数理解析研究所講究録
第 447 巻 1981 年 100-107

3変数クレモナ群について

名大 理　　梅村 浩

代数多様体，写像等はすべて$\mathbb{C}$上定義されているものとし，代数群はすべて連結線型であるとする[7]．n次元射影空間$\mathbb{P}^n$の双有理自己同型全体のなす群をn変数クレモナ群と呼び，Cr_nで表わす．Cr_nに含まれる極大連結代数群を分類するのが目的である[7]．[7]で述べた結果に，添字の動く範囲の不注意から生じる誤りがあるので訂正させて頂く．P 49−52 [7]で(8)の変換群が他に入ると言っているが，そうならば(5)の添字に$m>0>n$も含めなければならない．そして(5)を$m \geqq n \geqq 1$の場合と，$m>0>n$の場合の2つに分けると，結局Enriques，Fanoの結果が正しいことがわかる．定義等については[7]を，詳しい証明については[3]，[4]，[5]を参照されたい．

§1. Enriques−Fanoの定理

まず代数群がクレモナ群に含まれるということを定式化す

3. その為には，次の定理が基本的である．

定理（Weil）．Gを代数群，Xを代数多様体，(G, X)をpseudo operation，つまりGのXへの有理的な作用とする．そのとき，algebraic operation (G, X')でpseudo operationとして(G, X)と同型なものが存在する．

Weilの定理を用いると次は同値である（(2)を(1)の定義と思ってもよい）：

(1) Cr_nに含まれる代数群Gを与える，

(2) Gの$\mathbb{P}^n$への有理的かつ効果的な作用，つまり効果的なpseudo operation $(G, \mathbb{P}^n)$を与える，

(3) Gの多様体Xへの効果的な作用(G, X)および双有理同型写像 $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$を与える．

以上のことから，Gと共役なCr_nの部分群には(3)でφをとり換えたものが対応している．したがって共役を無視すればCr_nに含まれる代数群Gと，n次元有理多様体へのGの効果的な作用が1:1に対応する．一方Cr_nに含まれる代数群は線型であることも証明される．

次にEnriques-Fanoの定理を述べる．定理の中に表われる記号は，定理の後で説明する．

定理(Enriques, Fano). (I) GをCr_3に含まれる代数群とする．そのとき，Gは共役を除いて次の作用の決めるCr_3の代数部分群に含まれる．

(P-1) $(PGL_4,\ \mathbb{P}^3)$.

(P-2) $(PSO_5,$ 2次曲面$\subset \mathbb{P}^4)$.

(E-1) $(PGL_2,\ PGL_2/\Gamma)$，Γは正8面体群.

(E-2) $(PGL_2,\ PGL_2/\Gamma)$，Γは正20面体群.

(1) $(PGL_3 \times PGL_2,\ \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1)$.

(2) $(PGL_2 \times PGL_2 \times PGL_2,\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$.

(3) $(PGL_2 \times \mathrm{Aut}^0 F'_m,\ \mathbb{P}^1 \times F'_m)$，ここで$m \geqq 2$なる整数.

(4) $(PGL_3,\ PGL_3/B)$，BはPGL_3のBorel部分群.

(5) $(PGL_2,\ PGL_2/D_{2m})$，D_{2m}は位数が$2m$のdihedral群，$m \geqq 2$なる整数，但し3はのぞく.

(6) $(G,\ G/H_{m,n})$，ここで$G = \mathbb{G}_m \times SL_2 \times SL_2$，$H_{m,n} = \left\{ \left(t_1^m t_2^n,\ \begin{pmatrix} t_1 & x \\ & t_1^{-1} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} t_2 & y \\ 0 & t_2^{-1} \end{pmatrix} \right) \in G \;\middle|\; t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*,\ x, y \in \mathbb{C} \right\}$，$m$，$n$は$m > 0 > n$をみたす整数(正確にはこれから定まる効果的な作用).

(7) $(\mathrm{Aut}^0 J'_m,\ J'_m)$，ここで$m \geqq 2$なる整数.

(8) $(\mathrm{Aut}^0 L'_{m,n},\ L'_{m,n})$，ここで$m$，$n$は$m \geqq n > 0$なる整数.

(9) $(\mathrm{Aut}^0 F'_{m,n},\ F'_{m,n})$，ここで$m$，$n$は$m > n \geqq 2$なる整数.

(10) $(\mathrm{Aut}^0 F'_{m,m}, F'_{m,m})$, ここで $m \geq 1$ なる整数.

(11) $(\mathrm{Aut}^0 E'^{\ell}_{m}, E'^{\ell}_{m})$, ここで m, ℓ は整数であり, $m \geq 2$ かつ $\ell \geq 0$ であるか,又は $m=1$, かつ $\ell \geq 2$ をみたす.

(12) PGL_2 の一般的たも非推移な作用で, 各 orbit は $(PGL_2, PGL_2/G_m)$ と同型である. これらの部分群は種数 $g \geq 1$ の超楕円曲線の moduli 空間によってパラメーターが入る。

(II) 上に定義した作用 (P-1), (P-2), (E-1), (E-2), (1), $\cdots$, (12) の定める Cr_3 の部分代数群は Cr_3 の部分代数群として極大である.

定理に現われた記号を説明する。(P-1), (P-2), (E-1), (E-2), (1), (2), (4), (5), (6) は説明の必要がないと思われる. $F'_m = \mathrm{Spec}(\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-km))$, つまり $\mathbb{P}^1$ 上の line bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ である. $F'_{m,n}$ は $\mathbb{P}^1$ 上の vector bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ である, 即ち $F'_{m,n} = \mathrm{Spec}(\bigoplus_{k \geq 0} S^k(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)))$ である. $L'_{m,n}$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の line bundle $p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$, ここで p_i $(i=1,2)$ は projection である, つまり, $L'_{m,n} = \mathrm{Spec}(\bigoplus_{k \geq 0} p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-km) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-kn))$. E'^{ℓ}_m は次の exact sequence で定まる唯一つの F'_m 上の $\mathrm{Aut}^0(F'_m)$-homogeneous $\mathbb{A}^1$-bundle (Aut^0 は後で説明する),

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{F'_m} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_{F'_m}(2-\ell m) \longrightarrow 0.$$

ここで $\mathcal{O}_{F'_m}(2-\ell m) = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2-\ell m)$, $\pi : F'_m \to \mathbb{P}^1$ は自然な写像.

(i)の作用の定義に関しては[5], [7]を参照されたい。最後に$\mathrm{Aut}^0(\ )$について述べる。Xを非特異であるが、必ずしも完備でない代数多様体とする。Xの tangent bundle をTであらわす。もし、$H^0(X, T_X)$の次元が有限であれば、Xに効果的に作用する最大の連結, reduced 代数群を考えることができる[5]。その代数群を$\mathrm{Aut}^0 X$であらわす。定理にあらわれるAut^0をとる代数多様体はすべて、$H^0(X, T_X)$が有限次元であることが示される。

§2. Equivariant completion について.

有理曲面の相対極小モデルとCr_2に含まれる極大(連結)代数群が1:1に対応していた。つまり、Cr_2の極大部分代数群は、相対極小有理曲面Xがあって、$(\mathrm{Aut}^0 X, X)$として表わせるのであった。3次元有理多様体の相対極小モデルの定義をさぐるために、定理の作用の equivariant completion を調べるのは極めて興味のあることである。大部分のものは自然な equivariant compact化をもつ。まず問題になるのは(E-1), (E-2), (5)の場合である。(5)の場合より、(E-1), (E-2)の方が易しそうである。(E-1)と(E-2)はどちらも似ている。(E-1)をやってみよう。$(PGL_2, PGL_2/P)$より扱いが簡単なので$(SL_2, SL_2/P')$を考察する。ここで$\pi: SL_2 \to PGL_2$は自然な写像、$P' = \pi^{-1}(P)$である。

$SL_2 \longrightarrow GL(E)$を表現とし，$v\in E$を$\Gamma'$の固有ベクトルとする．さらに$v$は$SL_2$の固有ベクトルでないとする．$\Gamma'$は$SL_2$の部分代数群として極大であるので，$\Gamma'=\{g\in SL_2 \mid v\in \mathbb{P}(E)として, gv=v\}$となる．$SL_2/\Gamma'$の閉包$\overline{SL_2/\Gamma'}$に$SL_2$は作用する．つまり，equivariant compact化$(SL_2, \overline{SL_2/\Gamma'})=(SL_2, (E,v))$がえられた。射影的なequivariant compact化はすべて，この方法でえられる．特にEとして，SL_2の既約表現をとってみよう．即ちVをSL_2の2次の既約表現とすれば，ある整数nがあって$E=S^n(V)=\{V$上のn次斉次多項式全体$\}$となる．

定理（向井）．Eが既約であり，(E,f)が非特異ならば$\mathrm{Pic}(E,f)\cong\mathbb{Z}$であり，したがって$(E,f)$はFanoである．

この定理は森理論の応用として証明される．Γが正8面体群であるという仮定の場合，Γ'の半不変式は$f(x_1,x_2)=x_1x_2(x_1^4-x_2^4)$，$f$のHessian $W(x_1,x_2)=x_1^8+14x_1^4x_2^4+x_2^8$，$f$と$W$のJacobian $K=x_1^{12}-33x_1^8x_2^4-33x_1^4x_2^8+x_2^{12}$で表わせる．$(S^6(V),f)$は非特異であることがわかる．$(S^8(V),W)$，$(S^{12}(V),K)$も非特異であろうかと講演では言ったが，そうではなく両方とも特異である．
$(S^6(V),f)=SL_2/\Gamma' \cup SL_2/\mathbb{G}_m \cup SL_2/B$ とSL_2-orbitに分かれる．
$(S^8(V),W)$は$(S^6(V),f)$をSL_2/Bを中心としてblow-upし$\overline{SL_2/\mathbb{G}_m}$

る $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ を $\mathbb{P}$ につぶしたものである．$(S^8(V), W) = SL_2/p' \cup SL_2/G_m \cup SL_2/B$ と SL_2-orbit に分解する．$(S^{12}(V), K)$ は $(S^6(V), \dagger)$ を2回 $\mathbb{P}^1$ で blow-up し，2つの $\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ を $\mathbb{P}$ につぶすことによって得られる．$(S^{12}(V), K)$ も $SL_2/p' \cup SL_2/G_m \cup SL_2/B$ と SL_2-orbit に分解する．以上 compact化の研究は向井氏との共同研究による．

問 $(SL_2, SL_2/P)$ の equivariant compact化 $(SL_2, (S^n(V), \ell))$ が non-singular になれば $(SL_2, (S^6(V), \dagger))$ と同型か？

向井氏の上の結果を使えば，問の仮定があれば $(SL_2, (S^n(V), \ell))$ は Pic $\cong \mathbb{Z}$，Fano であるので，Ishikovski の分類を使っても解答が出せそうであるが，彼の分類の過程には論理的欠陥があるのが発見されたので使用しない方がよい．彼がある case は生じないと主張しているが，それが正しくないことが向井氏によって示された．反例は実に $SL_2/\text{Icosahedral}$ の12次式による equivariant compactification によってあたえられる(森ー向井氏による)．

参考文献

[1] Enriques, F. e Fano, G.: Sui gruppi di trasformazioni cremoniane dello spazio, Annali di Matématica pura ed applicata, s. 2ª, tom. 15, 1897, 59–98.

[2] Fano, G: I gruppi di Jonquières generalizzati, Atti della R.

Acc. di Torino, vol. 33°, 1898, 221-271.

[3] Umemura, H.: Sur les sous-groupes algébriques primitifs du groupe de Cremona à trois variables, Nagoya Math. J. vol. , 198 , .

[4] ————: Maximal algebraic subgroups of the Cremona group of three variables, Nagoya Math. J. vol. , 198

[5] ————: de Jonquières変換の分類(準備中).

[6] Weber, H.: Lehrbuch der Algebra II, Reprinted by Chelsea Publishing comp. , New York.

[7] 梅村 浩: 3変数Cremona群に含まれる連結代数群について, 第3回代数セミナー報告集, 1981.