数理解析研究所講究録
第 449 巻 1982 年 119-138

Analysis of the Unsteady Navier-Stokes Equations Based on Green's Function Approach

名大 工 桑原 真二
名大 工 M. U. Farooq Shaikh

§1. 基礎方程式

2次元の Navier-Stokes 及び連続の方程式系は流れの関数 ψ および渦度 ω をもちいて次のように書き表わすことができる。

$$\frac{1}{R}\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{R}\nabla^2\omega \qquad (1\cdot1)$$

$$\nabla^2\psi = -\omega \qquad (1\cdot2)$$

ここで座標 (x,y)，時間 t，ψ，ω はそれぞれ L, L^2/ν, UL, U/L で無次元化してある。U, L は代表的速さ，長さ ν は動粘性率である。

§2. 数学的定式化

Laplace オペレーターおよび随伴熱伝導オペレーターに対する Green 関数 $G_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$, $G_2(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')$ を導入する。

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 G_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \equiv \delta(x-x')\,\delta(y-y')\\&\left(\nabla^2+\frac{\partial}{\partial t}\right) G_2(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t') = \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,\delta(t-t')\end{aligned}\right\} \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in D \qquad (2\cdot1)$$

$$\left.\begin{aligned}&G_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = G_2(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t') = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\partial D,\ \boldsymbol{x}'\in D+\partial D\\&G_2(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t') = 0 \qquad t\to\infty\end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot2)$$

Dは2次元の開領域，∂DはDの境界である。

次の2つのGreenの定理：

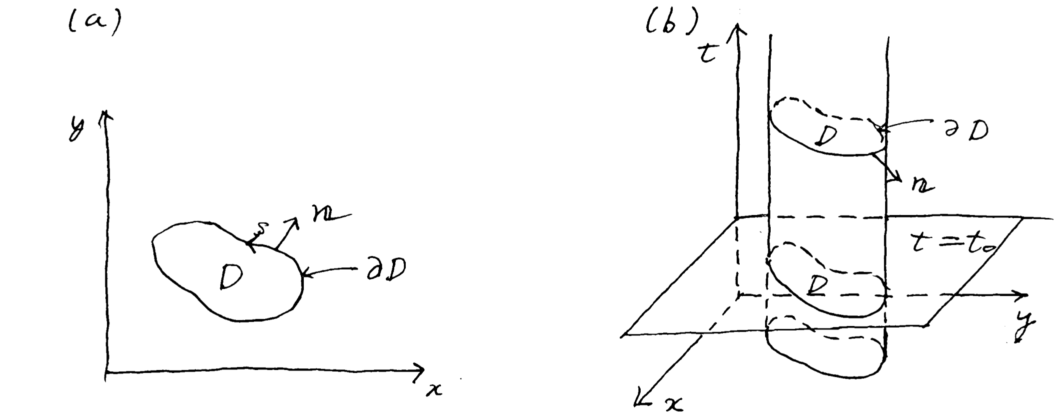
$$\iint_D (v'\nabla'^2 u' - u'\nabla'^2 v')\, d^2\boldsymbol{x}' = \int_{\partial D}\left(v'\frac{\partial u'}{\partial n'} - u'\frac{\partial v'}{\partial n'}\right) ds' \qquad (2\cdot3)$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\iint_D \left[v'\left(\nabla'^2-\frac{\partial}{\partial t'}\right)u' - u'\left(\nabla'^2+\frac{\partial}{\partial t'}\right)v'\right] d^2\boldsymbol{x}'\,dt'$$
$$= \int_{t_0}^{\infty}\int_{\partial D}\left(v'\frac{\partial u'}{\partial n'} - u'\frac{\partial v'}{\partial n'}\right) ds' - \iint_D \left[u'v'\right]_{t_0}^{\infty} d^2\boldsymbol{x}' \qquad (2\cdot4)$$

を考える。n'は∂Dにおける外向き法線である。(2·3)において

$$u' = \psi(\boldsymbol{x}';t) \qquad v' = G_1(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})$$

(2·4)において



第1図 Greenの定理の適用される領域 (a):(2·3)，(b):(2·4)

$$u' = \omega(\mathbf{x}', t'), \quad v' = G_2(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)$$

とおくと

$$\psi(\mathbf{x}, t) = -\iint_D \omega(\mathbf{x}', t)\, G_1(\mathbf{x}', \mathbf{x})\, d^2\mathbf{x}' + \int_{\partial D} \psi(s', t) \frac{\partial}{\partial n'} G_1(s', \mathbf{x})\, ds' \tag{2.5}$$

$$\omega(\mathbf{x}, t) = -R\int_{t_0}^{t} \iint \frac{\partial(\psi', \omega')}{\partial(x', y')}(t')\, G_2(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}'\, dt'$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{\partial D} \omega(s', t') \frac{\partial G_2}{\partial n'}(s', t'; \mathbf{x}, t)\, ds'\, dt'$$

$$-\iint_D \omega(\mathbf{x}', t_0)\, G_2(\mathbf{x}', t_0; \mathbf{x}, t)\, d^2\mathbf{x}' \tag{2.6}$$

をうる。こゝで s は ∂D にそっての長さ，n は ∂D の外向き法線，$\psi(s, t)$ は $\mathbf{x} \to s\,(\in \partial D)$ の値，$\frac{\partial}{\partial n'} G_2(s', t'; \mathbf{x}, t)$ は $G_2(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)$ の $\mathbf{x}' = s'$ における外向き法線方向の微分である。

$\psi(s', t')$, $\omega(s', t')$ $(t_0 \leq t' \leq t)$ および $\omega(\mathbf{x}, t_0)$ が与えられれば，(2.5), (2.6) から $\psi(\mathbf{x}, t)$, $\omega(\mathbf{x}, t)$ を求めることができる。初期値問題を考えるばあい，$\omega(\mathbf{x}, t_0)$ は初期値として与えられ，∂D が流線のばあいには $\psi\,(=0)$ も与えられている。しかし，$\omega(s', t')$ は直接には与えられず，一般に ψ についてのもう一つの条件 $\partial\psi/\partial n$ = 接線速度を与えることにより方程式を解いて，決定されることになる。

境界条件：

$$\left.\begin{aligned} \psi(s, t) &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial n}(s, t) &= f(s, t) \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

が与えられている。ωの表式(2·6)を(2·5)に代入し、(2·7)の第2の境界条件をもちいると

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\partial D}\omega(s',t')H_1(s',t';s,t)\,ds'dt' = -f(s,t)$$
$$+R\int_{t_0}^{t}\iint_D \frac{\partial(\psi',\omega')}{\partial(x',y')}(t')\,H_2(\mathbf{x}',t';s,t)\,d^2\mathbf{x}'$$
$$+\iint_D \omega(\mathbf{x}',t_0)\,H_2(\mathbf{x}',t_0;s,t)\,d^2\mathbf{x}' \qquad (2\cdot8)$$

$$\left.\begin{aligned} H_1(s',t';s,t) &= \iint_D \frac{\partial}{\partial n'}G_2(s',t';\mathbf{x}'',t)\frac{\partial}{\partial n}G_1(\mathbf{x}'',s)\,d^2\mathbf{x}'' \\ H_2(\mathbf{x}',t';s,t) &= \iint_D G_2(\mathbf{x}',t';\mathbf{x}'',t)\frac{\partial}{\partial n}G_1(\mathbf{x}'',s)\,d^2\mathbf{x}'' \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot9)$$

をうる。(2·8)において $\omega(s',t)$ は未知で($\omega(s',t')$ $(t'<t)$ は既知)これに対する特異積分方程式である。

§3. 2次元の箱の中の流れ

川口[2]は3方の壁が停止し一方の壁が一定速度で動く長方形の2次元の箱の中の定常流の数値計算を行った。この問題をgreen関数をもちいる方法で前回解いた[1]。Dが長方形のばあいの $G_1(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ は鏡像の方法によって容易にもとめられ、その複素解析関数：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{l,m=-\infty}^{\infty}\left[\log(z-z'_{lm})-\log(z-\bar{z}'_{l-m})+\log(z+z'_{lm})\right.$$
$$\left.-\log(z+\bar{z}'_{l-m})\right] \qquad (3\cdot1)$$

の実数部で表わされる。ここで

$$
\left.\begin{aligned}
&z = x+iy, \quad \bar{z} = x-iy \\
&z'_{lm} = z' + 2lb + 2mi, \quad \bar{z}'_{lm} = \bar{z}' + 2lb - 2mi
\end{aligned}\right\} \quad (3.2)
$$

である。(x,y)は長方形の高さ（y方向）で規格され、したがってbは長方形の巾である。(3.1)は2重周期関数であり、結局楕円関数 ϑ_1 で表わされる。G_1は又z'の解析関数としても表わされる。これをまとめると

$$
\left.\begin{aligned}
&G_1(x,y;x',y') = \mathcal{R}e\, F(z,z') = \mathcal{R}e\, F_1(z,z') \\
&F(z,z') = \frac{1}{2\pi}\log\frac{\vartheta_1(\alpha(z-z'))\,\vartheta_1(\alpha(z+z'))}{\vartheta_1(\alpha(z-\bar{z}'))\,\vartheta_1(\alpha(z+\bar{z}'))} \\
&F_1(z,z') = \frac{1}{2\pi}\log\frac{\vartheta_1(\alpha(z-z'))\,\vartheta_1(\alpha(z+z'))}{\vartheta_1(\alpha(\bar{z}-z'))\,\vartheta_1(\alpha(\bar{z}+z'))} \\
&\alpha = \frac{1}{2b}
\end{aligned}\right\} \quad (3.3)
$$

となる。F_1はz'の解析関数である。したがって微分演算は次のように表わされる：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}G_1(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \mathcal{R}e\frac{\partial}{\partial x}F(z,z') = \mathcal{R}e\frac{dF}{dz} \\
&\frac{\partial}{\partial y}G_1(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \mathcal{R}e\, i\frac{\partial}{i\partial y}F(z,z') = \mathcal{R}e\, i\frac{dF}{dz} = -\mathcal{I}m\frac{dF}{dz} \\
&\frac{\partial}{\partial x'}G_1(\mathbf{x};\mathbf{x}') = \mathcal{R}e\frac{dF_1}{dz}, \quad \frac{\partial}{\partial y'}G_1(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -\mathcal{I}m\frac{dF_1}{dz}
\end{aligned}\right\} \quad (3.4)
$$

熱伝導および随伴熱伝導オペレーターに対する基本解 $\hat{F}_2(\mathbf{x},t)$, $F_2(\mathbf{x},t)$

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{F}_2(\mathbf{x},t) = \delta^2(\mathbf{x})\,\delta(t) \\
&\left(\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial t}\right)F_2(\mathbf{x},t) = \delta^2(\mathbf{x})\,\delta(t)
\end{aligned}\right\} \quad (3.5)
$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{F}_2(\mathbf{x},t)&=0 \qquad t\to-\infty\\ F_2(\mathbf{x},t)&=0 \qquad t\to\infty\end{aligned}\right\}$$

は

$$\left.\begin{aligned}\hat{F}_2(\mathbf{x},t)&=-\frac{Y(t)}{4\pi t}\,e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}}\\ F_2(\mathbf{x},t)&=\frac{Y(-t)}{4\pi t}\,e^{\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}}=\hat{F}(\mathbf{x},-t)\end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

となる。$Y(t)$ は Heaviside 関数：

$$Y(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \qquad (3.7)$$

である。ここで

$$F(\mathbf{x},t)=\sum_{l,m=-\infty}^{\infty}F_2(\mathbf{x}-2bl\mathbf{e}_1-2m\mathbf{e}_2,t) \qquad (3.8)$$

とおくと Green 関数 G_2 は

$$\left.\begin{aligned}G_2(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')&=F(\mathbf{x}'-\mathbf{x},t'-t)-F(\bar{\mathbf{x}}'-\mathbf{x},t'-t)\\ &\quad-F(-\mathbf{x}'-\mathbf{x},t'-t)+F(-\bar{\mathbf{x}}'-\mathbf{x},t'-t)\\ \bar{\mathbf{x}}'&=x'\mathbf{e}_1-y'\mathbf{e}_2\end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

となる。$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ は x および y 方向の単位ベクトルである。

計算にあたっては、空間、時間を等間隔に分割し、格子点の値を考える。時間は $t_0=t-N\Delta t$, $t-(N-1)\Delta t$, $\cdots$, $t-\Delta t$, t, 空間は $\mathbf{x}_{lm}=(\Delta x\,l,\Delta y\,m)$ $(l=0,\cdots,L,\ m=0,\cdots,M)$, とくに境界の点は s_p $(p=0,\cdots,2L+2M-1)$ と分割する。s_p は

$$\left.\begin{aligned}
&s_p \longleftrightarrow x_{p0} && 0 \le p \le L \\
&s_p \longleftrightarrow x_{L\,p-L} && L \le p \le L+M \\
&s_p \longleftrightarrow x_{p-L-M,\,M} && L+M \le p \le 2L+M \\
&s_p \longleftrightarrow x_{0\,p-2L-M} && 2L+M \le p \le 2L+2M \quad (s_{2L+2M}=s_0)
\end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

の対応となる。 $n(t)$, $l(x)$, $m(y)$ の対応する格子点の値は

$$\left.\begin{aligned}
&f^n_{lm} \quad (n=0,\cdots,N;\ l=1,\cdots,L-1;\ m=1,\cdots M-1) \\
&\qquad :\text{内部の点} \\
&f^n_p \quad (n=0,\cdots,N;\ p=0,\cdots,2L+2M-1): \\
&\qquad :\text{境界点}
\end{aligned}\right\} \quad (3.11)$$

とかく。

(2.8) は特異積分方程式であり、左辺の $H_1(s',t';s,t)$ の $t'=t$ に特異性をもつ。そこで左辺の時間積分を

$$\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt = \frac{1}{2} f^N \Delta t + \sum_{n=1}^{N-1} f^n \Delta t + \int_{t-\Delta t/2}^{t} f(t)\,dt$$

と近似する。更に境界積分を格子点に分割して、その中の第1辺 $(y=0)$ 上にある積分の1格子分を

$$I_{p'p} \equiv \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t} \int_{s_{p'}-\Delta x/2}^{s_{p'}+\Delta x/2} \omega(s',t')\, H_1(s',t';s,t)\, ds'dt'$$

$$= \omega(s_{p'},t) \int_{t-\Delta t/2}^{t} \int_{s_{p'}-\Delta x/2}^{s_{p'}+\Delta x/2} H_1(s',t';s,t)\, ds'dt'$$

と近似する。 H_1 中の $\frac{\partial}{\partial n'} G_2(s',t';x'',t)$ は $t'\approx t$ のときのその主要部

$$\frac{y''}{2\pi(t-t')^2}\, e^{-\frac{(x''-x')^2+y''^2}{4(t-t')}}$$

でおきかえ、時間について積分を実行した結果,

$$I_{p'p}=\frac{2}{\pi}\int_{s_{p'}-\Delta x/2}^{s_{p'}+\Delta x/2}\int_0^{\Delta y/2}\int_{s_{p'}-\Delta x/2}^{s_{p'}+\Delta x/2}\frac{1}{(x''-x')^2+y''^2}\, e^{-\frac{1}{2\Delta t}\{(x''-x')^2+y''^2\}}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}G_1(x'', s)\, d^2x'', ds' \qquad (3 \cdot 12)$$

をうる。とくに $p'=p$ $(x''=s)$ のときには $\frac{\partial}{\partial n}G_1(x'', s)$ をその主要部

$$\frac{1}{\pi}\frac{y''}{(x''-x)^2+y''^2}$$

で近似して

$$I_{pp}=\frac{2}{\pi^2}\int_{s_{p'}-\Delta x/2}^{s_{p'}+\Delta x/2}\int_0^{\Delta y/2}\int_{s_{p'}-\Delta x/2}^{s_{p'}+\Delta x/2}\frac{y''^2}{(x''^2+y''^2)\{(x''-x')^2+y''^2\}}$$

$$e^{-\frac{1}{2\Delta t}\{(x''-x')^2+y''^2\}}\, dx''dy''dx' \qquad (3 \cdot 13)$$

をうる。

積分方程式中の記号を対応する格子点の値に改める。

$$\frac{\partial}{\partial n'}G_2(s', t'; x'', t) \longrightarrow DG2^n_{p'(l'', m'')}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}G_1(x'', s) \longrightarrow DG1_{(l'', m'')p}$$

$$G_2(s', t'; x'', t) \longrightarrow G2^n_{p'(l'', m'')}$$

$$H_1(s', t'; s, t) \longrightarrow H1^n_{p'p}$$

$$H_2(x', t'; s, t) \longrightarrow H2^n_{(l', m')p}$$

$$t-t'=n\Delta t$$

そこで (2·8) の積分方程式は

$$\sum_{p'=1}^{2L+2M} I_{p'p}\,\omega_{p'}^{0} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{p'=1}^{2L+2M}\left(H1_{p'p}^{n'}\,\Delta t^{n}\Delta_{p'}\right)\omega_{p'}^{n} = -f_{p}^{0}$$

$$+R\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{L-1}\sum_{m=1}^{M-1}\left(H2_{(l',m')p}^{n}\,\Delta t^{n}\Delta x\Delta y\right)J_{(l',m')}^{n}$$

$$+\sum_{l=1}^{L-1}\sum_{m=1}^{M-1}\left(H2_{(l',m')p}^{N}\,\Delta x\Delta y\right)\omega_{l'm'}^{N} \qquad (3\cdot14)$$

$$\left.\begin{aligned}
H1_{p'p}^{n} &= \sum_{l=1}^{L-1}\sum_{m=1}^{M-1} DG2_{p'(l'',m'')}^{n}\,DG1_{(l'',m'')p}\,\Delta x\cdot\Delta y\\
H2_{(l',m')p}^{n} &= \sum_{l=1}^{L-1}\sum_{m=1}^{M-1} G2_{(l',m')(l'',m'')}^{n}\,DG1_{(l'',m'')p}\,\Delta x\Delta y\\
J_{(l',m')}^{n} &= \left.\frac{\partial(\psi',\omega')}{\partial(x',y')}(t')\right|_{\substack{t'=t-n\Delta t\\ x'=x_{l'm'}}}
\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot15)$$

となる。これは ω_p^0（t における境界の渦度分布）に対する代数方程式である。

§4. 円柱をすぎる定常及び非定常の流れ

§2で行った解析を円柱をすぎる流れの外部問題について適用する。その前に定常の問題を考える。定常の問題を考えるばあい，渦度の運動方程式において非線形項をまったく落したLaplaceオペレーターのgreen関数から始めると収束しないという問題（Stokesのパラドックス）が起るので随伴Oseenオペレーターのgreen関数から考える。

Navier-Stokes および連続の方程式を規格化した形で

$$\left.\begin{aligned} \left(\nabla^2 - 2k\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega &= -2k\frac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(x,y)} - 2k\frac{\partial\omega}{\partial x} \\ \nabla^2\psi &= -\omega \\ 2k = Ua/\nu &= R/2 \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

とかく。次の Green 関数 G_3, G_4 を考える。

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 G_3(\mathbf{x},\mathbf{x}') &= \delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ \left(\nabla^2 + 2k\frac{\partial}{\partial x}\right)G_4(\mathbf{x},\mathbf{x}') &= \delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ G_3(\mathbf{x},\mathbf{x}') = G_4(\mathbf{x},\mathbf{x}') &= 0 \qquad \mathbf{x}\in\partial D,\ \mathbf{x}'\in D+\partial D \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

こゝで D は円柱の外部, ∂D は円周および無限遠である。G_3 は

$$\left.\begin{aligned} G_3(\mathbf{x},\mathbf{x}') &= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{r'\mathbf{x}-\mathbf{x}'/r'}\right| \\ r = |\mathbf{x}| &\qquad r' = |\mathbf{x}'| \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

となる。次に

$$\left.\begin{aligned} \left(\nabla^2 + 2k\frac{\partial}{\partial x}\right)F_4(\mathbf{x}) &= \delta^2(\mathbf{x}) \\ F_4(\mathbf{x}) = 0 &\qquad |\mathbf{x}| \longrightarrow \infty \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

の基本解は

$$F_4(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi}e^{-kx}K_0(kr) \tag{4.5}$$

である。 Green 関数 G_4 は $\mathbf{x}=\mathbf{x}'$ に (4.5) を, 円周上に F_4 を分布させる方法で求めることができ、その結果

$$G_4(\mathbf{x},\mathbf{x}') = F_4(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \frac{1}{2\pi}e^{-k(x-x')}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{J_l(k)}{K_l(k)} K_l(kr)K_l(kr')e^{il(\theta-\theta')} \tag{4.6}$$

とうる。そこで積分方程式は

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\omega(\theta')H_3(\theta',\theta)\,d\theta' = -2\sin\theta - 2k\iint\left(\frac{\partial(\psi',\omega')}{\partial(x',y')}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial x'}\omega(x')\right)H_4(x',\theta)\,d^2x'\\
&H_3(\theta',\theta) = \iint_D \frac{\partial}{\partial r'}G_4(\theta',x'')\frac{\partial}{\partial r}G_3(x'',\theta)\,d^2x''\\
&H_4(x',\theta) = \iint_D G_4(x',x'')\frac{\partial}{\partial r}G_3(x'',\theta)\,d^2x''
\end{aligned}\right\}\quad(4.7)
$$

となる。流れの関数 ψ，渦度 ω は

$$
\left.\begin{aligned}
&\psi(x) = \left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta - \iint_D \omega(x')G_3(x',x)\,d^2x'\\
&\omega(x) = -\int_{\partial D_1}\omega(\theta')\frac{\partial}{\partial r'}G_4(\theta',x)\,d\theta'\\
&\qquad -2k\iint_D\left(\frac{\partial(\psi',\omega')}{\partial(x',y')} + \frac{\partial}{\partial x'}\omega(x')\right)G_4(x',x)\,d^2x'
\end{aligned}\right\}\quad(4.8)
$$

となる。∂D_1 は円周上を表わす。

急に一定速度で動きだしたばあいの非定常の流れを次に考える。基礎方程式は

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(\nabla^2 - 2k\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\omega = -2k\frac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(x,y)} - 2k\frac{\partial\omega}{\partial x}\\
&\qquad\qquad \nabla^2\psi = -\omega
\end{aligned}\right\}\quad(4.9)
$$

である。随伴非定常 Oseen オペレーターの基本解：

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(\nabla^2 + 2k\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)F_5(x,t) = \delta^2(x)\,\delta(t)\\
&\quad F(x,t) = 0 \qquad\qquad |x|\to 0\\
&\quad F(x,t) = 0 \qquad\qquad t\to +\infty
\end{aligned}\right\}\quad(4.10)
$$

は

$$F_5(\boldsymbol{x},t)=\frac{Y(-t)}{4\pi t}e^{-kx+k^2t+\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}} \tag{4.11}$$

となる。

$$\left.\begin{aligned}&\left(\nabla^2+2k\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)G_5(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')=\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t')\\&G_5(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')=0\qquad \boldsymbol{x}\in\partial D\ ,\ \boldsymbol{x}'\in D+\partial D\\&G_5(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')=0\qquad t\to\infty\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

を満足する Green 関数 G_5 を Laplace 変換をもちいて求めると

$$G_5(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')=F_5(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}';t-t')+\frac{Y(-t)}{(2\pi)^2}e^{-k(x-x')}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{J_l(\sqrt{k^2-p})}{K_l(\sqrt{k^2-p})}K_l(\sqrt{k^2-p}\,r)K_l(\sqrt{k^2-p}\,r')$$
$$e^{il(\theta-\theta')}e^{pt}dp \tag{4.13}$$

となることがわかる。

$\omega(\theta,t)$ に対する積分方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}\int_{\partial D_1}\omega(\theta',t')H_5(\theta',t';\theta,t)\,d\theta'dt'=2\sin\theta\\&\quad-2k\int_{t_0}^{t}\iint_D\left(\frac{\partial(\psi',\omega')}{\partial(x',y')}(t')+\frac{\partial}{\partial x'}\omega(\boldsymbol{x}')\right)H_6(\boldsymbol{x}',t';\theta,t)\,d^2\boldsymbol{x}'dt'\\&\quad+\iint_D\omega(\boldsymbol{x}',t_0)H_6(\boldsymbol{x}',t_0;\theta,t)\,d^2\boldsymbol{x}'\\&H_5(\theta',t';\theta,t)=\iint_D\frac{\partial}{\partial r'}G_5(\theta',t';\boldsymbol{x}'',t)\frac{\partial}{\partial r}G_3(\boldsymbol{x}'',\theta)\,d^2\boldsymbol{x}''\\&H_6(\boldsymbol{x}',t';\theta,t)=\iint_D G_5(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}'',t)\frac{\partial}{\partial r}G_3(\boldsymbol{x}'',\theta)\,d^2\boldsymbol{x}''\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

となる。 ψ, ω は

$$\left.\begin{aligned}
&\psi(x,t) = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta - \iint_D \omega(x',t)\, G_3(x',x)\, d^2x' \\
&\omega(x,t) = -2k\int_{t_0}^{t}\iint_D \left(\frac{\partial(\psi',\omega')}{\partial(x',y')}(t') + \frac{\partial}{\partial x'}\omega(x',t')\right) \\
&\quad G_5(x',t';x,t)\, d^2x'\, dt' + \int_{t_0}^{t}\int_{\partial D_1} \omega(\theta',t') \\
&\quad \frac{\partial}{\partial r'} G_5(\theta',t';x,t)\, d\theta'\, dt' - \iint_D \omega(x,t_0) \\
&\quad G_5(x',t_0;x,t)\, d^2x'
\end{aligned}\right\} \quad (4.16)$$

となる。

§5. むすび

この論文では2次元非定常の Navier-Stokes 方程式の初期値問題を green 関数をもちいて、積分方程式に帰着させ解くことを考えた。えられた積分方程式は非線形特異積分方程式である。箱の中の流れについて数値計算を行い、$R=0$ (第2図), $R=100$ (第3図), $R=200$ (第4図)のばあいの流線(a), 等渦度線 (b) の時間的発展をおめた。いずれも上の壁が急に一定速度で動き出したばあいである。いずれのばあいにも $t=0.1$ 位で定常解に達するようである。差分法等で箱の中の $R=200$ の定常解はまだ求まっていないがこの方法では十分定常とみなされる解がえられた。

一般にNavier-Stokes方程式のような放物形偏微分方程式の初期値問題を差分法で解ければ，境界条件を合わすために時間の各ステップで繰りかえし計算を必要とするが，この方法ではgreen関数の性質によってその必要はなく，計算時間を節約することができる。

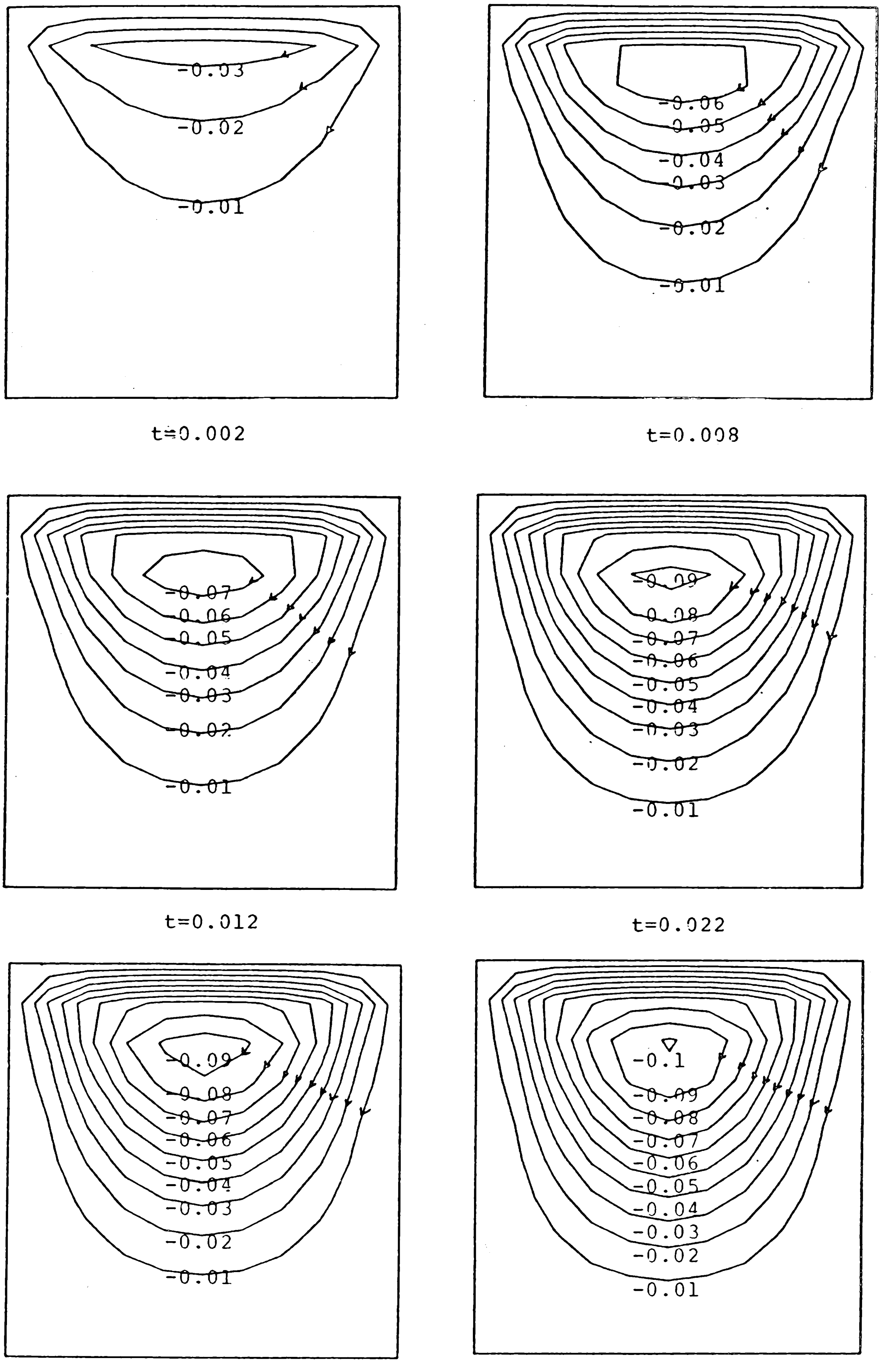
参考文献:

1) Farooq, M. U. and S. Kuwabara: Analysis of the Navier-Stokes Equations Based on Green's Function Technique, 京大数理解析研講究録 393 (1980) 84.

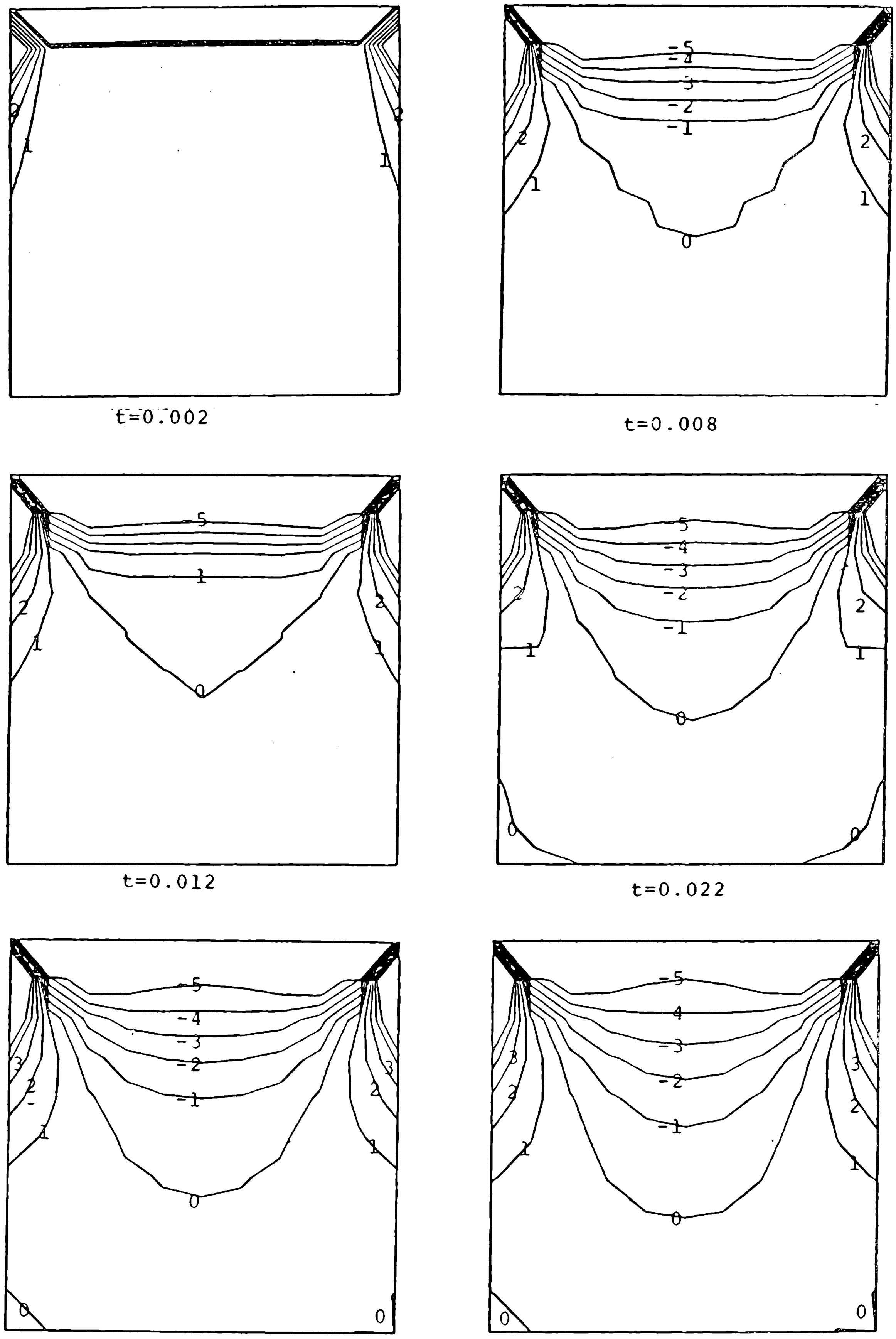
2) Kawaguti, M., JPSJ 16 (19610 2307.

3) Mills, R. D., JFM 70 (1977) 609.

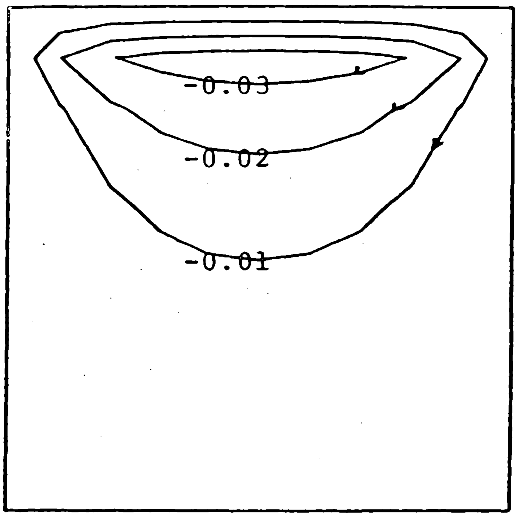
4) Ozawa, S., JPSJ 38 (1975) 889.



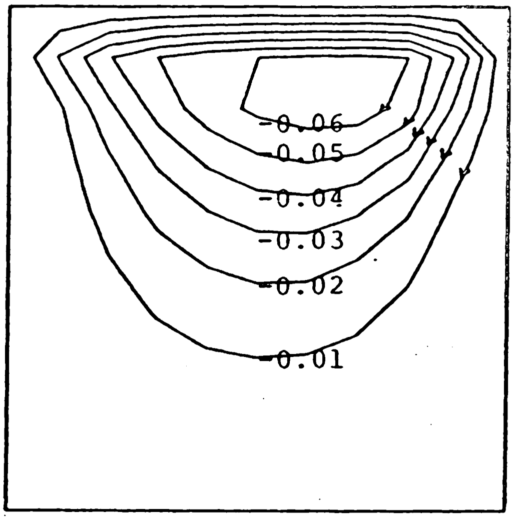
第2図(a) STREAM LINES AT R = 0



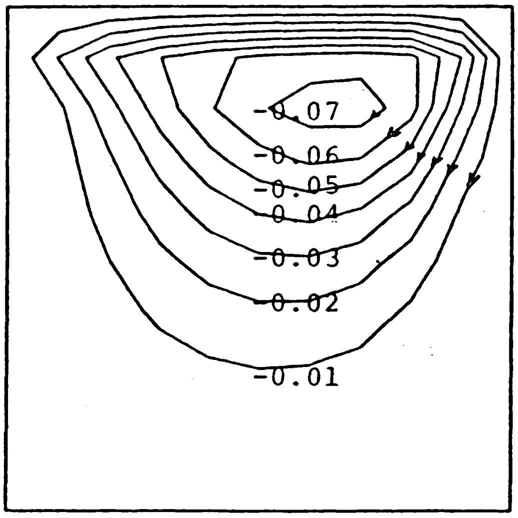
第2図(b) EQUI-VORTICITY LINES AT R= 0



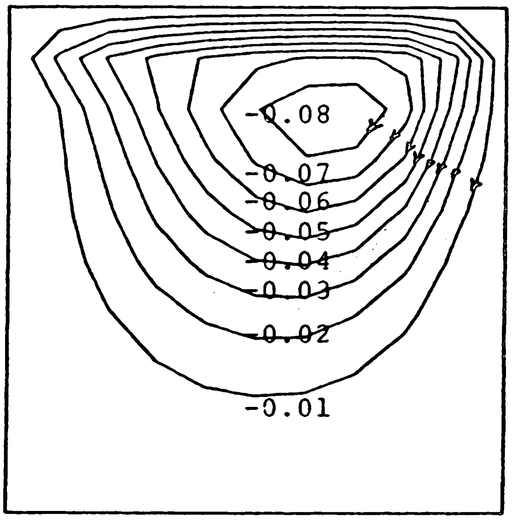
t=0.002



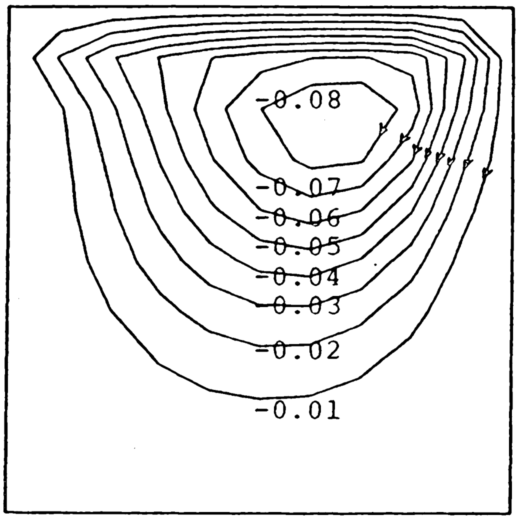
t=0.008



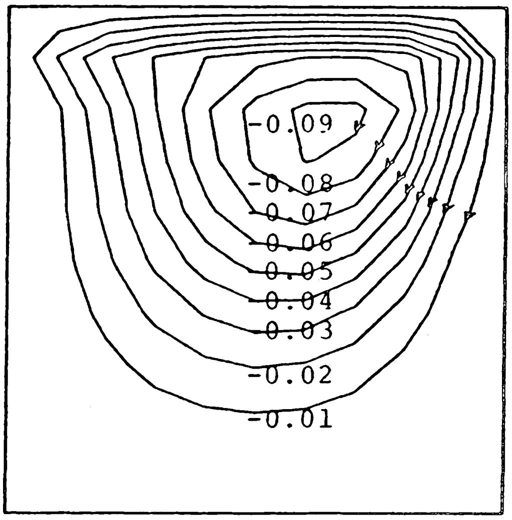
t=0.012



t=0.022



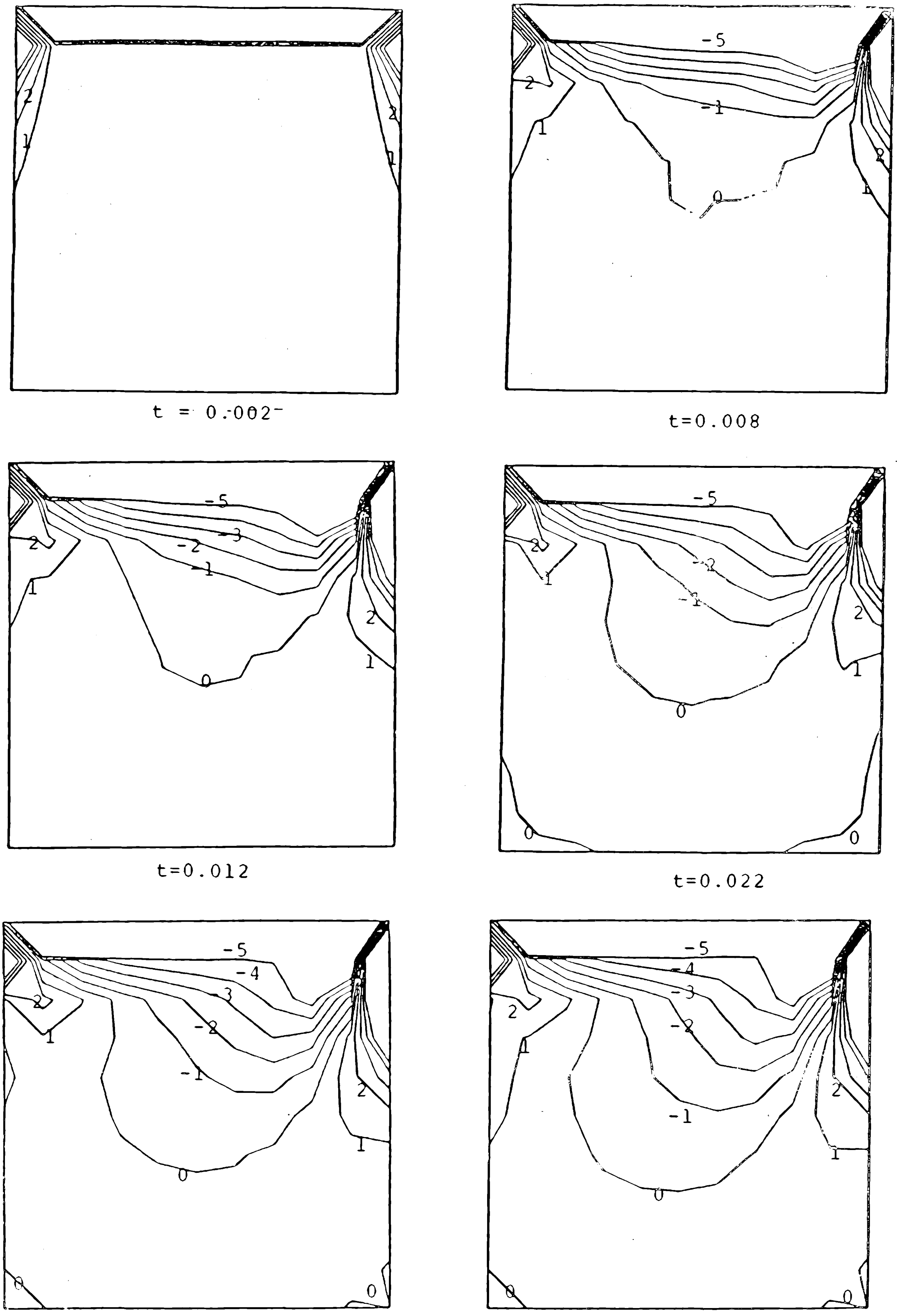
t=0.03



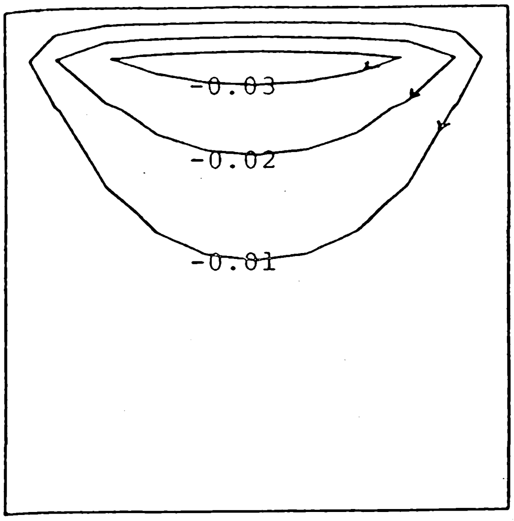
t=0.1

SREAM LINES AT R = 100

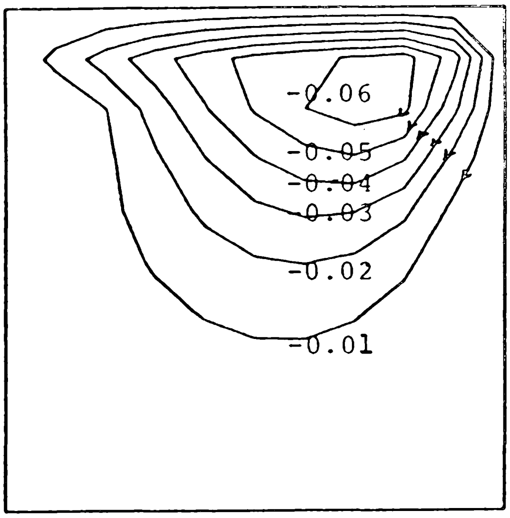
第3図 (a)



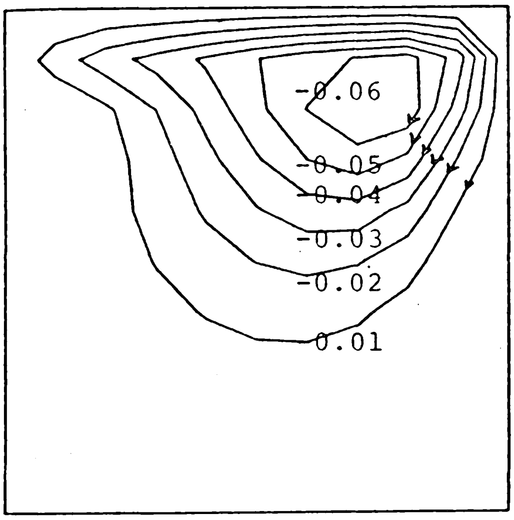
第3図(b)　EQUI-VORTICITY LINES AT R = 100



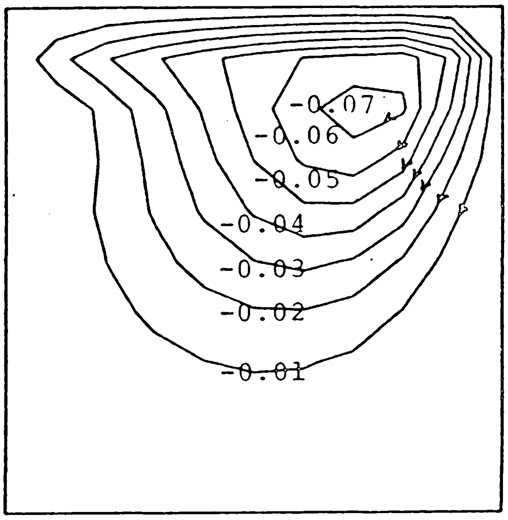
t=0.002



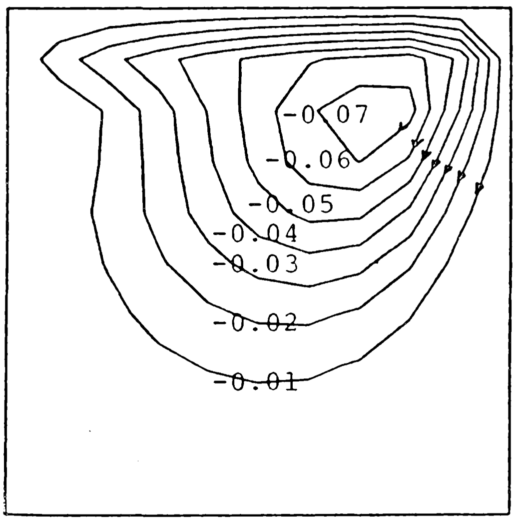
t=0.008



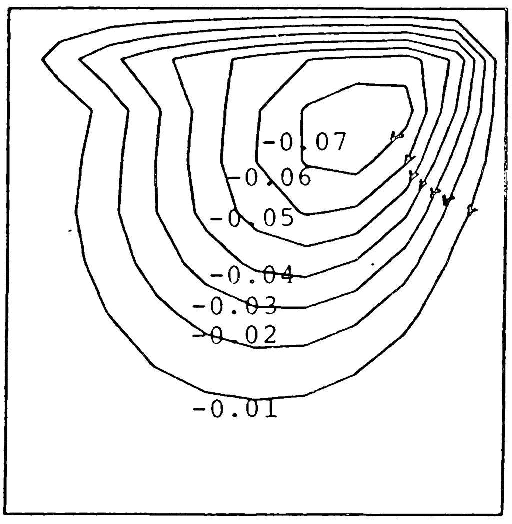
t=0.012



t=0.022

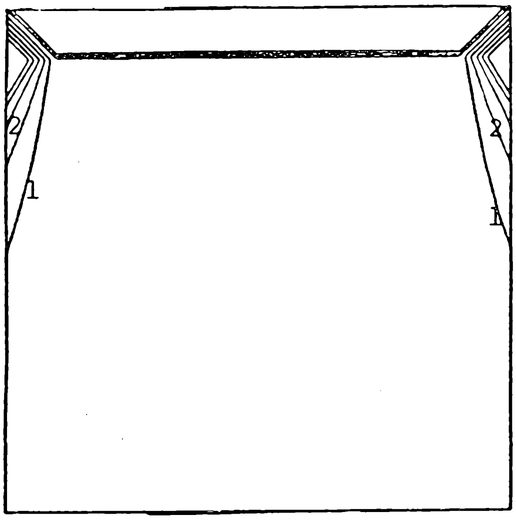


t=0.03

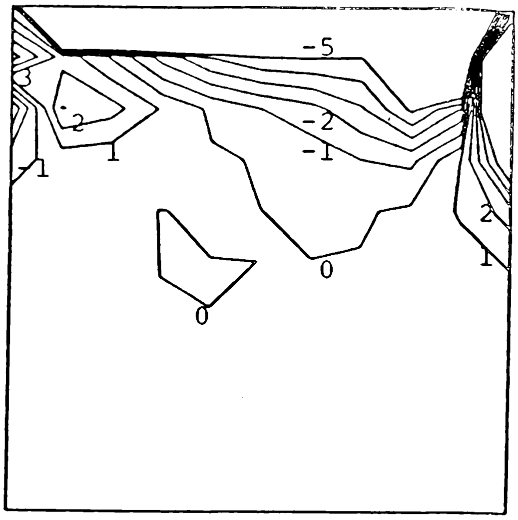


t=0.22

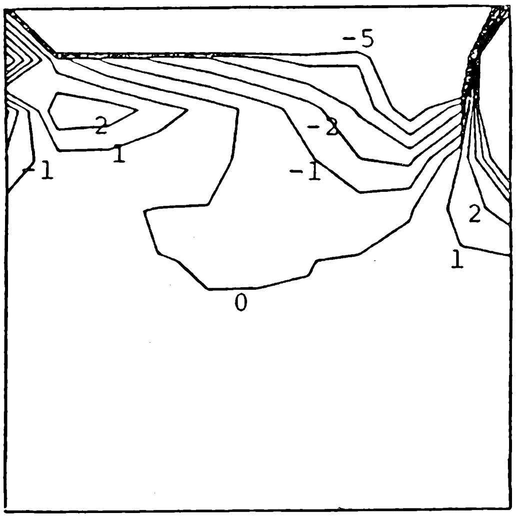
才4図 (a) STREAM LINES AT R = 200



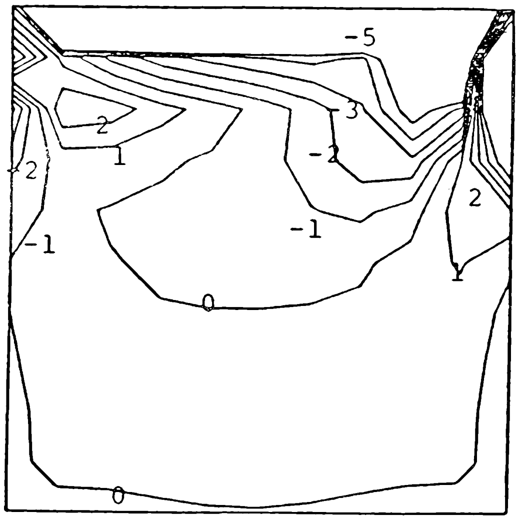
t=0.002



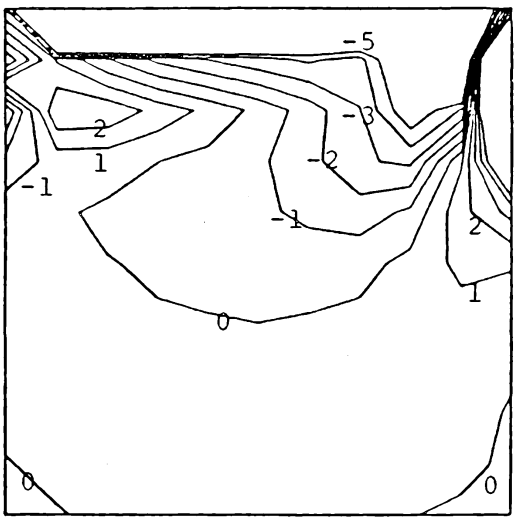
t=0.008



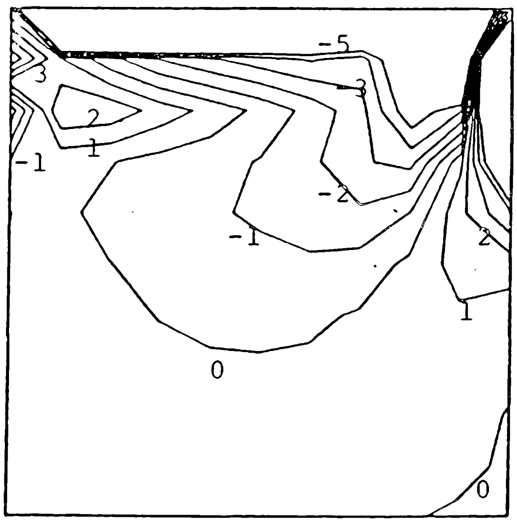
t=0.012



t=0.022



t=0.030



t=0.22

第4図(b) EQUI-VORTICITY LINES AT R = 200