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 21 (1973), 855 - 858.
- [14] ——— : Local homeomorphisms onto tree-like continua, Colloq. Math. 38 (1977), 63 - 68.
- [15] McLean, T. B.: Confluent images of tree-like curves are tree-like, Duke Math. J. 39 (1972), 465 - 473.
- [16] Palais, R. S.: Natural operations on differential forms, Trans. Amer. Math. Soc. 92 (1959), 125 - 141.
- [17] Rosenholtz, I.: Open maps of chainable continua, Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1974), 258 - 264.
- [18] Whyburn, G. T.: Analytic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. vol. 28, New York, 1942.