数理解析研究所講究録
第449巻 1982年 217-230

音と渦の相互作用

九大 工　　神部 勉

1. はじめに

静止流体中の物体に音波が入射するとき，その音波は散乱される．すなわち，入射波の他に，物体の存在によって放射される散乱波が現われる．音波の散乱は固体の存在によるのみでなく，非一様の流れ場によっても散乱される．乱流による音の散乱は，最初，大気中を伝播する音の減衰機構として注目された．大気中での音の減衰が，粘性・熱伝導などの分子起源の減衰では説明できない程に大きいからである．[1,2] 乱流による音の散乱は，Monin & Yaglom[3] および Tatarskii[4] の文献に詳述されている．その解析法は，基礎方程式を音の変数について線形化する摂動法で，そこでは，乱流場は不規則な（しかし定常と仮定される）散乱媒質として扱われる．

他方，Lighthill[5] および Kraichnan[6] は空力音の方程式から出発して，波動方程式の非同次項の中で，流れ場と音場の

相互作用を表わす項のみを取り出し，その散乱源からの散乱を解析した．この方法は，散乱場が定常のときは前の方法と一致するが，場が非定常のときにも適用できる利点がある．2次元の散乱問題として，直線渦による音の散乱がO'Shea[7]およびCandel[8]によって解析された．ここでは軸対称の渦輪による音の散乱の公式を求めるが，その前に一般の非定常場による散乱波の導出をしよう．

2．散乱方程式と散乱波の表現

Lighthill[9]はその空力音の理論において，流体運動の基礎方程式が，外力がないとき，省略なしに次の非同次波動方程式に変換されることを示した：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho - c_0^2\nabla^2\rho = \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}T_{ij}, \quad T_{ij} = \rho u_i u_j + p_{ij} - c_0^2\rho\delta_{ij}, \quad (1)$$

ここで t は時間，$x_i\,(i=1,2,3)$ は直角座標，ρ は密度，$u_i(x,t)$ は速度場，p_{ij} は stress tensor，c_0 は静止流体中の音速である．

流体は非粘性と仮定し，流れは低Mach数とする．流れの代表的速度を U とするとき，$M=U/c_0 \ll 1$ の条件がなりたつとする．また無擾動状態では温度は一様とすると，断熱関係式 $dp = c_0^2\,d\rho$ より，T_{ij} の中の $p_{ij}-c_0^2\rho\delta_{ij}$ からの寄与は消える．従って，$T_{ij}=\rho u_i u_j$ とすると，式(1) は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho - c_0^2\nabla^2\rho = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\rho u_i u_j) \tag{2}$$

となる．速度の場u_iは一般に，非圧縮の solenoidal な横成分 u_i^T (rotational) と，圧縮性の縦成分 u_i^L (irrotational) とに分解できる：$u_i = u_i^T + u_i^L$．このとき Reynolds stress 項は

$$u_i u_j = u_i^T u_j^T + (u_i^T u_j^L + u_i^L u_j^T) + u_i^L u_j^L \tag{3}$$

と展開できる．ここで

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}^T = 0, \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}^T = \boldsymbol{\omega} \neq 0; \qquad \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}^L \neq 0, \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}^L = 0.$$

横の場$\boldsymbol{u}^T$は渦度分布$\boldsymbol{\omega}$で特徴づけられ，空間的に局在した'渦流れ'で，無限遠では十分速やかに減衰すると仮定する．

一般にベクトル場は，$|\boldsymbol{x}| \to \infty$のとき，$|\boldsymbol{x}|^{-2}$あるいはもっと速く減少するならば，上の分解が可能であることが示される.[10] しかし音の散乱問題では，入射波や散乱波はこのような条件を一般には満たしていない．従って，全ベクトルからそのような成分をまず引き去る必要がある．残りの場については分解は一意的である．このような操作をしてから，再び各成分を合成すれば，上のように分解された全ベクトル場が得られる．

式 (3) の右辺第1項は，solenoidal 場の2次の非線形効果

を表わし，これは流れによる音の発生に関与する項である．ところが中の２項は流れ（T）と音（L）の場の相互作用を表わし，従ってこれが散乱源を表わしているとみなされる．最後の項は，非線形性による入射波形の自己変形および acoustic streaming に関与する項である．以下では中の相互作用項のみに注目し，音波の振幅は十分小さいと仮定する．従って，第１項と最後の項は省略する．この他に密度の変動 $\rho'=\rho-\rho_0$（ρ_0 は静止密度）に由来する相互作用項がある．すなわち，(2) の右辺の（ ）内の項で，音波成分につき１次の項は，(3) の中項に ρ_0 を乗じたもの，および $\rho' u_i^T u_j^T$ である．ところが後者の項は前者の項に比べて小さい．それは $O(u_i^T)=U$，$O(u_i^L)=\delta$，$O(\rho'/\rho_0)=\delta/c_0$ とおくと，

$$\frac{O(\rho' u_i^T u_j^T)}{O(\rho_0 u_i^T u_j^L)}=\frac{\frac{\delta}{c_0}\rho_0 U U}{\rho_0 U \delta}=M \ll 1 \qquad (4)$$

となるからである．

このようにして，流れと相互作用する音の圧力 p を支配する方程式は，以上のことと (2) 式より

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p-\nabla^2 p=2\rho_0\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u_i^T u_j^L \qquad (5)$$

と得られる．ここで断熱関係式 $dp=c_0^2\,d\rho$ を使った．この非同次波動方程式の解は，Green 関数 $1/(4\pi c_0^2 r)$ を使って，

直ちに次の形に書ける：

$$p(\boldsymbol{x},t) = p_* + \frac{1}{4\pi c_0^2}\int \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} 2\rho_0 u_i^T u_j^L\right]_{t-\frac{r}{c_0}} d\boldsymbol{y}, \qquad (6)$$

ここで，p_*は同次方程式 $p_{tt} - c_0^2 \nabla^2 p = 0$ の解で，$r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$である．

いま平面波が局在した渦流れに入射して，相互作用の結果散乱されるとする．このとき音圧pは入射波p_Iと散乱波p_sとの和として表わせよう：$p = p_I + p_s$．入射波p_Iは同次波動方程式を満たすことを使うと，散乱波p_sは(6)より，入射波長および流れ場の大きさに比べて十分遠方では，

$$p_s(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi c_0^2}\frac{n_i n_j}{|\boldsymbol{x}|}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \left[2\rho_0 u_i^T u_j^L\right]_{t-\frac{r}{c_0}} d\boldsymbol{y} \qquad (7)$$

と表わせる．ここで $n_i = x_i/|\boldsymbol{x}|$ はベクトル$\boldsymbol{x}$の方向余弦で，原点は流れの領域内にとってある．また次の漸近展開を使っている：

$$r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \sim |\boldsymbol{x}|\left(1 - \frac{n_i y_i}{|\boldsymbol{x}|} + \cdots\cdots\right), \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \approx \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{r}{c_0}\right)\frac{\partial}{\partial t} \approx -\frac{n_i}{c_0}\frac{\partial}{\partial t}.$$

散乱波の公式(7)は一般に任意の入射波に適用できるが，ここでは平面波が入射するとし，それがsolenoidalな流れ場$\boldsymbol{v}$ ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$) によって散乱される場合を考える．平面波の

波数 k_0, 振動数 $\omega_0 = k_0 c_0$ で，x_1方向に伝播しているとし，記号Iを使って次のように表わす：

$$\text{圧力：}\quad p_I = \varepsilon e^{i(k_0 x_1 - \omega_0 t)}, \tag{9}$$

$$\text{速度：}\quad u_{Ii} = u_I \delta_{i1}, \quad u_I = \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0} e^{i(k_0 x_1 - \omega_0 t)}. \tag{10}$$

音波の振幅 ε は小さくて，それによる solenoidal 場の変化は省略する近似をすると，u_i^T は無摂動の流れ場で与えられる：

$$u_i^T = v_i(\boldsymbol{x}, t). \tag{11}$$

さらに散乱波 p_s は p_Iに比べて十分小さいとし，(7) 式の u_j^L は u_{Ij} でおき代えられるとする（Born 近似）。このとき (10), (11) を (7) に代入して，

$$p_s(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\varepsilon}{2\pi c_0^3} \frac{n_i n_1}{|\boldsymbol{x}|} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \left[v_i(\boldsymbol{y}, t) e^{ik_0(y_1 - c_0 t)} \right]_{t - \frac{r}{c_0}} d\boldsymbol{y}, \tag{12}$$

を得る．ここで，$n_1 = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i} = \cos\theta$ で，$\boldsymbol{i}$ はx_1方向の単位ベクトルで，θ は $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{i}$ の間の角である．(12) 式の [ ] 内の時間に遅延時間 $t - r/c_0$ を代入して，(8) の展開を使うと，

$$p_s(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\varepsilon}{2\pi c_0^3} \frac{\cos\theta}{|\boldsymbol{x}|} e^{ik_0|\boldsymbol{x}|} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{-i\omega_0 t} \int v_n(\boldsymbol{y}, t - \frac{r}{c_0}) e^{-i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{y}} d\boldsymbol{y} \tag{13}$$

となる．ここで

$$\boldsymbol{K} = k_0(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{i}), \tag{14}$$

$v_n = v_i n_i$ は散乱方向 $\boldsymbol{n}$ の速度成分である．

式 (13) の積分は，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}, t)$ の Fourier成分を使うと別の形に書き変えられる．すなわち

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}, t) = \frac{1}{2\pi}\int \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}, \omega)\, e^{i\omega t} d\omega, \quad \boldsymbol{V}(\boldsymbol{k}, \omega) = \int \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}, \omega)\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}} d\boldsymbol{y}$$

によって，Fourier成分 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}, \omega)$，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{k}, \omega)$ を導入すると，

$$\begin{aligned}\int v_n\left(\boldsymbol{y}, t-\frac{r}{c_0}\right) e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{y}} d\boldsymbol{y} &= \frac{1}{2\pi}\iint v_n(\boldsymbol{y}, \omega)\, e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c_0}\right)} e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{y}} d\omega\, d\boldsymbol{y} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int V_n(\boldsymbol{\kappa}_*, \omega)\, e^{i\omega\left(t-\frac{|\boldsymbol{x}|}{c_0}\right)} d\omega \qquad (15)\end{aligned}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{\kappa}_* = \boldsymbol{\kappa} - (\omega/c_0)\boldsymbol{n}$．これを (13) に代入すると

$$p_s(\boldsymbol{x}; t) = \frac{\varepsilon}{2\pi c_0^3}\frac{\cos\theta}{|\boldsymbol{x}|} e^{ik_0|\boldsymbol{x}|}\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{-i\omega_0 t}\frac{1}{2\pi}\int V_n(\boldsymbol{\kappa}_*, \omega)\, e^{i\omega\left(t-\frac{|\boldsymbol{x}|}{c_0}\right)} d\omega \qquad (16)$$

あるいは

$$p_s(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\varepsilon}{2\pi c_0^3}\frac{\cos\theta}{|\boldsymbol{x}|} e^{-i\omega_0\left(t-\frac{|\boldsymbol{x}|}{c_0}\right)}\frac{1}{2\pi}\int (\omega_0-\omega)^2 V_n(\boldsymbol{\kappa}_*, \omega)\, e^{i\omega\left(t-\frac{|\boldsymbol{x}|}{c_0}\right)} d\omega \qquad (17)$$

を得る．これは散乱波を散乱場 $\boldsymbol{v}$ の Fourier成分で表わしている．この式は非定常場でも成りたつ式である．

もし散乱場が定常とすると，(13) 式は

$$p_s(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\varepsilon\omega_0^2}{2\pi c_0^3}\frac{\cos\theta}{|\boldsymbol{x}|} V_n(\boldsymbol{\kappa})\, e^{-i\omega_0\left(t-\frac{|\boldsymbol{x}|}{c_0}\right)} \qquad (18)$$

となる．この式と同等な表現が文献 3 および 4 にもみられる．この式の著しい特徴は，散乱波が波数 $\boldsymbol{\kappa}$ の Fourier成分 $V_n(\boldsymbol{\kappa})$ だ

けに依存することである．波数Kは(14)式で定義されるが，この関係式は，結晶による回折理論でのBraggの法則と同じである．流れ場のFourier成分$V(K)e^{iK\cdot x}$は，波長$2\pi/|K|$の周期性を有し，格子定数$2\pi/|K|$の正弦的回折格子となっているのである．[3,4]

散乱波の式(16)あるいは(13)から次の性質が導かれる．音圧p_sは$\cos\theta$に比例することから，

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad で \qquad p_s = 0 \tag{19}$$

となる． さらに(16)より

$$\theta = \pi \quad で \qquad p_s = 0 \tag{20}$$

も知られる．すなわち，後方散乱は0となる．この後者の性質はsolenoidal条件 $\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0$ の直接の結果である．この条件はFourier成分が横波 $\boldsymbol{k}\cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{k},\omega)=0$ であることを示す．後方散乱では$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{i}$とおくと，$\boldsymbol{K}_* = (2k_0 - \omega/c_0)\boldsymbol{n}$となり，従って横波の条件から

$$V_n(\boldsymbol{K}_*, \omega) = \boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{V}\left((2k_0 - \frac{\omega}{c_0})\boldsymbol{n}, \omega\right) = 0$$

となって，(20)が導かれる．(19),(20)の両性質は散乱場が非定常でもなりたつ．

3．渦輪による散乱

散乱公式(16)あるいは(17)は，渦輪による音の散乱問題に適用できる．渦輪は自分自身の誘導速度で前進運動するが，その速度を$\boldsymbol{U}$とすると，渦輪の速度場は$v_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{U}t)$と表わせよう．このときFourier成分は

$$
\begin{aligned}
V_i(\boldsymbol{k},\omega) &= 2\pi\, V_i(\boldsymbol{k})\ \delta(\omega+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}) \\
V_i(\boldsymbol{k}) &= \int v_i(\boldsymbol{y})\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}}\, d\boldsymbol{y}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

と書ける．これを(17)に代入して，整理すると，

$$
p_s(\boldsymbol{x},t) = \varepsilon\, f(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})\ e^{i\omega_s(t-|\boldsymbol{x}|/c_0)}\Big/|\boldsymbol{x}| \tag{22}
$$

を得る．ここで

$$
f(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}) = -\frac{1}{2\pi c_0^3}\cos\theta\,\frac{\omega_s^2}{1-M_n}\,V_n(\boldsymbol{K}_0) \tag{23}
$$

は散乱振幅 scattering amplitude と呼ばれる．また

$$
\left.
\begin{aligned}
&\omega_s = (1-\beta)\,\omega_0, \qquad \boldsymbol{K}_0 = \boldsymbol{K}_*(\omega=\beta\omega_0) = (1-\beta)k_0\boldsymbol{n} - k_0\boldsymbol{i}, \\
&\beta = \frac{M_1-M_n}{1-M_n}, \qquad M_1 = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{i}/c_0, \quad M_n = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}/c_0 .
\end{aligned}
\right\} \tag{24}
$$

散乱波の振動数ω_sは入射振動数ω_0と$\beta\omega_0$だけずれている．これはDoppler効果として説明できる．というのは，速度$\boldsymbol{U}$で運動している渦輪に，振動数ω_0の音波が$\boldsymbol{i}$方向に入射

すると，渦輪が受信する音の振動数 ω' は $\omega' = \omega_0(1-M_1)$ で与えられる．ω' は相互作用の振動数とみなすことができる．この相互作用の結果，速度 $\mathbf{U}$ で進行しながら，渦輪は ω' の振動数の音を放射すると考えると，$\boldsymbol{n}$ 方向で受ける音の振動数は $\omega'' = \omega'/(1-M_n) = \omega_0(1-M_1)/(1-M_n)$ となって，これは ω_s に等しいことがわかる．

特に，渦輪の速度が小さく，$M = U/c_0 \ll 1$ として，β, M_n を 1 に比べて省略できるときには，

$$f(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}) = -\frac{1}{2\pi c_0} k_0^2 \, V_n(K) \cos\theta \qquad (K_0 = K) \tag{24}$$

となる．このとき ω_s は ω_0 で近似でき，$K_0 = |K| = 2k_0 \sin\frac{\theta}{2}$ である．

$V_n(K)$ を得るために，渦輪の対称軸と一致する極軸を有する円柱座標 (x, σ, ϕ) を導入する．この座標系での流れ場は Stokes の流れ関数 $\Psi(x, \sigma)$ を使って表わすことができる：

$$v_x(y) = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\Psi, \qquad v_\sigma(y) = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\Psi,$$

$$\Psi(x, \sigma) = \frac{\Gamma}{2\pi}\sqrt{R}\sqrt{\sigma}\left\{\left(\frac{2}{\varsigma} - \varsigma\right)F(\varsigma) - \frac{2}{\varsigma}E(\varsigma)\right\}, \tag{25}$$

$$\varsigma^2 = 4R\sigma \Big/ \left\{x^2 + (\sigma + R)^2\right\}.$$

ここで，渦輪の半径を R，強さを Γ としている．また $F(\varsigma)$，$E(\varsigma)$ は第1種，2種の完全楕円積分である．x 軸に垂直な

(y, z)面において，κの射影κ_σの方向にy軸を選ぶことにすると，

$$V_x(\kappa) = \kappa_\sigma I\ , \quad V_y(\kappa) = -\kappa_x I, \quad V_z(\kappa) = 0 \qquad (26)$$

を得る．ここで，Iは次のように与えられる：

$$I = 2\pi \iint \Phi(x, \sigma)\, J_1(\kappa_\sigma \sigma)\, e^{-i\kappa_x x}\, dx\, d\sigma. \qquad (27)$$

4．散乱断面積

散乱の微分断面積$d\sigma$は，入射波の平均エネルギー流量密度I_0に対する，立体角$d\Omega$に散乱される平均エネルギー流量の比で定義される．すなわち

$$d\sigma = I_s\, |x|^2\, d\Omega \big/ I_0\ ,$$

ここでI_sは散乱波の強さで，(22)式を使うと，

$$I_s = \frac{1}{\rho_0 c_0}\, \overline{p_s^2} = \frac{\varepsilon^2}{2\rho_0 c_0} \left| f(n, i) \right|^2 \big/ |x|^2$$

また

$$I_0 = \frac{1}{\rho_0 c_0}\, \overline{p_I^2} = \frac{\varepsilon^2}{2\rho_0 c_0}$$

であるから，$d\sigma$は

$$d\sigma = \left| f(n, i) \right|^2 d\Omega \qquad (28)$$

となって，散乱振幅を使って表わされる．渦輪の速度が遅いときには，(24) によって

$$d\sigma = \frac{k_0^4}{4\pi^2 c_0^2} \left| V_n(K) \right|^2 \cos^2\theta \ d\Omega \qquad (29)$$

と与えられる．$V_n(K) = \boldsymbol{V}(K)\cdot\boldsymbol{n}$ を知るには (27) の積分を計算する必要がある．

散乱全断面積 σ は，(28) をすべての方向にわたって積分して得られる．特に遅い渦輪のばあいには

$$\sigma/\pi R^2 = (k_0 R)^4 M^2 \frac{4}{\pi L^2} J_* \ , \qquad M = \frac{U}{c_0} \qquad (30)$$

$$J_* = \frac{1}{\Gamma^2 R^4} \int \left| V_n(K) \right|^2 \cos^2\theta \ d\Omega .$$

となる．ここで渦輪の速度が

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R} L \quad , \quad L = \ln\frac{8R}{\delta} - \frac{1}{4}$$

と与えられることを使った．δ は渦核の半径である．(30) は渦輪の前進運動の Mach 数 M の2乗に比例して，σ が増加することを示している．

最後に比較のために，固体球（半径 R_s）の散乱断面積 σ_s，および乱流の断面積 σ_t を記しておこう．微分断面積は

$$d\sigma_s = \frac{k_0^4}{16\pi^2} \tau_s^2 \left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)^2 d\Omega \ , \quad \tau_s = \frac{4}{3}\pi R_s^3 \qquad (31)$$

これは $\lambda_0 \gg R_s$ のとき得られる[11]. また局所等方性乱流の体積 τ_t からの散乱は[3, 4]

$$d\sigma_t = \frac{k_0^4}{4\pi^2 c_0^2}(2\pi)^3 \tau_t \, F(\kappa_0) \cos^2\frac{\theta}{2} \cos^2\theta \, d\Omega \tag{32}$$

と与えられる. ここで $2\pi/L_0 \ll 2\pi/\kappa_0 \ll 2\pi/\eta$ (η は乱流の内部 scale で, L_0 は τ_t の長さ scale), $F(\kappa_0)$ は速度の2次相関のスペクトル関数である. (31)の固体球の散乱では, $\theta = \pi$ で最大の振幅が得られる. 全断面積は

$$\sigma_s / \pi R_s^2 = \frac{7}{9}(k_0 R_s)^4 \quad (k_0 R_s \ll 1), \quad 2 \quad (k_0 R_s \gg 1) \tag{33}$$

である. 計算の結果によると, (30)で与えられる渦輪の σ は, 適当な大きさの M に対して, 固体球の σ_s と同程度になることが示される.

REFERENCES

1) H. Sieg: Elektr. Nachr. Tech. 17 (1940) 193.

2) H. Dahl & O.Devik: Nature 139 (1937) 550.

3) A.S. Monin & A.M. Yaglom: Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of turbulence Vol.2 (The MIT Press, Massachusetts, 1975, translation from Russian) §26.

4) V.I. Tatarskii: The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation (National Technical Information Service, Springfield, Va., 1971, translation from Russian) [TT68-50464].

5) M.J. Lighthill: Proc. Cambridge Phil. Soc. 49 (1953) 531.

6) R.H. Kraichnan: J. Acoust. Soc. Am. 25 (1953) 1096.

7) S. O'Shea: J. Sound Vib. 43 (1975) 109.

8) S.M. Candel: J. Fluid Mech. 90 (1979) 465.

9) M.J. Lighthill: Proc. R. Soc. London A 211 (1952) 564.

10) H.B. Phillips: *Vector Analysis* (John Wiley & Sons, New York, 1933) Ch.8.

11) L.D. Landau & E.M. Lifshitz: *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, 1959) §76.