数理解析研究所講究録
第447巻 1981年 44-48

射影幾何学的moduli，問題の提出

Johns Hopkins大　井草準一

1、曲線のmoduli

Cを、標数が2と異なる体上の、一般なgenus $g(\geqq 3)$の標準曲線とする。従って、$C \subset \mathbb{P}^{g-1}$は、非特異な$2g-2$次の曲線で、超平面切断全体が、完備一次系$|k|$をなす。ここに$k$は$C$上の標準因子である。超平面$H(\subset \mathbb{P}^{g-1})$は$H \cdot C = 2\mathfrak{a}$，$\mathfrak{a}$は$C$上の因子，なるとき$C$のmulti-tangentと呼ばれる。$H_1, H_2, H_3$を3つのmulti-tangentとし、$H_i \cdot C = 2\mathfrak{a}_i$ $(1 \leqq i \leqq 3)$とおく。$|2k| \ni \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3$なるとき、これら$\{H_1, H_2, H_3\}$はazygeticであるといわれる。$n$個のmulti-tangent $\{H_1, \cdots, H_n\}$は、どの3個もazygeticであるとき、azygeticであるという。このとき、次は知られている。

Fact 1　$2^{g-1}(2^g - 1)$個の（孤立した）multi-tangent (to C)

が存在する。

Fact 2　$g+4$ 個の azygetic multi-tangents が存在する。

Problem C_1　どの azygetic な $g+4$ 個の multi-tangents も残りの $2^{g-1}(2^g-1)-(g+4)$ 個の multi-tangents を有理的に決定するか？

Problem C_2　一般な、$g+4$ 個の超平面 $(\subset \mathbb{P}^{g-1})$ は、その azygetic multi-tangents になる様、種数 g の標準曲線 C を有理的に定めるか？

注意 1、種数 g の曲線の moduli の次元 $= 3g-3 =$ $\mathbb{P}^{g-1}$ の $g+4$ 個の超平面の moduli の次元。

例として、$g=3$ の場合を考えてみる。

種数 3 の非超楕円的標準曲線 ＝ 非特異平面 4 次曲線

multi-tangent ＝ 重複接線　その個数は 28 本。

7 本の azygetic multi-tangents は Aronhold system と呼ばれる。

この場合には、上記問題 C_1, C_2 は肯定的に解かれている。

注意 2、問題 C_2 が肯定的に解かれるならば、moduli 空間

"$\mathcal{M}_g$" は uni-rational であることがわかる。この事実は、$g \leqq 10$ については知られているが、$g \geqq 11$ については知られていない。

注意 3 "$\mathcal{M}_g$" は general type か？(Mumford)

(筆記者注、注意 3 については、J. Harris & D. Mumford, On the Kodaira dim. of the moduli space of curves 参照のこと)

2. アーベル多様体の moduli.

$(A, \mathcal{L})$ を次元 $g \geqq 2$ の一般な主偏極アーベル多様体とする。$\mathbb{P}^{g-1}$ を A の原点に於ける接空間を射影空間とみなしたものとする。polar 因子は、原点に於ける重複度が奇数のとき、odd polar 因子と呼ばれその数は、$2^{g-1}(2^g-1)$ である。A が一般故、各 odd polar 因子は原点で非特異、従ってその接空間の射影化は $\mathbb{P}^{g-1}$ の1つの超平面を定める。

Problem A_1 これら $2^{g-1}(2^g-1)$ 個の超平面は、A の moduli を決定するか？

次に基礎体が複素数体の場合に別な formulation を与えよう。記号は、前掲の「Riemann-Weil の問題について」に従う。

g 個の奇テータ函数 $\theta_{m_1}(\tau, z), \cdots, \theta_{m_g}(\tau, z)$ をとり

$$D(M) = \pi^{-g}\left(\frac{\partial(\theta_{m_1}, \cdots, \theta_{m_g})}{\partial(z_1, \cdots, z_g)}\right)_{z=0}$$

とし、偶テータ函数 $\theta_m(\tau, z)$ に対し、 $\theta_m(\tau) = \theta_m(\tau, 0)$ とする。さらに $\mathbb{C}[D] = \mathbb{C}[D(M)'s]$, $\mathbb{C}[\theta] = \mathbb{C}[\theta_m's]$ とおく。

Problem A_2 $\mathbb{C}[D]$ と $\mathbb{C}[\theta]$ の関係を調べよ。或は、少なくとも $\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[D])$ と $\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[\theta])$ の関係を調べよ。

$\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[\theta])$ はかなりよくわかっている。例えば、$\Gamma_g(4,8)\backslash\mathfrak{S}_g$ の standard compact化 から $\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[\theta])$ への自然な写像は全~~単~~射である。(cf. J. Igusa; On the variety associated with the ring of Thetanullwerte) 然し乍ら、$\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[D])$ は、今迄余り研究されていない。

3、$g = 2$ の場合の問題2について.

この場合には、次の様な "derivative formula" (Rosenhain, Thomae, Weber) がある;

$m_1, \cdots, m_6$ を odd theta characteristics の全体とし、$[1, 2] = D(m_1, m_2)$, $(1, 2, 3) = \theta_{m_1 m_2 m_3} (= \theta_{m_4 m_5 m_6})$, etc とすると、

$$[1,2] = \pm (1,2,3)(1,2,4)(1,2,5)(1,2,6), \ etc.$$

この様な公式は、$15 = \binom{6}{2}$ 個ある。従って

$$\mathbb{C}[D] \subset \mathbb{C}[\theta]$$

をうる。一方、Θ = 10個の Thetanullwerte の積 とすると、

$$[i,j][i,k][j,k] = \pm (i,j,k)^2 \, \Theta$$

をうる。従って

$$\mathbb{C}[\theta] \supset \text{部分環 } R \xhookrightarrow{\ \rho\ } \mathbb{C}[D]$$

なる次数6の斉次環準同形 ρ で $\rho((i,j,k)^2) = \pm [i,j][i,k][j,k]$ をみたすものが存在する。Θ は R に含まれ $\rho(\Theta) = \pm$(すべての $[i,j]$ の積)、さらに $\mathbb{C}[\theta]^{\Gamma_2(2)} \subset R$ を示すことができる。

4、$g=3$ の場合の問題 A_2 について、

この場合も、$g=2$ のときと同様な結果をうる。

5、Final Remark

よく知られている様に、$\mathfrak{S}_g$ の各点 τ に対し、ある Thetanullwerte θ_m があって $\theta_m(\tau) \neq 0$ である。また、任意の $\tau \in \mathfrak{S}_g$ に対し、$D(M)(\tau) \neq 0$ となる $D(M)$ が存在する。(Fay)

(筆記 佐々木隆二)