数理解析研究所講究録
第 447 巻 1981 年 1-7

Riemann-Weil の問題について

Johns Hopkins大 井草準一

1) Riemann's results & Weil's problem

$m=\binom{m'}{m''}\in\mathbb{Z}^{2g}$ ($m', m''\in\mathbb{Z}^g$)、g 次 Siegel 上半空间 $\mathfrak{H}_g$ の点 τ、複素数ベクトル $z\in\mathbb{C}^g$ に対し、次の様にテータ級数を定義する:

$$\theta_m(\tau,z)=\sum_{p\in\mathbb{Z}^g}\mathbf{e}\left\{\frac{1}{2}\,{}^t(p+\tfrac{m'}{2})\tau(p+\tfrac{m'}{2})+{}^t(p+\tfrac{m'}{2})(z+\tfrac{m''}{2})\right\}$$

但し $\mathbf{e}(*)=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,*)$。すると容易に次の等式をうる:

① $\theta_{m+2n}(\tau,z)=(-1)^{{}^tm'n''}\theta_m(\tau,z)\quad(n\in\mathbb{Z}^{2g})$

② $\theta_m(\tau,-z)=(-1)^{{}^tm'm''}\theta_m(\tau,z)$ 。

式①は、$\theta_m(\tau,z)$ が本质的には $m \bmod. 2$ にのみ依存することを示している。

定義① $m\in\mathbb{Z}^{2g}$ $\quad m$: even (odd) $\underset{\text{defn}}{\Longleftrightarrow}$ $e(m)=1\ (-1)$

② $e(m_1,m_2,m_3)\underset{\text{defn}}{=}e(m_1)e(m_2)e(m_3)e(m_1+m_2+m_3)$

③ even な m に対し $\theta_m(\tau)\underset{\text{defn}}{=}\theta_m(\tau,0)$ とし、Theta nullwerte と呼ばれる。これは、恒等的には 0 でない

$\mathfrak{H}_g$ 上の正則函数である。

等式②は、上の定義から m が even (odd) である為の必要十分条件は、$\theta_m(\tau, z)$ が z の函数として even (odd) であることを示す。

定義　$M=(m_1,\cdots,m_g)$，$N=(n_1,\cdots,n_{g+2})$　$(m_i, n_i \in \mathbb{Z}^{2g})$ に対し次の様に定義する：

$$D(M) = \pi^{-g}\left(\frac{\partial(\theta_{m_1},\cdots,\theta_{m_g})}{\partial(z_1,\cdots,z_g)}\right)_{z=0}$$

$$P(N) = \theta_{n_1}\cdot\cdots\cdot\theta_{n_{g+2}}\ 。$$

M. Noether は Riemann の遺稿の中に、次の表現を見つけた "Darstellung (of $D(M)$) als Summen von Produkten von $g+2$ geraden $\vartheta(0)$ für $g=3,4,\cdots,7$" 言い換えれば

$$D(M) = \sum{}' \pm P(N)$$

が成立するといっている。(cf. Riemann's Werke, Anmerkung (31)) これに関連し、A. Weil は次の問題を提出した：

Weil の問題　$D(M)$ は常に有理数係数の Thetanullwerte の多項式か？

2) *Our first result*

$\mathbb{R}$ 係数 $2g$ 次シンプレクティク群 $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ の元 $\sigma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対し、$\sigma\cdot\tau=(a\tau+b)(c\tau+d)^{-1}$　$(\tau\in\mathfrak{H}_g)$　と定義する。$Sp_{2g}(\mathbb{Z})=\Gamma_g(1)$ と書き、正整数 l に対し、$\Gamma_g(l)$

$= \{ \sigma \in \Gamma_g(1) \mid \sigma \equiv 1_{2g} \bmod \ell \}$, $\Gamma_g(\ell, 2\ell) = \{ \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_g(\ell) \mid$ $\mathrm{diag}(c^t d) \equiv \mathrm{diag}(a^t b) \equiv 0 \bmod 2\ell \}$ とおく。ℓ が偶数ならば $\Gamma_g(\ell, 2\ell)$ は $\Gamma_g(1)$ の正規部分群である。写像 "$(\sigma, \tau) \longmapsto \theta_0(\sigma\cdot\tau)/\theta_0(\tau)$" は $\Gamma_g(1,2)$ の正則な保形因子（$\mathfrak{S}_g$ 上の）を与える。特に

$$R : \Gamma_g(2) \times \mathfrak{S}_g \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$
$$(\sigma, \tau) \longmapsto (\theta_0(\sigma\cdot\tau)/\theta_0(\tau))^k$$

も正則な保形因子で、作用 $(\sigma^{-1}\cdot f)(\tau) = R(\sigma, \tau)^{-1} f(\sigma\cdot\tau)$ によって、$\Gamma_g(2)$ は $\mathfrak{S}_g$ 上正則な函数全体のなすベクトル空間へ作用する。$k = g+2$ とすると

$$\sigma\cdot D(M) = \chi_M(\sigma)\, D(M)$$
$$\sigma\cdot P(N) = \chi_N(\sigma)\, P(N)$$

と書け、χ_M、χ_N は共に $\Gamma_g(2)$ の指標である。以上の記法の下で次の定理をうる。

Theorem $M = (m_1, \cdots, m_g)$ (m_i : odd) に対し

$D(M) \neq 0$ で $D(M) \in \mathbb{C}[\theta_m]$ ならば、

$e(m_i, m_j, m_k) = -1$ ($\forall\, 1 \leq i < j < k \leq g$),

$\sum_{i=1}^{g} m_i \neq 0 \bmod 2$ （もし g が偶数ならば）,

$$D(M) = \sum_{\substack{\chi_M = \chi_N \\ N \bmod \Pi_{g+2}}} \pm P(N)$$

である。但し、$g+2$ 次の対称群 Π_{g+2} が $N = (n_1, \cdots, n_{g+2})$

の列の置換として、作用するものとす。

3) *Fay's result*

D(M) が Thetanullwerte の多項式であるという事は、$g \leqq 5$ ならば成立するが、$g=6$ では成立しない。

4) *Our modified result*

$\mathfrak{X}$ をすべての D(M) で張られた $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間、$\mathfrak{Y}$ をすべての P(N) で張られた $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．このとき、次を得る。

Theorem　$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} \neq \{0\}$ と仮定する。すると $\Gamma_g(2)$ の指標の集合 $\{\chi\}$ で次をみたすものがある：

$$\sum_{\substack{\chi_M=\chi \\ M \bmod \Pi_g}} \pm D(M) = \sum_{\substack{\chi_N=\chi \\ N \bmod \Pi_{g+2}}} \pm P(N)$$

が $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底を与える。さらに各 χ に対し上の両辺は一斉に符号を取り換えることを除いて一意的である。

さて $\mathrm{Card}\{M \bmod \Pi_g \mid \chi_M=\chi\} = [\overline{O_g(\mathbb{Z}_2)} : \Pi_g]$
($\overline{O_g(\mathbb{Z}_2)} = O_g(\mathbb{Z}_2) \bmod 2$, $\Pi_g = O_g(\mathbb{Z}) \bmod 2$) であ

り、 $[\overline{O_g(\mathbb{Z}_2)} : \Pi_g] \geqq 2$ である為の必要十分条件は $g \geqq 6$ である。従って上の定理から次を得る.

Corollary $\quad D(M) \neq \Sigma' \pm P(N) \quad$ for $g \geqq 6$

5) Representation-theoretic result & problem

この節では、$\mathbb{C}$-ベクトル空間 $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ が自明でない為の必要十分条件の1つを与える。或る $g \geqq 2$ に対し $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} \neq \{0\}$ ならば、$g-1$ に対しても $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} \neq \{0\}$ なることがわかる。それ故、以下の議論は g が偶数として話を進める。このとき写像 "$(\sigma, \tau) \longmapsto \det(c\tau + d)^{\frac{g+2}{2}}$" $\left(\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$ は、$\mathfrak{H}_g$ 上の $\Gamma_g(1)$ に関する保形因子である。これにより $\Gamma_g(1)$ を $\mathfrak{H}_g$ 上正則な函数全体のなすベクトル空間に作用させる。$\Gamma_g(2)$ の任意の元 σ に対し

$$\sigma \cdot D(M) = \psi_M(\sigma) \cdot D(M)$$
$$\sigma \cdot P(N) = \psi_N(\sigma) \cdot P(N)$$

とかける。ここで ψ_M, ψ_N は $\Gamma_g(2)$ の指標である。(cf. 3) に於ける χ_M, χ_N)

Mackey's Theorem $\quad K$ を有限群 G の正規部分群、ψ を K の既約指標、$H = \{x \in G \mid \psi(xkx^{-1}) = \psi(k)\ (\forall k \in K)\}$ とす

る。ψのHへの誘導指標 $\mathrm{Ind}_{K\uparrow H}\psi$ が $\sum_i n_i \chi_i$ と既約分解されるならば

$$\mathrm{Ind}_{K\uparrow G}\psi = \sum_i n_i \left(\mathrm{Ind}_{H\uparrow G}\chi_i\right)$$

がψのKへの誘導指標の既約分解を与える。

上記定理を次の場合に応用する：

$$G = \Gamma_g(1)/\Gamma_g(4,8), \quad K = \Gamma_g(2)/\Gamma_g(4,8)$$

$\psi = \psi_M$ 但し $M = (m_1, \cdots, m_g)$ は次を満す $e(m_i, m_j, m_k) = -1$, $\sum_{i=1}^{g} m_i \not\equiv 0 \mod 2$. この様な ψ_M 達はすべて $\Gamma_g(1)$ 共役である。その時、$\mathrm{Ind}_{K\uparrow H}\psi$ は次の様な次数1の既約指標 χ を重複度1で含む。但しHはGの部分群で定理の中で定義されたもの。Γを $\Gamma_g(1)$ の部分群で $\Gamma/\Gamma_g(4,8) = H$ なるものとするとき、

$$\sigma\Big(\sum_{\substack{\psi_M=\psi \\ M \bmod \Pi_g}} \pm D(M)\Big) = \chi(\sigma)\Big(\sum \pm D(M)\Big) \qquad (\forall \sigma \in \Gamma)$$

$$\sigma\Big(\sum_{\substack{\psi_N=\psi \\ N \bmod \Pi_{g+2}}} \pm P(N)\Big) = \chi(\sigma)\Big(\sum \pm P(N)\Big)$$

。

すると定理より、$\rho = \mathrm{Ind}_{H\uparrow G}\chi$ （G或は $\Gamma_g(1)$ の既約指標）は $\mathrm{Ind}_{K\uparrow G}\psi$ の中に唯一度現われる。以上を踏まえ次を得る

$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \neq \{0\} \iff \rho$ が $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ の中に唯一度現われる。

参考文献

[1] J. Fay ; On the Riemann Jacobi formula, Götingen Nachrichten., (1979) 61 − 73.

[2] J. Igusa ; On the Nullwerte of jacobians of odd theta functions, to appear.

[3] J. Igusa ; On Jacobi's derivative formula and its generalizations, Amer. J. Math. Vol. 102 (1980) 409 − 446.

（筆記 佐々木隆二）