数理解析研究所講究録
第447巻 1981年 69-83

虚数乗法をもつAbel多様体のconjugationとmoduliの体について

京大 理　吉田敬之

§0.　CM型Abel多様体のmoduliの体を定める問題は、志村-谷山[7]の結果の精密化として志村[5]において定式化され意義が明らかにされた．ここで同時にAut($\mathbb{C}$)のconjugationによる挙動がより基本的な問題として論じられている．その後Langlands[2]はShimura varietyのconjugationについての一般的予想を提出した．この予想は最近Shih-Milne-Tateにより部分的解決が得られたと筆者は聞いているが、怠慢にしてまだ文献入手の努力を行っていない．しかしLanglandsの予想がCM型Abel多様体のconjugationとどう結びつくかは——解答に要求される具体性のlevelにも依存して——必ずしも明確ではないと考えられる．本稿では[5]の定式化に従って一般的考察を行い問題点を明らかにすることを試みた．主な結果は§4にあるが、簡単に言い切ってしまえば、obstructionはorder 2の元であり、特にCM体の類数が奇数であれば、

単数群についての若干の仮定下に、CM型Abel多様体のconjugationによる挙動がわかる、ということにある。（6月の研究集会では[8]について話しました。本稿はこれと関連して考えていた内容を整理したものです）。

§1. Rを$\mathbb{Z}$上有限基底をもつringとするとき、type Rの偏極Abel多様体とは、Abel多様体A，Aの偏極$\mathcal{C}$，Rから$\mathrm{End}(A)$の中への同型θの組$(A, \mathcal{C}, \theta)$をいう。$(A', \mathcal{C}', \theta')$をtype Rの偏極Abel多様体とする。$(A, \mathcal{C}, \theta)$から$(A', \mathcal{C}', \theta')$への同型$\mu$とは、$A$から$A'$への同型であって

1) $\mu\theta(a) = \theta'(a)\mu$, $\forall a \in R$.

2) 偏極$\mathcal{C}'$に入る任意のdivisor X'について$\mu^{-1}(X')$は$\mathcal{C}$に入る。

という2条件をみたすものをいう。以下universal domainとして複素数体$\mathbb{C}$をとって考える。ρにより$\mathbb{C}$の複素共役写像を表わす。$P = (A, \mathcal{C}, \theta)$をtype Rの偏極Abel多様体とするとき、Pのmoduliの体Mとは、$\mathbb{C}$の部分体であって任意に$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$をとるとき、$(A, \mathcal{C}, \theta)$と$(A^\sigma, \mathcal{C}^\sigma, \theta^\sigma)$が同型になるのは、$\sigma$の$M$への制限が自明になるとき、かつそのときに限るという条件で特徴づけられるものである。moduliの体Mは存在して一意的である（cf. [3]）。

§2. Lを代数体とするとき $\mathcal{O}_L$, I_L, C_L, E_L によりLの極大order, ideal群, ideal類群, 単数群をそれぞれ表わす. Kは$\mathbb{Q}$上$2n$次のCM体とする. 我々の対象はtype $\mathcal{O}_K$ のn次元偏極Abel多様体 $P=(A, \mathcal{C}, \theta)$で条件

(C1) $\theta(K)$は偏極$\mathcal{C}$で定まる$\mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Q}$のinvolutionでstableである

をみたすものである. ここにθをKから$\mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Q}$への同型に拡張し, これについても同一の文字$\theta$を用いた. Kの任意の部分体Dについて, θをDに制限することにより, type $\mathcal{O}_D$の偏極Abel多様体$(A, \mathcal{C}, \theta|D)$を考える. これのmoduliの体を$M_D$で表わす. 明らかに$D\subseteq D'$ならば$M_D\subseteq M_{D'}$.

ここで[5]に従い基本的事実を復習しておく. ΦはKの, θを通してAの原点のtangent spaceで実現される, $\mathbb{C}$-係数$n\times n$行列による表現とする. ΦはKから$\mathbb{C}$の中へのn個の同型写像$\sigma_1, \cdots, \sigma_n$の直和と同値となる. (K', Φ')を(K, Φ)のreflexとし, F, F'でそれぞれK, K'の最大実部分体を表わす. Kのideal $\mathfrak{a}$と$\mathbb{C}^n$のvector uがあり, Aは複素トーラス$\mathbb{C}^n/\Phi(\mathfrak{a})u$と複素解析多様体として同型となる, そこで, $R(x, y)$を$\mathcal{C}$の基本的極因子の定める Riemann 形式とすれば, $t\in K$, $t^{\rho}=-t$, t^{σ_i}の虚部>0 $(1\leq i\leq n)$ をみたすtがあって

(1) $R(\Phi(x)u, \Phi(y)u) = \mathrm{Trace}_{K/\mathbb{Q}}(t x y^{\rho}), \quad (x, y) \in K \times K$

が成立つ．このとき P を type $(K, \Phi; t, \mathfrak{a})$ と呼ぶ．
$P' = (A', C', \theta')$ を type $(K, \Phi; t', \mathfrak{a}')$ の type $\mathfrak{O}_K$ の偏極Abel多様体とする．P と P' は，或る $x \in K^{\times}$ について，$t' = x x^{\rho} t$，$\mathfrak{a}' = (x^{-1})\mathfrak{a}$ が成立するとき，かつそのときに限り同型である．$\{t^{-1}t', \mathfrak{a}'^{-1}\mathfrak{a}\}$ は直積 $F_+ \times I_K$ の元と考えられるが（F_+ は F の総正な元の成す乗法群である），$\{x x^{\rho}, (x)\}$, $x \in K^{\times}$ の形の元の成す $F_+ \times I_K$ の部分群を考え，これによる $F_+ \times I_K$ の商群を $\widetilde{C}_K$ とおく．

(2) $\widetilde{C}_K = F_+ \times I_K / \{\{x x^{\rho}, (x)\} \mid x \in K^{\times}\}$．

$\{t^{-1}t', \mathfrak{a}'^{-1}\mathfrak{a}\}$ の $\widetilde{C}_K$ に於る像を $(t^{-1}t', \mathfrak{a}'^{-1}\mathfrak{a})$ で表わし，

(3) $(P' : P) = (t^{-1}t', \mathfrak{a}'^{-1}\mathfrak{a})$

により左辺を定義する．このとき

(4) $P' \cong P \iff (P' : P) = 1$．

K' の ideal 群 $I_0(\Phi')$ を

(5) $I_0(\Phi') = \{\mathfrak{A} \in I_{K'} \mid \mathfrak{A}^{\Phi'} = (\alpha),\ \alpha\alpha^{\rho} = N(\mathfrak{A}) \text{ for some } \alpha \in K^{\times}\}$

により定義すれば，$P = (A, C, \theta)$ の moduli の体 M_K は $I_0(\Phi')$ に対応する K' の不分岐Abel拡大である．我々の目的の一つは，M_K の部分体として (A, C) の moduli の体 $M = M_{\mathbb{Q}}$ を決定することにあります．

§3. $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$をとり、$P^\sigma = (A^\sigma, \mathcal{C}^\sigma, \theta^\sigma)$を考える。これはtype $\mathcal{O}_K$の偏極Abel多様体であり、$(A^\sigma, \theta^\sigma)$はCM型$(K, \Phi^\sigma)$に属する。ここに

(6) $\Phi^\sigma(a) = \Phi(a)^\sigma, \quad a \in K.$

特にσがK'上自明であるときは、Φ^σはΦと同値であって、$\sigma | M_K = [M_K/K', \mathfrak{x}]$と$\mathfrak{x} \in I_{K'}$をとってArtin symbolで表わすとき

(7) $(P^\sigma : P) = (N(\mathfrak{x}), \mathfrak{x}^{\Phi'})$

が成立つ。

まず志村[5]において導入された次の条件を考える。K'の部分体D'とKの部分体Dがあり、K', KはそれぞれD', D上normalで$\mathrm{Gal}(K'/D')$と$\mathrm{Gal}(K/D)$の間の同型写像$\sigma_0 \to [\sigma_0]$で、

(8) $\mathrm{Trace}\,\Phi(a^{[\sigma_0]}) = (\mathrm{Trace}\,\Phi(a))^{\sigma_0}, \quad {}^\forall a \in K$

をみたすものがあったとする。このとき、<u>D'への制限が自明である</u>$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$について、

$$P_\sigma = (A^\sigma, \mathcal{C}^\sigma, \theta_\sigma), \quad \theta_\sigma(a) = \theta(a^{[\sigma_0]^{-1}})^\sigma$$

とおく。ここに$\sigma_0 = \sigma | K'$。そうすれば$(A^\sigma, \theta_\sigma)$はCM型$(K, \Phi)$に属するから、

(9) $(P_\sigma : P) = (n_\sigma, \mathfrak{a}_\sigma)$

が考えられる。(7)から

(10) $(n_\sigma, \mathfrak{a}_\sigma) = (N(\mathfrak{x}), \mathfrak{x}^{\Phi'}), \quad \sigma = [M_K/K', \mathfrak{x}].$

条件(8)からM_KはD'上normalになることがわかる．また，$\sigma|M_K = \text{identity} \Rightarrow (P_\sigma : P) = 1$は明白，故に，[5], Prop. 2により，$\sigma \longrightarrow (P_\sigma : P)$は$\mathrm{Gal}(M_K/D')$から$\widetilde{C}_K$への写像と考えられる．次に

$\sigma|M_D = \text{identity} \Leftrightarrow \exists\mu : (A, C)$から$(A^\sigma, C^\sigma)$への同型で$\mu\theta(a) = \theta(a)^\sigma\mu$を$\forall a \in \mathcal{O}_D$についてみたす$\Leftrightarrow P_\sigma \cong P$
$\Leftrightarrow (P_\sigma : P) = 1$

がわかるから

(11) $\quad \mathrm{Gal}(M_K/M_D) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(M_K/D') \mid (P_\sigma : P) = 1\}$

が成立する．一方[5], Prop. 2, (ii)により

(12) $\quad (u_{\sigma\tau}, \mathfrak{A}_{\sigma\tau}) = (u_\sigma^{[\tau]}, \mathfrak{A}_\sigma^{[\tau]})(u_\tau, \mathfrak{A}_\tau)$

が任意の$\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(M_K/D')$について成立する．これは$(u_\sigma, \mathfrak{A}_\sigma)$が$\widetilde{C}_K$に値をもつ1-cocycleであることを意味し，これが決定できれば(11)よりmoduliの体M_Dは定まることになる．また[5], Prop. 2, (iii)は$(u_\sigma, \mathfrak{A}_\sigma)$の$H^1(\mathrm{Gal}(M_K/D'), \widetilde{C}_K)$におけるcohomology類は$(K, \Phi)$によってのみ定まる不変量であることを意味している．以下1-cocycle $(u_\sigma, \mathfrak{A}_\sigma)$の決定が基本的であるという考え方で進む．

§4. 仮定は§3の通りとする．任意に$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$をとり，$P^\sigma$のbehaviorを考える．

<u>Lemma</u>. (K, Φ^{σ}) の reflex は $(K'^{\sigma}, \Phi'^{\sigma^{-1}})$ で与えられる．
ここに、$\Phi'^{\sigma^{-1}}(a) = \Phi'(a^{\sigma^{-1}})$, $a \in K'^{\sigma}$.

証明は容易であるので略する．定義から

(13) $\mathrm{Trace}\, \Phi^{\sigma}(a^{[\mu]}) = (\mathrm{Trace}\, \Phi^{\sigma}(a))^{\sigma^{-1}\mu\sigma}$, $\forall a \in K$, $\forall \mu \in Gal(K'/D')$

が成立する．それ故、(6) と同様な関係が、Φ^{σ}を媒介として $Gal(K'^{\sigma}/D'^{\sigma})$ と $Gal(K/D)$ の間にも存在する．$P^{\sigma} = (A^{\sigma}, C^{\sigma}, \theta^{\sigma})$ の moduli の体は M_K^{σ} に一致するから．我々は P^{σ} から $Gal(M_K^{\sigma}/D'^{\sigma})$ の $\tilde{C}_K$ に値をもつ 1-cocycle $(u'_\tau, \mathfrak{a}'_\tau)$ を得ることになる．

<u>Theorem</u>. $(u'_\tau, \mathfrak{a}'_\tau) = (u_{\sigma\tau\sigma^{-1}}, \mathfrak{a}_{\sigma\tau\sigma^{-1}})$ が任意の $\tau \in Gal(M_K^{\sigma}/D'^{\sigma})$ に対して成立する．

<u>Proof</u>. これは $(P_{\sigma} : P)$ をその幾何的定義と関係づけると困難なく証明される．（ここで用いる事実については [5] を参照）．$P = (A, C, \theta)$, $P_{\sigma\tau\sigma^{-1}} = (A^{\sigma\tau\sigma^{-1}}, C^{\sigma\tau\sigma^{-1}}, \theta_{\sigma\tau\sigma^{-1}})$ に対して、$(P_{\sigma\tau\sigma^{-1}} : P)$ は次の様にして定まる量と等しい．(A, θ) から $(A^{\sigma\tau\sigma^{-1}}, \theta_{\sigma\tau\sigma^{-1}})$ への isogeny λ がある．C, C' から基本的極因子 X, X' をとり、$Y = \lambda^{-1}(X')$ とおく．A から A の Picard 多様体 $\hat{A}$ への X, Y から定まる isogeny をそれぞれ φ_X, φ_Y とすると、(*) $\varphi_Y = \varphi_X \theta(\nu)$, $\nu \in F_1$ となる．

ここに φ_X は $u\in A$ を X_u-X の linear equivalence による class $Cl(X_u-X)$ に写す写像である．また $c\in I_K$ により $\mathrm{Ker}(\lambda)=\{y\in A \mid \theta(c)y=0\}$．この b, c により，$(P_{\sigma\tau(\sigma)} : P)=(b, c)$．さて λ^σ は $(A^\sigma, \mathcal{C}^\sigma)$ から $(A^{\sigma\tau}, \theta_{\sigma\tau(\sigma)}^{\sigma})$ への isogeny を与え $\mathrm{Ker}(\lambda^\sigma)=\{y\in A^\sigma \mid \theta^\sigma(c)y=0\}$ である．$\mathcal{C}^\sigma$, $\mathcal{C}'^\sigma$ の基本的極因子は X^σ, X'^σ で与えられるから，$Y^\sigma=(\lambda^\sigma)^{-1}(X'^\sigma)$ について (**) $\varphi_{Y^\sigma}=\varphi_{X^\sigma}\theta^\sigma(b)$ がいえるとよい．定義から $\varphi_X^\sigma(u^\sigma)=(\varphi_X(u))^\sigma$, $u\in A$．Picard variety の定義から $\hat{A}$ の点 v が $X\in D_a(A)$ (A の 0 に algebraically equivalent な divisors の集合) に，Poincaré divisor を通して対応するとき，$v^\sigma\in(\hat{A})^\sigma=\widehat{A^\sigma}$ が $X^\sigma\in D_a(A^\sigma)$ に対応する．故に，$(\varphi_X(u))^\sigma=(Cl(X_u-X))^\sigma=Cl(X^\sigma_{u^\sigma}-X^\sigma)=\varphi_{X^\sigma}(u^\sigma)$ となる．これから $\varphi_{X^\sigma}=\varphi_X^\sigma$．同様に $\varphi_{Y^\sigma}=\varphi_Y^\sigma$．(**) は (*) から従う．

この Theorem を用いて P^σ を調べるには，次の志村の結果 [5] が基本的である．$D'\supseteqq F'$, $D\supseteqq F$ と仮定する．

Proposition. P が type $(K, \Phi; t, \mathfrak{a})$ ならば，P_ρ は type $(K, \Phi; t, \mathfrak{a}^\rho)$ である．

そこで P^σ を type $(K, \Phi^\sigma; \xi_\alpha', \mathfrak{a}_\alpha')$ とする. Prop. により. $(u_\rho', \mathfrak{q}_\rho') = (1, \mathfrak{a}_\alpha'/\mathfrak{a}_\alpha'^{\rho})$ であるから. Theorem により

(14) $(1, \mathfrak{a}_\alpha'/\mathfrak{a}_\alpha'^{\rho}) = (u_{\sigma\rho\sigma^{-1}}, \mathfrak{q}_{\sigma\rho\sigma^{-1}})$

となる. 一方 Theorem の証明の記号下で,

(15) $\mathrm{Ker}(\varphi_x) = \{ y \in A \mid \theta(\mathfrak{f}) y = 0 \}$,

が下の ideal $\mathfrak{f} = (\xi)\mathfrak{d}_K \mathfrak{a}\mathfrak{a}^\rho$ により成立つことが知られている. $\mathfrak{d}_K$ は K の $\mathbb{Q}$ 上の different である. $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(P)$ とおく. $\mathfrak{f}(P^\sigma) = \mathfrak{f}(P)$ はこれから直ちにわかり

(16) $(\xi)\mathfrak{a}\mathfrak{a}^\rho = (\xi_\alpha')\mathfrak{a}_\alpha'\mathfrak{a}_\alpha'^{\rho}$

が成立する. $\tilde{C}_K$ に於て計算して

$$(1, \mathfrak{a}_\alpha'/\mathfrak{a}_\alpha'^{\rho}) = (1, \mathfrak{a}_\alpha'^{2})(1, (\mathfrak{a}_\alpha'\mathfrak{a}_\alpha'^{\rho})^{-1})$$

$$= (1, \mathfrak{a}_\alpha'^{2})(1, (\xi_\alpha')(\xi)^{-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^\rho)^{-1})$$

$$= (1, (\xi_\alpha')\mathfrak{a}_\alpha'^{2})(1, ((\xi)\mathfrak{a}\mathfrak{a}^\rho)^{-1})$$

$$= ((\xi_\alpha'\xi_\alpha'^{\rho})^{-1}, \mathfrak{a}_\alpha'^{2})(\xi\xi^\rho, (\mathfrak{a}\mathfrak{a}^\rho)^{-1}).$$

ゆえに,

(17) $((\xi_\alpha'\xi_\alpha'^{\rho})^{-1}, \mathfrak{a}_\alpha'^{2}) = ((\xi\xi^\rho)^{-1}, \mathfrak{a}\mathfrak{a}^\rho)(u_{\sigma\rho\sigma^{-1}}, \mathfrak{q}_{\sigma\rho\sigma^{-1}})$.

$\tau = \sigma\rho\sigma^{-1}\rho^{-1}$ とおく.

$(u_{\sigma\rho\sigma^{-1}}, \mathfrak{q}_{\sigma\rho\sigma^{-1}}) = (u_{\tau\rho}, \mathfrak{q}_{\tau\rho}) = (u_\tau^{[\rho]}, \mathfrak{q}_\tau^{[\rho]})(u_\rho, \mathfrak{q}_\rho)$,

$(u_\rho, \mathfrak{q}_\rho) = (1, \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^\rho)$ 故, (17) により

(I) $((t_\sigma' t_\sigma'^{\rho})^{-1}, \mathfrak{a}_\sigma'^{2}) = ((t t^{\rho})^{-1}, \mathfrak{a}^{2})(u_\tau^{[\rho]}, \mathfrak{b}_\tau^{[\rho]})$

が得られた．CM体の性質から，$\tau|K'$ は自明であり，$(u_\tau, \mathfrak{b}_\tau)$ は(10)により既知の量であることに注意する．次のことが(I)からわかる．

<u>Corollary</u>．任意の $\sigma \in Aut(\mathbb{C})$ に対して，$\sigma\rho\sigma^{-1}\rho^{-1} = [M_K/K', x]$ となる $x \in I_{K'}$ をとれば，$x^{\Phi'}$ の C_K に於る類は平方類である．

さて，$(t_\sigma', \mathfrak{a}_\sigma')$ を知れば，我々は ρ^σ の挙動をcontrolしたといえる訳であるが，(I)は"order 2の元によるambiguity を除いて" ρ^σ を定めているといえる．とくに

(C2) $E_F^{+} = N_{K/F}(E_K)$

を仮定する．今 $\mathfrak{a}_\sigma'$ の ideal class in C_K が定まったとする．(16)をみたす別の pair $(t_\sigma'', \mathfrak{a}_\sigma'')$ があったとしよう．$\mathfrak{a}_\sigma'' = (x)\mathfrak{a}_\sigma'$, $x \in K^\times$ から，$(x x^\rho t_\sigma'')\mathfrak{a}_\sigma'\mathfrak{a}_\sigma'^{\rho} = (t_\sigma')\mathfrak{a}_\sigma'\mathfrak{a}_\sigma'^{\rho}$．$t_\sigma''/t_\sigma$ は総正なFの元であるから，$\varepsilon x x^\rho t_\sigma'' = t_\sigma'$ がある $\varepsilon \in E_F^{+}$ により成立つ．(C2)から $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_0^{\rho}$ とある $\varepsilon_0 \in E_K$ によりかける．故に，$y y^\rho t_\sigma'' = t_\sigma'$, $\mathfrak{a}_\sigma'' = (y)\mathfrak{a}_\sigma$ が $y = \varepsilon_0 x$ により成立つ．type $(K, \Phi^\sigma; t_\sigma', \mathfrak{a}_\sigma')$ の構造と，type $(K, \Phi^\sigma; (y y^\rho)^{-1} t_\sigma', (y)\mathfrak{a}_\sigma')$ の構造は同型であるから，(C2)の仮定下では，$\mathfrak{a}_\sigma'$ の ideal class が定まれば，

P^σ の同型類は定まる．(I) の第2成分についての等式から
$(\mathfrak{a}'_\sigma \text{ の class in } C_K)^2 = (\mathfrak{a} \text{ の class in } C_K)^2 \times (\mathfrak{q}_\tau^{[\rho]} \text{ の class in } C_K)$
が得られる．従って

Kの類数が奇数であり，$E_F^+ = N_{K/F}(E_K)$ ならば P^σ の挙動は $\forall\sigma \in Aut(\mathbb{C})$ に対して，(I) により control される．

§5. 以下再び §3 の formulation に帰り，(A, ι) の moduli の体の決定について考えることにする．$\sigma \in Aut(\mathbb{C})$ は D' 上 trivial とする．P^σ が type $(K, \Phi^\sigma; t'_\sigma, \mathfrak{a}'_\sigma)$, P_σ が type $(K, \Phi; t_\sigma, \mathfrak{a}_\sigma)$ とすれば，$t_\sigma = t_\sigma'^{[\sigma]}$, $\mathfrak{a}_\sigma = \mathfrak{a}_\sigma'^{[\sigma]}$ としてよいことが定義からわかる．$D' \subseteq F'$, $D \subseteq F$ と仮定し，(I) を用いれば，
$$((t_\sigma t_\sigma^\rho)^{-1}, \mathfrak{a}_\sigma^2) = ((t^{[\sigma]} t^{[\sigma\rho]})^{-1}, (\mathfrak{a}^{[\sigma]})^2)(u_\tau^{[\sigma\rho]}, \mathfrak{q}_\tau^{[\sigma\rho]}).$$
$u_\sigma = t^{-1} t_\sigma$, $\mathfrak{q}_\sigma = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_\sigma^{-1}$ より

(18) $(u_\sigma, \mathfrak{q}_\sigma)^2 = (tt^\rho, \mathfrak{a}^{-2})((t^{[\sigma]} t^{[\sigma\rho]})^{-1}, (\mathfrak{a}^{[\sigma]})^2)(u_\tau^{[\sigma\rho]}, \mathfrak{q}_\tau^{[\sigma\rho]})$

が得られる．$\sharp(P) = \sharp(P^\sigma)$ から $\sharp(P_\sigma) = \sharp(P)^{[\sigma]}$ であるが

(C3) $\sharp(P)^\tau = \sharp(P)$ for $\forall\tau \in Gal(K/D)$

と仮定する．このとき $N_{K/F}(\mathfrak{q}_\sigma) = (u_\sigma)$ が成立つ．$\widetilde{C_K}$ の元 $(u, \mathfrak{q})$ で $N_{K/F}(\mathfrak{q}) = (u)$ の関係をもつ $u \in F_+$, $\mathfrak{q} \in I_K$ で代表されるものの成す部分群を C_K^* で表わす．C_K^* は完全列

(19) $1 \longrightarrow E_F^+/N_{K/F}(E_K) \longrightarrow C_K^* \longrightarrow C_K^0 \longrightarrow 1$

に入る．C_K^0 は F への norm が F_+ の元で生成される単項 ideal

となるKのidealで代表されるideal classesの成すC_Kの部分群である．

(20) $(u,\mathfrak{q})(u^{\rho},\mathfrak{q}^{\rho}) = 1$, $(u,\mathfrak{q}) \in C_K^*$

が成立つ．(ホ) $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{\rho} = (t^{[\sigma]})\mathfrak{A}^{[\sigma]}\mathfrak{A}^{[\sigma\rho]}$, $(u_\rho,\mathfrak{q}_\rho) = (1,\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^{\rho})$ を用いれば(18)は

(21) $(u_\sigma,\mathfrak{q}_\sigma)^{-2} = (u_\rho^{[\sigma]}/u_\rho,\ \mathfrak{q}_\rho^{[\sigma]}/\mathfrak{q}_\rho)(u_\tau^{[\sigma\rho]},\ \mathfrak{q}_\tau^{[\sigma\rho]})$

と変形され、(20)により

(III) $(u_\sigma,\mathfrak{q}_\sigma)^{2} = (u_\rho/u_\rho^{[\sigma]},\ \mathfrak{q}_\rho/\mathfrak{q}_\rho^{[\sigma]})(u_\tau^{[\sigma]},\ \mathfrak{q}_\tau^{[\sigma]})$

が得られた．($\tau = \sigma\rho\sigma^{-1}\rho^{-1}$)．

(III)は$\widetilde{C}_K$に値をもつcocycle $(u_\sigma,\mathfrak{q}_\sigma)$は$C_K^*$のorder 2の元を除いて決定されることを意味する．特にC_K^*の位数が奇数ならば，$(u_\sigma,\mathfrak{q}_\sigma)$は(III)によって完全に決まる．より一般にcocycle $(u_\sigma,\mathfrak{q}_\sigma)$の$Gal(M_K/F')$への制限が定まっていることに注意すれば、次の様に精密化できる．Hochschild-Serreの完全列

(22) $1 \longrightarrow H^1(Gal(K'/D'), C_K^*) \xrightarrow{Inf} H^1(Gal(M_K/D'), C_K^*) \xrightarrow{Res} H^1(Gal(M_K/K'), C_K^*)$

(23) $1 \longrightarrow H^1(Gal(F'/D'), C_K^{*\langle\rho\rangle}) \xrightarrow{Inf} H^1(Gal(K'/D'), C_K^*) \xrightarrow{Res} H^1(Gal(K'/F'), C_K^*)$

を考える．$(u_\sigma^*,\mathfrak{q}_\sigma^*)$を(10)をみたす別の1-cocycleとし$\alpha$を$(u_\sigma^{-1}u_\sigma^*,\ \mathfrak{q}_\sigma^{-1}\mathfrak{q}_\sigma^*)$の$H^1(Gal(M_K/D'), C_K^*)$における

cohomology 類としよう．(22) で $Res(\alpha)=1$ より，$\beta\in H^1(Gal(K'/D'), C_K^*)$ により $\alpha=Inf(\beta)$ となる．一方 §4 の Prop. からわかる様に，(23) に於て $Res(\beta)=1$ であるから，$\gamma\in H^1(Gal(F'/D'), C_K^{*\langle p\rangle})$ により，$\beta=Inf(\gamma)$ となる．従って，α の cohomology 類は $H^1(Gal(F'/D'), C_K^{*\langle p\rangle})$ の元からの inflation を除いて定まっているといえる．特に，$H^1(Gal(F'/D'), C_K^*)=1$ (これは例えば $[F':D']$ が奇数ならば成立つ) とすれば，$(u_\sigma, \mathfrak{q}_\sigma)$ の ambiguity は $(v,\xi)\in C_K^{*\langle p\rangle}$ により $(v^\sigma/v, \xi^\sigma/\xi)$ の形の元でしかありえない．なお (III) を得るだけならば，cocycle 条件 (12) からも可能であることを注意しておきます．

§6. この節では我々が §3, 5 で課した条件，(8), (C3), 及び $D'\subseteq F'$, $D\subseteq F$ は A が単純ならば restrictive ではなく，$(A,\mathcal{C})$ の moduli の体 M の決定という目的については一般性を失っていないことを注意する．以下 $(A,\mathcal{C})$ は単純とする．任意の $\sigma\in Aut(\mathbb{C}/M)$ をとると，$(A,\mathcal{C})$ から $(A^\sigma, \mathcal{C}^\sigma)$ への同型 μ_σ がある．このとき $\pi(\sigma)\in Aut(K)$ があって

(24) $\mu_\sigma^{-1}\theta(a)^\sigma\mu_\sigma = \theta(a^{\pi(\sigma)})$, $a\in\mathfrak{O}_K$

が成立する．M_K は M の Galois 拡大体であり，π は $Gal(M_K/M)$ から $Aut(K)$ の中への同型となることがわかる．$D'=M\cap K'$, Dを$\pi(\mathrm{Gal}(M_K/M))$の固定体とすれば、$\mathrm{Gal}(M_K/M)\cong \mathrm{Gal}(K'/D')\cong \mathrm{Gal}(K/D)$. πを制限して得られる$\mathrm{Gal}(K'/D')$から$\mathrm{Gal}(K/D)$への同型を[ ]とおくと、(24)により(8)が成立する. このとき条件(C3)が成立するのは勿論である. また$M=M_D$となることもわかる. しかし我々にはD'がK'のどの部分体になるかをアプリオリには知らないという弱点がある. これを補うには次の様に考える. K'の部分体D'で, (8), (C3)を成立させるものを全て考え、この様なD'から決るDについてM_Dが求まればよい. ρは$\mathrm{Gal}(K'/D')$, $\mathrm{Gal}(K/D)$の元と可換であるから, $D'\not\supseteq F'$のときは$D'\cap F'$をD'に置き換えることにより、$D'\supseteq F'$, $D\supseteq F$と仮定してもよい.

文献

[1] G. Hochschild and J. P. Serre, Cohomology of group extensions, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 110–134.

[2] R. P. Langlands, Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen, Proc. of symposia in pure mathematics, XXXIII (vol. 2), 1979, 205–246.

[3] G. Shimura, On the theory of automorphic functions, Ann. of Math. 70 (1959), 101–144.

[4] G. Shimura, On the zeta function of an abelian variety

with complex multiplication, Ann. of Math. 94 (1971), 504–533.
[5] G. Shimura, On abelian varieties with complex multiplication, Proc. of the London Math. Soc. 34 (1977), 65–86.
[6] G. Shimura, Models of an abelian variety with complex multiplication over small fields, to appear.
[7] G. Shimura and Y. Taniyama, Complex multiplication of abelian varieties and its application to number theory, Publ. Math. Soc. Japan No. 6, 1961.
[8] H. Yoshida, Hecke characters and models of abelian varieties with complex multiplication, to appear in J. Fac. of Sci. Univ. of Tokyo.