数理解析研究所講究録
第 450 巻 1982 年 1-22

Corank 2 の 5 重孤立特異点の分類と標準型

都立大・理　卜部東介

都立大・理　清水保弘

§1. 序説

特異点の理論において、孤立特異点を持つ正則関数芽 $f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ の分類は重要な課題の1つである。2つの正則関数芽 f, g は、正則同型 $\Phi:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^n,0)$ が存在して、$g=f\circ\Phi$ となるとき同値であるという（いわゆる right equivalence）。分類は、この同値関係により行なわれる。

孤立特異点であることから、各同値類中には、必ず多項式の形になっているものが存在する（有限確定性）。いくつかの同値類を集めたものを、特異点の class とよぶ。f を class K に属する多項式とし、いくつかの単項式 $e_1,\cdots,e_k$ による f の small perturbation $f_a=f+a_1e_1+\cdots+a_ke_k$ を考える（ここに $a=(a_1,\cdots,a_k)$ は $\mathbb{C}^k$ 内の 0 を含むある領域 D 内を動くとする）。$\{f_a\,;\,a\in D\}$ が、K に属するすべての同値類と交わり、K 中の各同値類 E に対して、$\{a\in D\,;\,f_a\in E\}$ が有限集合であり、かつ $\{a\in D\,;\,f_a\notin K\}$ が D 内で余次元 1 以上であるとき、$\{f_a\,;\,a\in D\}$ を class K の標準型とよ

ぶ。

Arnol'd [2], [3] は、modality（標準型に現われるパラメーターの個数）という観点から、関数芽の孤立特異点を扱い、系統的に特異点の class を分類して、modality 0,1,2 を持つ孤立特異点の標準型を決定した。このリストから、例えば、14個の modality 1 特異点の間の「奇妙な双対性」のような興味深い現象が観察される。このような現象をさらに追跡するためにも、Arnol'd からさらに前進して、modality 3, 4 を持つ孤立特異点を分類し、標準型を決定することは、有意義なことであろう（quasihomogeneous 特異点の場合は、吉永・鈴木 [5] でなされている）。

正則関数芽 $f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ を原点のまわりで巾級数表示したとき、その最低次項の次数を $\mathrm{ord}(f)$ と書き、f の Hessian の退化次数を $\mathrm{corank}(f)$ と書く。modality 3, 4 の孤立特異点を分類するに際して、第1段階として必要なのは、$\mathrm{corank}(f)=2$, $\mathrm{ord}(f)=5$ の孤立特異点（5重点）の分類であり、本稿ではこれを主題とする。分類の過程で、2つの定理（「因数分解定理」と「簡約化の基本定理」）が必要になる。本稿では、まずこれらの定理を定式化し、証明の概略を述べる。次に、定理の使い方を簡単かつ本質的な実例で説明する。そして最後に、計算して得られた標準型の

リストをページの許す限り与える。

§2. 最低次項の分類

孤立特異点の正則関数芽という枠組での分類は、形式的巾級数の範囲で行なってもよいことが知られているので、その形で以下定式化していく。

Fをn変数形式的巾級数環 $\mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_n]]$ の元とし、

$$F = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + (3\text{次以上})$$

とする（係数 a_{ij} は対称としておく）。Fの Hesse 行列 (a_{ij}) の退化次数 $m = n - \mathrm{rank}(a_{ij})$ を、Fの corank とよび corank(F) と書く。この時、次が重要である。

補題（一般化された Morse 補題）

$m = \mathrm{corank}(F)$

$\Rightarrow \quad \exists f \in \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_m]]$

s.t. (i) $\mathrm{ord}(f) \geqq 3$

(ii) $F \sim f + \sum_{i=1}^{n-m} (x_{m+i})^2$

ここに $\sim$ は形式的変数変換で移り合うことを示す。

こうして考察を、corank(F) だけの変数を持つ3次以上の巾級数に限定しても一般性を失わないことになる。ここでは、$\boxed{\mathrm{corank}(F) = 2}$ を仮定しよう。従って、$f = f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$，$\mathrm{ord}(f) \geqq 3$ と書くことにする。

4

Arnol'd [2], [3]では、 $\mathrm{ord}(f)=3, 4$ の場合，および、$\mathrm{ord}(f)=5$ であって、fの5次の項が $\prod_{i=1}^{5}(x-\alpha_i y)$（ここに $\alpha_i \neq \alpha_j$; $i \neq j$ とする）の場合に、fの標準型が完全に分類されている。本稿の主題は $\mathrm{ord}(f)=5$ の場合の完全な分類である。まず、容易な計算から次を得る。

定理（5次項の分類）

$f \in \mathbb{C}[[x,y]]$, $\mathrm{ord}(f)=5$ のとき、fの5次項 $j_5 f$ は、1次変換により次の形のいずれかになる。

$((1^5))$ $\quad x^4y + ax^3y^2 + bx^2y^3 + xy^4$

ここに $\Delta(a,b) = 4(a^3+b^3) - a^2b^2 - 18ab + 27 \neq 0$

$ab \neq 9$.

$((2,1^3))$ $\quad x^2y(x^2+axy+y^2)$

ここに $a^2-4 \neq 0$.

$((2^2,1))$ $\quad x^2y^2(x+y)$

$((3,1^2))$ $\quad x^3(x^2+y^2)$

$((3,2))$ $\quad x^3y^2$

$((4,1))$ $\quad x^4y$

$((5))$ $\quad x^5$

ここに、各形の記号は、5次項を非斉次化して5次方程式と見た時の根の分布を表わす。たとえば $((2,1^3))$ は2重根1個と、単根3個を意味する。$((1^5))$ からは、後述のリスト

で①と書かれる標準型が得られる(前述のようにArnol'dにより決定されており、彼はN_{16}型と命名している)。《$2, 1^3$》からは、標準型②が、《$2^2, 1$》からは標準型③が、《$3, 1^2$》からは、標準型④〜⑧が、《3, 2》からは標準型⑨〜⑬が、《4, 1》からは標準型⑭〜㉘が得られる。《5》は、㉙以降の標準型と対応する。

§3. 因数分解定理と簡約化の基本定理

前定理で5次項を見ると因数分解されている。この情報を活用して計算を容易にしてくれるのが次の定理である(この定理が有効なのは、2変数という特殊性によっている)。

定理(因数分解定理)

$A = \mathbb{C}[[x, y]]$ とおき、$f \in A$ を1つ固定する。変数x, yに、$\mathrm{weight}(x) = w \geq 1$, $\mathrm{weight}(y) = 1$ (ここに $w \in \mathbb{Z}$)と重みを入れ、これによって定義される重みつき次数によりAに filtration を入れる。この filtration の下で、fの最低次項をf_0とし、$f_0 = g_0 \cdot h_0$と因数分解されたとする。ただし、g_0, h_0は上の filtration での quasi-homogeneous 多項式で、共通因子を持たないと仮定する。このとき、g, $h \in A$が存在して、以下をみたす:

(i) 上の filtration の下で、

$$g = g_0 + (\text{高次})$$
$$h = h_0 + (\text{高次}),$$
(ii) $f = g \cdot h$ 。

証明は、g_0 と h_0 の終結式が ~~0である~~ 0でないことから出発して、帰納的に g と h を低次項から決定していけばよいので省略する。

こうして因数分解された各因子を順に変数変換で標準型に直していけばよい。その際の基本手続を与えるのが次の定理である（一般変数でも同様に成立するが、2変数の場合しか使わないので、2変数で定式化しておく）。まず記号準備。

$A = \mathbb{C}[[x,y]]$ とする。$wt(x) = w_1 \geqq 1$, $wt(y) = w_2 \geqq 1$ $(w_1, w_2 \in \mathbb{Z})$ により、A に filtration を入れる。すなわち、この filtration で測った $h \in A$ の order を $\mathrm{ord}_{(w_1,w_2)}(h)$ と書くことにすると、

$$A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$$
$$A_i = \{ h \in A \mid \mathrm{ord}_{(w_1,w_2)}(h) \geqq i \}$$

である。$\mathfrak{a} = A\frac{\partial}{\partial x} + A\frac{\partial}{\partial y}$ を形式的ベクトル場全体のなす A-module とする。A の filtration に応じて、$\mathfrak{a}$ にも filtration $\mathfrak{a} \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_{-2} \supset \mathfrak{a}_{-1} \supset \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \cdots$ を入れる。すなわち、

$$\theta \in \mathfrak{a}_p \overset{\text{def}}{\iff} \theta . A_q \subset A_{p+q} \quad (\forall q) 。$$

$f, g \in A$ $\quad$ ($\mathrm{ord}_{(w_1,w_2)}(f) = N$, $\mathrm{ord}_{(w_1,w_2)}(g) = M$) を固定し,

$$f = f_0 + f_1 + \cdots \qquad (f_p \in A_{N+p})$$

$$g = g_0 + g_1 + \cdots \qquad (g_q \in A_{M+q})$$

を A の filtration に関する斉次分解とする。

$\mathrm{Der}(\log g)$ を g の " log vector fields " 全体とする。

つまり $\quad \mathrm{Der}(\log g) \underset{\mathrm{def}}{=\!=} \{ \theta \in \mathfrak{a} \mid \theta g \in A g \}$。

ω を対応する自然な A - linear map $\mathrm{Der}(\log g) \to A$ とする。つまり、$\mathrm{Der}(\log g) \ni \theta$ に対し、$\theta g = \omega(\theta) g$。

<u>定理</u>(簡約化の基本定理)

上の記号の下で、次を仮定する。

《仮定》 (a) $\quad \theta \in \mathrm{Der}(\log g) \cap \mathfrak{a}_s$, $s \geq 1$.

(b) $\quad u = \theta(f) + \omega(\theta) f \in A_{N+d}$, $d \geq 1$.

[これは、s と d の定義であると考えてもよい]

このとき、$\varepsilon, \delta, w \in A$ が存在して以下をみたす:

(i) $\quad \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial x} + \delta \dfrac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{a}_s$,

(ii) $\quad g(x+\varepsilon, y+\delta) = w(x,y) \cdot g(x,y)$

(iii) $\quad f(x+\varepsilon, y+\delta) \cdot w(x,y)$

$$= f_0(x,y) + f_1(x,y) + \cdots + f_d(x,y) + u(x,y) + R.$$

ここに、$R \in A_{N+d+1}$。

定理の証明の前に、意味する所を説明しておく。まず(i)と仮定(a)より、$x \mapsto x+\varepsilon$, $y \mapsto y+\delta$ は形式的な変数変換を

与えることに注意する。すると、$(f\cdot g)(x,y)$を変数変換したものは、次のようになる：

$$(f\cdot g)(x+\varepsilon,\ y+\delta) = f(x+\varepsilon,y+\delta)\,w(x,y)\,g(x,y) \qquad [\text{by (ii)}]$$
$$=\Big(f_0(x,y)+f_1(x,y)+\cdots+f_d(x,y)+u(x,y)+R\Big)g(x,y) \quad [\text{by (iii)}]$$

今、gがすでに標準型に直されているとすると、uを適当にとっていくことにより、gの形を保ったままfを低次から逐次標準化できることを上の定理は保証しているのである。

$g=1$の場合は、Arnol'd [4] の「定理 $T_{r,p}$」を与える（Arnol'd [4] には証明がついていない！）。

定理の証明

$\theta = \alpha\dfrac{\partial}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial}{\partial y}$　$(\alpha,\beta\in A)$ とする。tをパラメーターとし、

$$\varphi=\varphi(x,y;t)=\varphi_0+\varphi_1 t+\varphi_2 t^2+\cdots$$
$$\psi=\psi(x,y;t)=\psi_0+\psi_1 t+\psi_2 t^2+\cdots$$

とおく（$\varphi_i,\ \psi_i\in A$）。

φ，ψについて次の微分方程式を立てる（θの生成する1パラメーター変換群のみたす微分方程式）。

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \alpha(\varphi,\psi) \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \beta(\varphi,\psi) \end{cases}$$

これを、$\varphi_0=x$，$\psi_0=y$ という初期条件で解くと、（形式）解は次の形で与えられる。

$$\begin{cases} \varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(x) \cdot t^{\nu} \\ \psi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(y) \cdot t^{\nu} \end{cases} 。$$

仮定 (a) より、任意の $\nu \geqq 0$ に対して

$$\mathrm{ord}_{(w_1, w_2)} \theta^{\nu+1}(x) > \mathrm{ord}_{(w_1, w_2)} \theta^{\nu}(x)$$

に注意すれば、φ, ψ に $t=1$ を代入できて、

$$\begin{cases} \varphi(x, y\,; 1) = x + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(x) \\ \psi(x, y\,; 1) = y + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(y) \end{cases}$$

が各々 A の元として定義できる。そこで、

$$\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(x), \quad \delta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \theta^{\nu}(y)$$

が求める A の元である。

まず、$\mathrm{ord}_{(w_1, w_2)} \varepsilon \geqslant s + w_1$, $\mathrm{ord}_{(w_1, w_2)} \delta \geqslant s + w_2$

ゆえ (i) は明らかである。

(ii) は次のようにして示される。

$$\begin{aligned} \frac{d g(\varphi, \psi)}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi, \psi) \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi, \psi) \frac{d\psi}{dt} \\ &= \alpha(\varphi, \psi) \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi, \psi) + \beta(\varphi, \psi) \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi, \psi) \\ &= (\theta g)(\varphi, \psi) \\ &= (\omega(\theta) g)(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

$$\therefore\ g(\varphi, \psi) = \exp\left(\int_0^t (\omega(\theta))(\varphi, \psi)\, dt \right) \cdot g(x, y)$$

ここで $t=1$ とおくと

$$g(x+\varepsilon, y+\delta) = \underbrace{\exp\left(\int_0^1 (\omega(\theta))(\varphi, \psi)\, dt \right)} \cdot g(x, y)$$

← これを $w(x, y)$ とおけばよい。

(iii) は次のようにして示される。まず、

$$\theta(f\cdot g) = \theta(f)g + f\cdot\theta(g)$$
$$= (\theta(f) + \omega(\theta)f)g = u\cdot g$$

に注意する。次に、$\mu = 0, 1, 2, \cdots$ に対して、

$$\theta^{\mu}(g) = P_{\mu}\cdot g \qquad (P_{\mu}\in A)$$

とおく。ただし $P_0 = 1$ で、$\mu \geqq 1$ なら $\mathrm{ord}_{(w_1, w_2)} P_{\mu} \geqq 1$ に注意しておく。すると、

$$
\begin{aligned}
& f(x+\varepsilon, y+\delta)\, w(x,y)\, g(x,y) \\
& \qquad\qquad (\mathrm{ii}) \\
&= f(x+\varepsilon, y+\delta)\cdot g(x+\varepsilon, y+\delta) \\
& \qquad\qquad \varepsilon, \delta \text{ の定義} \\
&= (f\cdot g)(\varphi(x,y;1), \psi(x,y;1)) \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\theta^{\nu}(f\cdot g) \\
& \qquad\qquad \text{上の注意} \\
&= f\cdot g + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\theta^{\nu-1}(u\cdot g) \\
&= f\cdot g + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{1}{\nu!}\frac{(\nu-1)!}{\mu!(\nu-\mu-1)!}\theta^{\nu-\mu-1}(u)\,\theta^{\mu}(g) \\
&= \left(f + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{1}{\nu!}\frac{(\nu-1)!}{\mu!(\nu-\mu-1)!}\theta^{\nu-\mu-1}(u)\,P_{\mu}\right)\cdot g(x,y)
\end{aligned}
$$

こうして、

$$
\begin{aligned}
& f(x+\varepsilon, y+\delta)\, w(x,y) \\
&= f + \sum_{\nu>\mu}\frac{1}{\nu}\frac{1}{\mu!(\nu-\mu-1)!}\theta^{\nu-\mu-1}(u)\cdot P_{\mu} \\
& \qquad\qquad \text{仮定 (b)} \\
&\equiv f + \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{(\mu+1)!}u\cdot P_{\mu} \pmod{A_{N+d+1}} \\
& \qquad\qquad \text{上の注意} \\
&\equiv f + u \pmod{A_{N+d+1}}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

§4. 計算の実例（定理の使い方）

§2の定理から先を具体的にどのように計算していくかを実例で説明する。5次項が《3, 2》型の場合を取り上げる。すなわち、$\boxed{j_5 f = x^3 y^2}$ から出発する。$wt(x) = wt(y) = 1$ の filtration を $A = \mathbb{C}[[x, y]]$ に入れると、因数分解定理から、

$$f = \varphi \cdot g \qquad \begin{cases} \varphi = x^3 + (4\text{次以上}) \\ g = y^2 + (3\text{次以上}) \end{cases}$$ を得る。

よく知られているように、$x \mapsto x + (2\text{次以上})$, $y \mapsto y + (2\text{次以上})$ の変数変換で、$g \sim y^2 + a x^{l+1}$ $(a \neq 0,\ l \geqq 2)$。

[ここで、かようなlが存在しなければ、孤立特異点に反す]

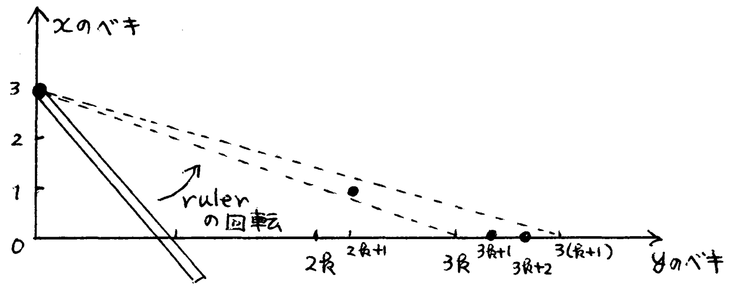
そこで、$f \sim (x^3 + \text{高次})(y^2 + a x^{l+1})$。

適当に、xとyをスカラー倍することにより、

$$\boxed{f \sim (x^3 + \text{高次})(y^2 + x^{l+1})}$$ を得る。

改めて、$\varphi = x^3 + \text{高次}$, $g = y^2 + x^{l+1}$ とおく。$f = \varphi \cdot g$。

φの形を調べていく。φに現われる単項式 $x^k y^\lambda$ を座標 (λ, k) でプロットして Newton 図形を作る。すでに $(0, 3)$ はφの形からプロットされている。$(0, 3)$ を支点に、"ruler" を反時計回りに回転させて、最初にぶつかるφの単項式を見る（Newton's ruler）。



帰納的にやればよいから、$k \geqq 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ として、$(0,3)$ と $(3k, 0)$ を結ぶ線より下には φ の単項式はないとする。この線および、$(0,3)$ と $(3(k+1), 0)$ を結ぶ線で囲まれた領域内の格子点を探すと3個ある。ruler はまず $(3k+1, 0)$ にぶつかる。φ に単項式 y^{3k+1} があれば、これを基に計算して、リストの標準型⑨を得る。これが φ の単項式でなければ、次に点 $(2k+1, 1)$ にぶつかる。これより標準型⑩を得る。ruler がここを通過すると、次に点 $(3k+2, 0)$ にぶつかる。これは標準型⑪に対応する。こうして領域内を ruler が通過し終わると、$(0,3)$, $(3(k+1), 0)$ を結ぶ線上に来る。もし、ここにも φ の単項式がなければ、再び次の領域で同じことをやればよいから、φ の単項式があるとしよう。$k+1$ を k と書き直す。つまり、$\underline{k \geqq 2}$ として、

$$\boxed{\varphi = x^3 + A x^2 y^k + B x y^{2k} + C y^{3k} + (\text{線より上の単項式})}$$

と仮定する。A, B, C はパラメーターであるが、ここで、$\alpha \neq 0$ として、$x \longmapsto x + \alpha y^k + (\text{高次})$, $y \longmapsto y + (\text{高次})$ という変数変換が、g の形を保ってできることに注意しよう。

実際、$\mathrm{Der}(\log g)$ の A-module としての生成元を求めると、

$$\begin{cases} \theta = 2x \dfrac{\partial}{\partial x} + (\ell+1) y \dfrac{\partial}{\partial y}, \\ \eta = 2y \dfrac{\partial}{\partial x} - (\ell+1) x^{\ell} \dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

となる。ここに $\omega(\theta) = 2(\ell+1)$, $\omega(\eta) = 0$。

$$\zeta = \frac{\alpha\, y^{k-1}}{2}\eta = \alpha\, y^{k}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{(l+1)}{2}\alpha\, x^{l} y^{k-1}\frac{\partial}{\partial y}$$

とおく。今、A に $wt(x) = 2$, $wt(y) = l+1$ という filtration を入れよう。これにより、g は quasi homogeneous となる。$\zeta \in \mathfrak{a}_{kl+k-2}$ $(kl+k-2 \geqq 1)$ に注意しよう。

基本定理の証明と同様の考え方で、微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{\xi}}{dt} = \alpha\, \tilde{\delta}^{k} \\ \dfrac{d\tilde{\delta}}{dt} = -\dfrac{(l+1)}{2}\alpha\, \tilde{\xi}^{l}\tilde{\delta}^{k-1} \end{cases}$$

を、初期条件 $\tilde{\xi}(0) = x$, $\tilde{\delta}(0) = y$ の下に解くと、解は

$$\begin{cases} \tilde{\xi}(x, y\,; t) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\zeta^{\nu}(x)\,t^{\nu} \\ \tilde{\delta}(x, y\,; t) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\zeta^{\nu}(y)\,t^{\nu} \end{cases}$$

となる。定理の証明と同様 $t=1$ を代入できて、

$$\begin{cases} \tilde{x} = \tilde{\xi}(x, y\,; 1) = x + \alpha\, y^{k} + (\text{上の filtration で高次}) \\ \tilde{y} = \tilde{\delta}(x, y\,; 1) = y + (\text{上の filtration で高次}) \end{cases}$$

が A の元として定義される。ここで、両者の高次項は、$wt(x) = k$, $wt(y) = 1$ なる filtration でも高次項であることに注意しておく。また、$\dfrac{dg}{dt}(\tilde{\xi}(t), \tilde{\delta}(t)) = (\zeta g)(\tilde{\xi}(t), \tilde{\delta}(t)) = 0$ ゆえ、$g(\tilde{\xi}(t), \tilde{\delta}(t))$ は t に依存せず、$g(x, y) = g(\tilde{x}, \tilde{y})$。よって、$x \mapsto \tilde{x}$, $y \mapsto \tilde{y}$ は g を保つ変数変換を定義する。

さて、φ に戻ると、上の形の変数変換により次の場合がおこる。ただし φ_0 を $wt(x) = k$, $wt(y) = 1$ の filtration で

φの最低次項とする。

$[1^3]$　$\varphi_0 \sim x^3 + a x^2 y^k + b x y^{2k}$　ただし $ab(a^2-4b) \neq 0$

$[2,1]$　$\varphi_0 \sim x^3 + a x^2 y^k$　ただし $a \neq 0$

$[3]$　$\varphi_0 \sim x^3$　（この場合は Newton's ruler で先へ）

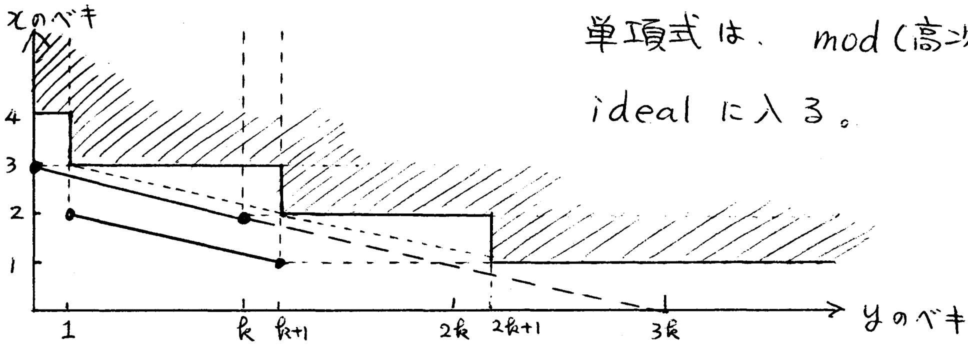
$[1^3]$ の場合からは、リストの標準形⑫が得られる（計算は以下と同様ゆえ略）。$[2,1]$ の場合をやる。

そこで、$\boxed{\varphi_0 = x^3 + a x^2 y^k \quad (a \neq 0)}$ とおく。ただし、filtration は $wt(x)=k$, $wt(y)=1$ とする。θ, η を前で求めた $Der(\log f)$ の生成元とする。基本定理を使うため、次の式を計算しておく。

$$\theta(\varphi_0) + \omega(\theta)\varphi_0 = (2l+8)x^3 + \big((k+2)(l+1)+4\big) a x^2 y^k$$

$$\eta(\varphi_0) + \omega(\eta)\varphi_0 = 6x^2 y + 4axy^{k+1} \underbrace{- k(l+1) a x^{l+2} y^{k-1}}_{\text{高次項}}$$

簡約化の基本定理は、これらで生成される ideal に mod（高次）で含まれる項は 0 にできることを示している。これは以下の図式計算で表現される： 図で斜線部分に含まれる単項式は、mod（高次）で ideal に入る。



こうして、簡約化の基本定理から、gを保つ変数変換で、

$$\varphi \sim \varphi_0 + \tilde{b} \cdot y^{3k+1}$$

ここに、$\tilde{b} = \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 y + \tilde{b}_2 y^2 + \cdots \in \mathbb{C}[[y]]$。ところが、$\varphi$は孤立特異点を持つべきであるから、$\tilde{b} \neq 0$。よって、ある$p \geqq 1$が存在して、

$$\varphi \sim \varphi_0 + \tilde{\tilde{b}} \cdot y^{3k+p}$$

ここに$\tilde{\tilde{b}} = \tilde{\tilde{b}}_0 + \tilde{\tilde{b}}_1 y + \cdots \in \mathbb{C}[[y]]$で、$\tilde{\tilde{b}}_0 \neq 0$。改めて、$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\tilde{b}} y^{3k+p}$とおく。

次に、$A\tilde{\theta} + A\eta$の元で、mod（高次）でφ_0を0にするものを考える。ここで$\tilde{\theta} = \theta + 2(l+1)$は（ベクトル場ではない）微分作用素である。

$$\tilde{\theta}(\varphi_0) = x^2 \left((2l+8)x + ((k+2)(l+1)+4) a y^k \right)$$

$$\eta(\varphi_0) \equiv 2xy\,(3x + 2ay^k) \quad \mathrm{mod}\ A_{2k+2}$$

に注意すると、スカラー倍を除いて、

$$\xi = 2y\,(3x+2ay^k)\,\tilde{\theta} - x\left((2l+8)x + ((k+2)(l+1)+4)ay^k\right)\eta$$

が、そのような作用素のうちorder最低のものとして一意に決まる。

$$\xi(\varphi) = \xi(\tilde{\tilde{b}}_0 y^{3k+p}) + 高次$$

$$\underset{\mathrm{mod}(A\tilde{\theta}+A\eta)(\varphi)}{\equiv} (0でない定数)\cdot y^{4k+p+1} + y^{4k+p+2}\cdot\gamma$$

$$(\gamma \in \mathbb{C}[[y]])。$$

ゆえ、$y\xi$, $y^2\xi$, $\cdots$ などを順次φに施して適当な1次結

合を作れば、結局 y^ν $(\nu \geqq 4k+p+1)$ はすべてideal に属す。よって基本定理から消せる。こうして、

$$\varphi \sim \varphi_0 + B \cdot y^{3k+p}$$

ここに、$B = b_0 + b_1 y + \cdots + b_k y^k$ $(b_0 \neq 0)$。

g の方と合わせると、次の標準型を得る：

$$\boxed{(x^3 + a x^2 y^k + B y^{3k+p})(y^2 + x^{l+1})}$$

ここに、$a \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $k \geqq 2$, $l \geqq 2$, $p \geqq 1$。これはリストの標準型⑬である。また、パラメーターの個数は、$k+2$ 個ゆえ、modality は、$k+2$ である。

このような繁雑な初等計算を、systematic に実行するには、スペクトル列を用いた議論が便利である（Arnol'd [4] を参照）が、準備にページ数を要するので、ここでは省略する。

§5. 標準型のリスト

以下で、§4のような計算の後に得られる corank 2 の5重孤立特異点の標準型を可能な限り掲げる。表の見方を説明すると、①②… などは標準型の番号である（適当な名前の案のある方はお教え下さい）。「条件」というのは、パラメーターに課せられる条件と、「ベキ」についての条件である。「m」は、modality を表わす。「μ」は Milnor 数で、

次のように定義される不変量である：

$$\mu=\mu(f)=\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x,y]] \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$ 。

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ などは指定された y の多項式を表わす。

corank 2 の 5 重孤立特異点の標準型

番号	標準形	条件	m	μ
①	$x^4y + ax^3y^2 + bx^2y^3 + xy^4 + cx^3y^3$	$\Delta(a,b) \neq 0$ $ab \neq 9$	3	16
②	$(x^2y + axy^2 + y^3 + bx^2y^2)(x^2 + cy^k)$	$k \geqq 3$ $(a^2-4)c \neq 0$	3	$k+14$
③	$x^2y^2(x+y) + ax^{p+5} + by^{q+5} + cy^{q+5}$	$q \geqq p \geqq 1$ $ab \neq 0$	3	$p+q+16$.

④ ～ ⑬ においては． $\mathbf{b} = b_0 + b_1 y + \cdots + b_k y^k$

④	$(x^3 + ay^{3k+1} + \mathbf{b}xy^{2k+1})(x^2+y^2)$	$a \neq 0$; $k \geqq 1$	$k+2$	$6(k+2)$
⑤	$(x^3 + axy^{2k+1} + \mathbf{b}y^{3k+2})(x^2+y^2)$	$a \neq 0$; $k \geqq 1$	$k+2$	$6(k+2)+1$
⑥	$(x^3 + ay^{3k+2} + \mathbf{b}xy^{2k+2})(x^2+y^2)$	$a \neq 0$; $k \geqq 1$	$k+2$	$6(k+2)+2$
⑦	$(x^3 + ax^2y^k + \mathbf{b}xy^{2k})(x^2+y^2)$	$k \geqq 2$ $ab_0(a^2-4b_0) \neq 0$	$k+2$	$6k+10$
⑧	$(x^3 + ax^2y^k + \mathbf{b}y^{3k+p})(x^2+y^2)$	$k \geqq 2$, $p \geqq 1$ $ab_0 \neq 0$	$k+2$	
⑨	$(x^3 + ay^{3k+1} + \mathbf{b}xy^{2k+1})(y^2 + x^{l+1})$	$a \neq 0$, $k \geqq 1$, $l \geqq 2$	$k+2$	
⑩	$(x^3 + axy^{2k+1} + \mathbf{b}y^{3k+2})(y^2 + x^{l+1})$	$a \neq 0$, $k \geqq 1$, $l \geqq 2$	$k+2$.	
⑪	$(x^3 + ay^{3k+2} + \mathbf{b}xy^{2k+2})(y^2 + x^{l+1})$	$a \neq 0$, $k \geqq 1$, $l \geqq 2$	$k+2$	
⑫	$(x^3 + ax^2y^k + \mathbf{b}xy^{2k})(y^2 + x^{l+1})$	$k \geqq 2$, $l \geqq 2$ $ab_0(a^2-4b_0) \neq 0$	$k+2$	
⑬	$(x^3 + ax^2y^k + \mathbf{b}y^{3k+p})(y^2 + x^{l+1})$	$k \geqq 2$, $l \geqq 2$, $p \geqq 1$ $ab_0 \neq 0$	$k+2$	

⑭ ～ ⑮ においては.　$\mathbf{a} = a_0 + a_1 y + \cdots + a_{k-1} y^{k-1}$
$\mathbf{b} = b_0 + b_1 y + \cdots + b_{2k-1} y^{2k-1}$

⑭	$(x^4 + y^{4k+1} + \mathbf{a} x y^{3k+1} + \mathbf{b} x^2 y^{2k+1}) y$	$k \geqq 1$	$3k$	$12k+7$
⑮	$(x^4 + x y^{3k+1} + \mathbf{a} x^2 y^{2k+1} + \mathbf{b} y^{4k+2}) y$	$k \geqq 1$	$3k$	$12k+8$

⑯ ～ ⑳ においては.　$\mathbf{a} = a_0 + a_1 y + \cdots + a_{k-1} y^{k-1}$
$\mathbf{b} = b_0 + b_1 y + \cdots + b_{2k} y^{2k}$

⑯	$(x^4 + y^{4k+2} + \mathbf{a} x y^{3k+2} + \mathbf{b} x^2 y^{2k+1}) y$	$k \geqq 1$. $b_0^2 - 4 \neq 0$	$3k+1$	$12k+10$
⑰	$(x^4 + x^2 y^{2k+1} + \mathbf{a} x y^{3k+2} + \mathbf{b} y^{4k+2+p}) y$	$k \geqq 1$, $p \geqq 1$ $b_0 \neq 0$	$3k+1$	
⑱	$((x^2 + y^{2k+1})^2 + \mathbf{a} y^{4k+2+p} + \mathbf{b} x y^{3k+1+p}) y$	$k \geqq 1$, $p \geqq 1$ $b_0 \neq 0$	$3k+1$	
⑱#	$((x^2 + y^{2k+1})^2 + \mathbf{a} x y^{3k+2+p} + \mathbf{b} x^2 y^{2k+1+p}) y$	$k \geqq 1$, $p \geqq 1$ $b_0 \neq 0$	$3k+1$	
⑲	$(x^4 + x y^{3k+2} + \mathbf{a} x^2 y^{2k+2} + \mathbf{b} y^{4k+3}) y$	$k \geqq 1$	$3k+1$	$12k+12$
⑳	$(x^4 + y^{4k+3} + \mathbf{a} x y^{3k+3} + \mathbf{b} x^2 y^{2k+2}) y$	$k \geqq 1$	$3k+1$	$12k+13$

㉑ ～ ㉓ においては　$\mathbf{a} = a_0 + a_1 y + \cdots + a_{k-1} y^{k-1}$
$\mathbf{b} = b_0 + b_1 y + \cdots + b_{2k-1} y^{2k-1}$

㉑	$(x^4 + x y^{3k} + \mathbf{a} x^2 y^{2k} + \mathbf{b} x^3 y^k) y$	$k \geqq 2$, $\Delta(a_0, b_0) \neq 0$, $a_0 b_0 \neq 9$	$3k$	
㉒	$(x^4 + x^2 y^{2k} + \mathbf{a} x^3 y^k + \mathbf{b} y^{4k+p}) y$	$k \geqq 2$, $p \geqq 1$ $b_0 (a_0^2 - 4) \neq 0$	$3k$	
㉓	$(x^2 (x + y^k)^2 + \mathbf{a} x y^{3k+p} + \mathbf{b} y^{4k+q}) y$	$k \geqq 2$, $1 \leqq p < q$ $a_0 b_0 \neq 0$	$3k$	

㉔〜㉘ においては. $\mathbb{a} = a_0 + a_1 y + \cdots + a_{k-1} y^{k-1}$
$\mathbb{b} = b_0 + b_1 y + \cdots + b_{l+k-1} y^{l+k-1}$

㉔	$(x^3 + \mathbb{a} y^{3l+1} + \mathbb{b} x y^{2l+1})(x+y^k)y$	$l \geqq k \geqq 2$ $a_0 \neq 0$	$l+2k$	
㉕	$(x^3 + \mathbb{a} x y^{2l+1} + \mathbb{b} y^{3l+2})(x+y^k)y$	$l \geqq k \geqq 2$ $a_0 \neq 0$	$l+2k$	
㉖	$(x^3 + \mathbb{a} y^{3l+2} + \mathbb{b} x y^{2l+2})(x+y^k)y$	$l \geqq k \geqq 2$ $a_0 \neq 0$	$l+2k$	
㉗	$(x^3 + \mathbb{a} x y^{2l} + \mathbb{b} x^2 y^l)(x+y^k)y$	$l > k \geqq 2$. $a_0(b_0^2 - 4a_0) \neq 0$	$l+2k$	
㉘	$(x^3 + \mathbb{a} x^2 y^l + \mathbb{b} y^{3l+p})(x+y^k)y$.	$l > k \geqq 2,\ p \geqq 1$ $a_0 b_0 \neq 0$	$l+2k$	

㉙, ㉚ においては. $\mathbb{a} = a_0 + a_1 y + \cdots + a_{k-2} y^{k-2}$ $(k=1 \Rightarrow \mathbb{a} = 0)$
$\mathbb{b} = b_0 + b_1 y + \cdots + b_{2k-2} y^{2k-2}$
$\mathbb{c} = c_0 + c_1 y + \cdots + c_{3k-2} y^{3k-2}$

㉙	$x^5 + y^{5k+1} + \mathbb{a} x y^{4k+1} + \mathbb{b} x^2 y^{3k+1}$ $+ \mathbb{c} x^3 y^{2k+1}$	$k \geqq 1$	$6k-3$	$20k$
㉚	$x^5 + x y^{4k+1} + \mathbb{a} x^2 y^{3k+1} + \mathbb{b} x^3 y^{2k+1}$ $+ \mathbb{c} y^{5k+2}$	$k \geqq 1$	$6k-3$	$20k+1$

㉛, ㉜ においては. $\mathbb{a} = a_0 + a_1 y + \cdots + a_{k-2} y^{k-2}$ $(k=1 \Rightarrow \mathbb{a} = 0)$
$\mathbb{b} = b_0 + b_1 y + \cdots + b_{2k-2} y^{2k-2}$
$\mathbb{c} = c_0 + c_1 y + \cdots + c_{3k-1} y^{3k-1}$

㉛	$x^5 + x^2 y^{3k+1} + \mathbb{a} x^3 y^{2k+1} + \mathbb{b} x y^{4k+2}$ $+ \mathbb{c} y^{5k+1+p}$	$k \geqq 1,\ p \geqq 1$ $c_0 \neq 0$	$6k-2$	$20k+p+2$
㉜	$x^5 + y^{5k+2} + \mathbb{a} x y^{4k+2} + \mathbb{b} x^2 y^{3k+2}$ $+ \mathbb{c} x^3 y^{2k+1}$	$k \geqq 1$	$6k-2$	$20k+4$

33 ～ 36 においては．

$$\mathbb{a} = a_0 + a_1 y + \cdots + a_{k-2} y^{k-2} \quad (k=1 \Rightarrow \mathbb{a} = 0)$$
$$\mathbb{b} = b_0 + b_1 y + \cdots + b_{2k-1} y^{2k-1}$$
$$\mathbb{c} = c_0 + c_1 y + \cdots + c_{3k-1} y^{3k-1}$$

33	$x^5 + x y^{4k+2} + \mathbb{a} x^2 y^{3k+2} + \mathbb{b} x^3 y^{2k+1} + \mathbb{c} x^4 y^{k+1}$	$k \geqq 1$ $b_0^2 - 4 \neq 0$	$6k-1$	$20k+6$
34	$\{(x^2 + y^{2k+1})^2 + \mathbb{a}(x^3 y^{k+1} + x y^{3k+2}) + \mathbb{b} x y^{3k+1+p} + \mathbb{c} y^{4k+2+p}\} x$	$k \geqq 1,\ p \geqq 1$ $b_0 \neq 0$	$6k-1$	
34#	$\{(x^2 + y^{2k+1})^2 + \mathbb{a}(x^3 y^{k+1} + x y^{3k+2}) + \mathbb{b} y^{4k+2+p} + \mathbb{c} x y^{3k+2+p}\} x$	$k \geqq 1,\ p \geqq 1$ $b_0 \neq 0$	$6k-1$	
35	$x^5 + x^3 y^{2k+1} + \mathbb{a} x^2 y^{3k+2} + \mathbb{b} y^{5k+2+p} + \mathbb{c} x y^{4k+2+p}$	$k \geqq 1,\ p \geqq 1$ $b_0 \neq 0$	$6k-1$	
36	$x^5 + y^{5k+3} + \mathbb{a} x y^{4k+3} + \mathbb{b} x^2 y^{3k+2} + \mathbb{c} x^3 y^{2k+2}$	$k \geqq 1$	$6k-1$	

37 ～ 39 においては．

$$\mathbb{a} = a_0 + a_1 y + \cdots + a_{k-2} y^{k-2} \quad (k=1 \Rightarrow \mathbb{a} = 0)$$
$$\mathbb{b} = b_0 + b_1 y + \cdots + b_{2k-1} y^{2k-1}$$
$$\mathbb{c} = c_0 + c_1 y + \cdots + c_{3k} y^{3k}$$

37	$x^5 + x^2 y^{3k+2} + \mathbb{a} x^3 y^{2k+2} + \mathbb{b} x y^{4k+3} + \mathbb{c} y^{5k+3+p}$	$k \geqq 1,\ p \geqq 1$ $c_0 \neq 0$	$6k$	
38	$x^5 + x y^{4k+3} + \mathbb{a} x^2 y^{3k+3} + \mathbb{b} x^3 y^{2k+2} + \mathbb{c} y^{5k+4}$	$k \geqq 1$	$6k$	
39	$x^5 + y^{5k+4} + \mathbb{a} x y^{4k+4} + \mathbb{b} x^2 y^{3k+3} + \mathbb{c} x^3 y^{2k+2}$	$k \geqq 1$	$6k$	

次の標準型 40, 41 は、単項式による perturbation ではなく、多項式による perturbation によって表わされている。単項式の形に直すことも可能であるが、パラメーター集合の Zariski open sets ごとに何通りかの標準型で表わさねばならないので、多項式 perturbation のままにしておく。

標準型 ㊵

$$x^5 + ax^4y^k + bx^3y^{2k} + cx^2y^{3k} + xy^{4k}$$
$$+ (ax^5 + 2bx^4y^k + 3cx^3y^{2k} + 4x^2y^{3k})y \cdot \alpha$$
$$+ (4x^3y^{2k} + 3ax^2y^{3k} + 2bxy^{4k} + cy^{5k})y \cdot \beta$$
$$+ (ax^3y^{2k} + 2bx^2y^{3k} + 3cxy^{4k} + 4y^{5k})y \cdot \gamma$$

ここに、

$k \geqq 2$, $\Delta(a, b, c) =$ 5次方程式の判別式 $\neq 0$,

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 y + \cdots + \alpha_{k-3} y^{k-3} \quad (k = 2 \Rightarrow \alpha = 0)$$
$$\beta = \beta_0 + \beta_1 y + \cdots + \beta_{2k-3} y^{2k-3}$$
$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 y + \cdots + \gamma_{3k-3} y^{3k-3}$$

$$modality = 6k - 3 \geqq 9$$

標準型 ㊶

$$\{x^3 + ax^2y^k + bxy^{2k} + y^{3k} + (ax^3 + 2bx^2y^k + 3xy^{2k})y \cdot \alpha$$
$$+ (3x^2y^k + 2axy^{2k} + by^{3k})y \cdot \beta + (ax^2y^k + 2bxy^{2k} + 3y^{3k})y \cdot \gamma$$
$$\} \cdot (x^2 + cy^{l+1})$$

ここに

$k \geqq 2$, $l \geqq 2k$, $\Delta(a, b) =$ 3次方程式の判別式 $\neq 0$,
$c \neq 0$,

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 y + \cdots + \alpha_{k-3} y^{k-3} \quad (k = 2 \Rightarrow \alpha = 0)$$
$$\beta = \beta_0 + \beta_1 y + \cdots + \beta_{2k-3} y^{2k-3}$$
$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 y + \cdots + \gamma_{3k-3} y^{3k-3}.$$

$$modality = 6k - 3. \geqq 9$$

★ 途中だが、リストはここでやめておく（未完）。

REFERENCES

V.I. Arnol'd :

[1] Normal forms of functions in neighbourhoods of degenerate critical points. Russian Math. Surveys 29 (1974)

[2] Critical points of smooth functions and their normal forms. Russian Math. Surveys 30 (1975)

[3] Local normal forms of functions. Inv. math. 35 (1976)

[4] Spectral sequence for reduction of functions to normal form. Func. Anal. and its Appl. 9 (1975)

E. Yoshinaga and M. Suzuki :

[5] Normal forms of non-degenerate quasihomogeneous functions with inner modality $\leqq 4$. Inv. math. 55 (1979)