数理解析研究所講究録
第 450 巻 1982 年 23-29

μ-不変な超曲面族のニュートン境界

東工大、理学部　岡　睦雄

§1. $f_t(z) = f(t, z_1, \dots, z_n)$ ($|t| \le 1$) を $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍で定義された解析函数で、そこで孤立臨界点をもつものの族とする。$\mu(f_t)$ を f_t の原点での Milnor 数、$\mu^*(f_t)$ を超平面切断に対する Milnor 数の列とする。i.e. $\mu^*(f_t) = (\mu^n(f_t), \mu^{n-1}(f_t), \dots, \mu^1(f_t))$ で、$\mu^i(f_t) = \mu(f_t|_{L^i})$。ただし L^i は一般的な $\mathbb{C}^n$ の i 次元部分空間。t によらずに $\mu(f_t)$ が定する時、μ-不変族、又 $\mu^*(f_t)$ が一定の時 μ^*-不変族と呼ぶ。

命題1. 超曲面 $V_t = \{f_t = 0\}$ が位相的に同型であれば、$\{f_t\}$ は μ-不変族である。

証明. D_ε を半径 ε の disk とする。$D_\varepsilon - V_t$ の cyclic covering をとれば、それは f_t の Milnor ファイバーとホモトピー同値で、その $(n-1)$-Betti 数が $\mu(f_t)$ なる事より直ちに得られる。

命題1の逆に対しては次の定理が知られている。

定理1. (Lê - Ramanujam [L-R]). $n \neq 3$ ならば、μ-不変族は位

相的に同型族となる。

この定理の証明は h-cobordism の理論を巧妙に用いて得られたもので、多少とも問題の本質を回避した所がある。すなわち横断性(transversality)の議論である。

定義. $\{f_t\}$ が一様安定半径 ε をもつとは、任意の t と任意の $\varepsilon' \leq \varepsilon$ に対し、半径 ε' の超球が V_t と横断的なる時をいう。

<u>命題2.</u> $\{f_t\}$ が一様安定半径を持てば、位相同型族である。

従って与えられた μ- 不変族に対し、次の予想がある。

予想 1. パラメーター t に依存(C^∞ に)する局所座標 $z(t)$ が存在し、$z(t)$ に関して一様な安定半径が存在する。

但し、<u>一様安定半径は座標に依存したもので、一般には任意の座標ではなりたたない</u>。

<u>例(Briançon)</u> $f_t(z)$ を μ- 不変で、μ^* が不変でないものを考える。例えば、$Z^5 + tZY^6 + XY^7 + X^{15}$ をとる。μ は 364 で一定であるが、$X = aY + bZ$ に制限すれば、$\mu^{(2)}_t = 26$ $(t \neq 0)$ で $\mu^{(2)}_0 = 28$ である. 座標変換をして、

$f_t \equiv Z^5 + tZY^6 + (X+Y+Z)Y^7 + (X+Y+Z)^{15}$ とする。上の事より解析曲線 $P(s) = (0, Y(s), Z(s))$ が存在し、次の条件を満す。 (i) $t(s) = s^c$ $(\exists c \in \mathbb{N})$, $\lambda(s) \in \mathbb{C}$.

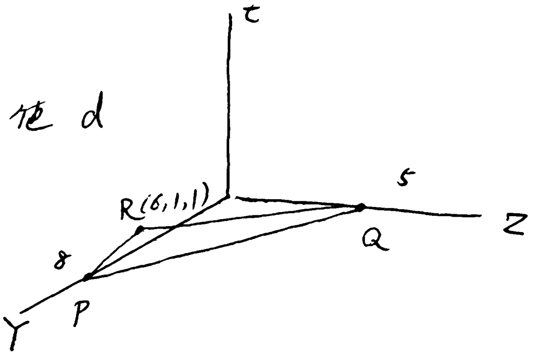
(ii) $\dfrac{\partial f_t}{\partial y}(P(s)) = \lambda(s)\, \overline{y(s)}$, $\dfrac{\partial f_t}{\partial z}(P(s)) = \lambda(s)\, \overline{z(s)}$.

(iii) $f_{t(s)}(P(s)) \equiv 0$, (iv) $P(s) \longrightarrow 0$ $(s \to 0)$.

(*) $\alpha(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(P(s), t(s))$, $\beta(s) = \frac{\partial f}{\partial y}(P(s), t(s))$,
$\gamma(s) = \frac{\partial f}{\partial z}(P(s), t(s))$ とおいて、仮に $\beta(s)$ か $\gamma(s)$ の
位数が $\alpha(s)$ より大きくない（例えば、$\beta(s)$ か）とすれば、

$h_s(x, y, z) = f_{t(s)}(x, y - \frac{\alpha(s)}{\beta(s)}x, z)$ なる μ-不変族を考えると、曲線 $P(s) = (0, y(s), z(s))$ の上で、$\frac{\partial h_s}{\partial x}(P(s)) \equiv 0$ であるから、$\frac{\partial h_s}{\partial y}(P(s)) = \lambda(s)\overline{y(s)}$, $\frac{\partial h_s}{\partial z}(P(s)) = \lambda(s)\overline{z(s)}$ で、この族はその座標系に関して、一様安定半径をもたない。さて(*)を示そう。$y(s) = \alpha_1 s^a +$ higher, $z(s) = \alpha_2 s^b + \cdots$ $t(s) = s^c$ とすれば、$\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ となる事はすぐわかる。$\alpha(s) = \alpha_3 s^{\geq a} +$ higher である。$g(y, z, t) = f_t(0, y, z)$ の Newton 境界は非退化で次の様になる。

$\Gamma(g)$ 上 $ay + bz + ct$ が最小値 d をとる面を Δ とする。



(iii) より

$$\frac{\partial g}{\partial y}\cdot \dot{y} + \frac{\partial g}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial g}{\partial t}\cdot \dot{t} \equiv 0$$

i.e. $$\left(\frac{\partial g_\Delta}{\partial y}(\alpha_1, \alpha_2, 1)\cdot \alpha_1^{a-1}\cdot a + \frac{\partial g_\Delta}{\partial z}(\alpha_1, \alpha_2, 1)\alpha_2^{b-1} b + \frac{\partial g_\Delta}{\partial t}\cdot(\alpha_1, \alpha_2, 1)\cdot c\right) s^{d-1} + \cdots \equiv 0.$$

従って非退化な事と上の式より、$\frac{\partial g_\Delta}{\partial y}(\alpha_1, \alpha_2, 1)$, $\frac{\partial g_\Delta}{\partial z}(\alpha_1, \alpha_2, 1)$ のいずれかは 0 でない。すなわち $\min(\mathrm{ord}\,\beta(s), \gamma(s)) \leq \max(d-a, d-b)$. (1) Δ が R を含まなければ、$\mathrm{ord}\,\beta(s)$

$= d-a$, $\mathrm{ord}\,\gamma(s) = d-c$ はすぐわかる. $d \leqq 8a$ だから $d-a \leq 7a$ で, OK. (b) $R \in \Delta$ のとき. まず $a \leq b$ である。($\because$ $a > b$, $d = 6a+b+c \leq 5b$ 不可) ~~る故~~ よって $d-b \leq d-a \leq 8a - a = 7a$ で, (*) は示された。

§2. 与えられた解析函数 $f(z_1 \cdots z_n)$ の Newton 境界 $\Gamma(f)$ とは, $f(z) = \sum a_\nu z^\nu$ として, $a_\nu \neq 0$ な ν およびその正半空間. $\nu + (\mathbb{R}^+)^n$ の合併の凸包のコンパクトな境界の事である。その面 Δ (一点でもよい) に対し, $f_\Delta(z) = \sum_{\nu \in \Delta} a_\nu z^\nu$ で定義し, すべての Δ に対し, $\{z \in (\mathbb{C}^*)^n ; \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_1} = \cdots = \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_n} = 0\}$ が空集合の時, f は $(z_1, \cdots, z_n)$ に関して非退化であるという。非退化な Newton 境界に関しては次が知られている.

定理 2. (Kouchnirenko [ ]) f が非退化なら $\mu(f)$ は $\Gamma(f)$ だけから決まる Newton 数 $\nu(\Gamma_-(f))$ と一致する。(退化しているときは $\mu(f) \geqq \nu(\Gamma_-(f))$.)

定理 3. (岡 [O]) $f_t(z_1 \cdots z_n)$ が, 各 t に関し非退化で, $\Gamma(f_t)$ が動かなければ, 一様安定半径がある。実は μ^*-不変でもある。

前半の主張は [O] をみられたい。後半は $W = \{(z,t) ; f(z,t) = 0\}$, $T = \{(0,t)\}$ として, $W-T$, T が Whitney (b) 条件をみたす事と同値である。W 上に解析曲線 $z(s) = (z_1(s), \ldots, z_n(s))$, $z_i(s) = \alpha_i s^{a_i} + \cdots$, $t(0) = t_0$ で,

$f(z(s), t(s)) \equiv 0$ とする。簡単の為 $\forall i$, $z_i(s) \neq 0$ とし，Δ を $\Gamma(f_0)$ の面で，そこで線型函数 $\sum a_i x_i$ が最小値 d をとる面を Δ とする。$T_{(z(s), t(s))}W$ はベクトル $\left(\operatorname{grad} f_t, \frac{\partial f_t}{\partial t}\right)$ に直交する n 次元ベクトルで，その極限は，

$$\lim_{s \to 0}\left(\operatorname{grad} f_{t(s)}(z(s)), \frac{\partial f_t}{\partial t}(z(s))\right)$$

則ち，$\tilde{v} = (v, 0)$ の直交補空間．ここで，v は

$$v_i = \begin{cases} \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_i}(\alpha) & i \in I. \\ 0 & i \notin I. \end{cases}$$

$I = \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_i}(\alpha)$ が 0 でない i のうち．a_i が max になるもの。

今 $z(s)$ 上の点列 $\{P_\nu\}$ と T_Σ の点列 Q_ν で，$\lim P_\nu = \lim Q_\nu = (0, t_0)$ なるものをとれば，$\lim \overline{P_\nu Q_\nu}$ を ω とすると．

$$\omega_i = \begin{cases} \alpha_i & (i \leq n,\ a_i : \text{minimum}) \\ 0 & (\text{otherwise},\ i \leq n) \\ c & i = n+1 \end{cases}$$

となるか，$\omega = (0, \cdots, 0, c)$ となるか．いずれかである。

いずれの場合も $(\omega, \tilde{v}) = 0$ で，$\omega \in \lim T_{P_\nu} W$。

ここで，ω と $\tilde{v}$ が 0 でない i を共有するときは，

$$0 = \frac{d}{ds} \cdot f_{t(s)}(z(s)) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_i}(\alpha) \cdot \dot{z}_i(s)\right) s^{d-1} + \text{higher}$$

より，$(\omega, \tilde{v}) = 0$ が得られる。(証終)．

ついでに，次も示しておこう。

定理 4．$\{f_t\}$ が μ^*-不変なら一様安定半径が存在する。

証明．結論を否定して，Curve Selection lemma をつ

かうと, $\exists z(s) = (\alpha_1 s^{a_1} + \cdots, \ldots, \alpha_n s^{a_n} + \cdots)$. $t(0) = t_0$

で,
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{t(s)}}{\partial z_i}(z(s)) = {}^{\exists}\lambda(s)\, \overline{z_i(s)} & \text{となる.} \\ f_{t(s)}(z(s)) \equiv 0 & (\lambda(s) \neq 0) \end{cases}$$

$I = \{i ; a_i : \text{minimum}\}$ とすれば, $\lim_{s \to 0} \operatorname{grad} f_{t(s)} z(s) = \bar{v}$, $\bar{v}_i = \begin{cases} \bar{\alpha}_i & i \in I \\ 0 \end{cases}$

従って, $\lim_{s \to 0} T_{(z(s), t(s))} W = (\bar{v}, {}^{\exists}c)^{\perp}$ or $(\vec{0}, c)^{\perp}$ の形.
しかし, Whitney (b) は Whitney (a) を含み, $(\vec{0}, c)^{\perp}$ となる事は不可。したがって, $\lim T_{(z(s), t(s))} W = (\bar{v}, c)^{\perp}$. 今 $P_\nu = (z(s_\nu), t(s_\nu))$ $(s_\nu \to 0)$ に選び, $Q_\nu = (0, t(s_\nu))$ とすれば, $\overrightarrow{P_\nu Q_\nu} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} v$. 依って, $((v, 0)(\bar{v}, c)) = \|v\|^2 > 0$ で, $\lim \overline{P_\nu Q_\nu} \notin \lim T_{P_\nu} W$. これは Whitney (b) に違反する。

§3. Theorem 2, 3 に見た様に, Newton 境界は非退化な孤立特異点を位相的に完全に記述する. 非退化でない境界の場合も Newton 数が最大となる座標など, 適当なよい座標系に関して, Newton 境界をしらべれば, 少なからぬ位相的情報をひきだせる。次の定理は Newton 境界が μ-不変族で, どの程度動けるかを, 一番やさしい時に記述したものである。

定理 5. $f_t(x, y)$ を μ-不変な曲線族とする. その時, parameter t に analytic な座標変換 $(x(t), y(t))$ が存在して, (i) $(x(0), y(0)) = (x, y)$

(ii) $\Gamma(f_t;(x(t),y(t)))=\Gamma(f_0)$.

証明は[O₂]を見られたい。$n\geqq 3$のときは、全然わかっていない。

予想.2. $f_t(z_1,\dots z_n)$: μ-不変族(or μ^*-不変族)で, f_0が非退化とする。そのときf_tも適当な座標系に関して非退化であろう。($n=2$のときは正しい。)

参考文献

[K] Kouchnirenko: Polyèdre de Newton et nombres de Milnor, Invent. Math., 32 (1976), 1-31.

[L-R] Lê and Ramanujam; The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type.

[O₁] Oka, On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary, J. Math. Soc. Japan, Vol. 31, No. 3, 1979, 435-450.

[O₂] Oka: On the stability of the Newton boundary, to appear in AMS reports.