数理解析研究所講究録
第450巻 1982年 49-61

On a certain decomposition of 2-dimensional cycles on a product of two algebraic surfaces

都立大 理　岡本 真理子

I　二つの曲線の積多様体についての復習

C, C'を複素数体$\mathbb{C}$上定義された, 非特異代数曲線とする.

1°　Xを積多様体 $C\times C'$ 上のdivisorとする. $X\equiv 0$ とは, C'上の0-cycle $\mathfrak{a}$ とC上の0-cycle $\mathfrak{b}$ が存在して, $X\sim C\times\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\times C'$ (線型同値)と書けることとする. このとき

$$\mathrm{Cor}(C,C')=\{\text{divisors on } C\times C'\}\big/\{\text{divisors } X \text{ on } C\times C' \text{ s.t. } X\equiv 0\}$$

とおく.

$\varphi: C\to J(C)$, $\varphi': C'\to J(C')$ をC, C'のJacobi多様体とし, π_1, π_2を$C\times C'$からC, C'へのprojectionとする. Cの閉点Pに対して, $X(P)=\pi_{2*}(X.\pi_1^*P)$ はC'上の0-cycleを, 従って $\varphi_*(X(P))$ は$J(C')$上の0-cycleを定める. $J(C')$上の0-cycleとしての形式和をAbel多様体$J(C')$の算法にかえる準同型を

Sとすると，$S(\varphi_*(X(P)))$ は$J(C')$の点を定める．Cから$J(C')$への写像 $P \rightsquigarrow S(\varphi_*(X(P)))$ の線型化を $\xi_X : J(C) \to J(C')$ とする．このとき$\mathrm{Cor}(C, C')$の元の代表 X のえらび方によらず，$\mathrm{Hom}(J(C), J(C'))$ の元 ξ_X が定まることが確かめられる．

$$\mathrm{Cor}(C, C') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(J(C), J(C'))$$
$$;\ [X] \longmapsto \xi_X$$

となる（ここに$[X]$はXの"$\equiv$"による同値類）．（[12]）．

$2°$　C，C' の genus をそれぞれg，g'とする．

$\gamma_1, \cdots, \gamma_{2g}$ $(\gamma'_1, \cdots, \gamma'_{2g'})$: $H_1(C, \mathbb{Z})$ $(H_1(C', \mathbb{Z}))$ の basis．

$\delta_1, \cdots, \delta_{2g}$ $(\delta'_1, \cdots, \delta'_{2g'})$: $H^1(C, \mathbb{Z})$ $(H^1(C', \mathbb{Z}))$における$\gamma_1, \cdots, \gamma_{2g}$ $(\gamma'_1, \cdots, \gamma'_{2g'})$ の dual basis．

$\omega_1, \cdots, \omega_g$ $(\omega'_1, \cdots, \omega'_{g'})$: $H^0(C, \Omega_C)$ $(H^0(C', \Omega_{C'}))$ の basis．

と定め，これらによってきまる period matrix を$\Omega_C = \left[\int_{\gamma_i} \omega_j\right]$, $\Omega_{C'} = \left[\int_{\gamma'_i} \omega'_j\right]$ とする．

今，Xは $H^1(C, \mathbb{Z}) \otimes H^1(C', \mathbb{Z})$ の元で $X = \sum a_{ij}\, \delta_i \otimes \delta'_j$，$A_X = [a_{ij}] \in M(2g, \mathbb{Z})$ と表わされているとする．このとき

$$X \in H^{1,1}(C \times C') \text{ (Hodge (1,1)-part)} \Leftrightarrow {}^t\Omega_C A_X \Omega_{C'} = 0$$

であり，さらにこのときXは algebraic となる．

II　S，S′を複素数体$\mathbb{C}$上定義された．非特異射影曲面とする．

1°　$C^2(S\times S')$で余次元2のcyclesのrational equivalence class groupを表わす．また．積多様体$S\times S'$からS，S′へのprojectionをπ_1，π_2とする．

定義 1.1

$$FC^2(S.S')=\left\langle [X]\in C^2(S\times S') \;\middle|\; \begin{array}{l} X : S\times S'\text{上の既約．2次元} \\ \text{subvariety で} \\ \min[\dim \pi_1(X).\dim \pi_2(X)] \leqq 1 \end{array} \right\rangle$$

$$Cor^2(S.S')= C^2(S\times S') \big/ FC^2(S.S')$$

cycle map　$cl : C^2(S\times S')\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \longrightarrow H^4(S\times S'.\mathbb{C})$　を考え．

$H^4(S\times S'.\mathbb{Q})_{alg} = \mathrm{Im}\,(cl)$　とおく．

$H^4(S\times S'.\mathbb{Q})_{alg} \subseteqq H^{2.2}(S\times S') \cap H^4(S\times S'.\mathbb{Q})$であ る．

[6]，[7]　におけるLieberman　の結果から．$H^4(S\times S'.\mathbb{Q})_{alg}$の元の各Künneth成分は再びalgebraicになる．すなわち

(1.2)　$$H^4(S\times S'.\mathbb{Q})_{alg} \cong \bigoplus_{p+q=4} [H^p(S.\mathbb{Q})\otimes H^q(S'.\mathbb{Q})]_{alg}$$

が成り立つ（ここに$[H^p(S.\mathbb{Q})\otimes H^q(S'.\mathbb{Q})]_{alg}$
$= [H^p(S.\mathbb{Q})\otimes H^q(S'.\mathbb{Q})] \cap H^4(S\times S'.\mathbb{Q})_{alg}$）．

ところで，$H^2(S.\mathbb{C})_{trans} = \varinjlim_{U\subset S.\ \text{Zariski open}} H^2(U.\mathbb{C})$　とおくと．交点数に関する$H^2(S.\mathbb{C})$の超越的分解：

$$H^2(S.\mathbb{C}) \cong H^2(S.\mathbb{C})_{alg} \oplus H^2(S.\mathbb{C})_{trans}$$

が存在する（ここに $H^2(S,\mathbb{C})_{alg}=H^2(S,\mathbb{Q})_{alg}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ ）．
$H^2(S,\mathbb{C})_{trans}$ はS上の第２種微分型式のなす空間に相当している（cf. [1], [3]）．

ここでは，$S\times S'$ 上のHodge分解，Künneth分解と，上の超越的分解を組み合わせて，$H^4(S\times S',\mathbb{C})$ のHKT-part と呼ばれる部分空間をとりだし，それを用いて $H^4(S\times S',\mathbb{Q})_{alg}$ を調べることを考える．

定義 1.3

$$H^4_{\text{超越}}(S,S')\cong[H^{2,0}(S)\otimes H^{0,2}(S')]\oplus[H^{0,2}(S)\otimes H^{2,0}(S')]$$
$$\oplus[H^{1,1}(S)\underset{trans}{\otimes}H^{1,1}(S')_{trans}]$$

$:\ H^4(S\times S',\mathbb{C})$ の HKT-part

（ここに，$H^{1,1}(S)_{trans}=H^{1,1}(S)\cap H^2(S,\mathbb{C})_{trans}$ ）．

$$H^4_{\text{超越}}(S,S')_{alg}=H^4_{\text{超越}}(S,S')\cap H^4(S\times S',\mathbb{Q})_{alg}$$

$:\ $ algebraic HKT-part．

このとき，

$$H^4_{\text{超越}}(S,S')_{alg}\cong[H^2(S,\mathbb{C})_{trans}\otimes H^2(S',\mathbb{C})_{trans}]\cap H^4(S\times S',\mathbb{Q})_{alg}$$

となっていることに注意しておく．

定義 1.4 $\quad FH^4(S,S')=cl(FC^2(S,S')\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})$

$$DC^2(S\times S')=\langle D.D'\in C^2(S\times S')\mid D,D'\in C^1(S\times S')\rangle$$

$$DH^4(S\times S')=cl(DC^2(S\times S')\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})．$$

仮定　以下 $q(S)(=\dim_{\mathbb{C}}H^{1,0}(S))=q(S')=0$ とする.

補題 1.5　$H^4(S\times S',\mathbb{Q})_{alg}\cong[H^4(S,\mathbb{Q})\otimes H^0(S',\mathbb{Q})]$
$\oplus[H^0(S,\mathbb{Q})\otimes H^4(S',\mathbb{Q})]\oplus[H^2(S,\mathbb{Q})_{alg}\otimes H^2(S',\mathbb{Q})_{alg}]\oplus H^4_{trans}(S,S')_{alg}$.

これは.(1.2)から得られる.右辺の第3の成分まではSおよびS′上のalgebraic cycleから得られるcycleである.さらに次のことがいえる.$p:H^4(S\times S',\mathbb{Q})_{alg}\to H^4_{trans}(S,S')_{alg}$ を(1.5)の分解に関するprojectionとする.

定理 1.6　i) $FH^4(S,S')\cong[H^4(S,\mathbb{Q})\otimes H^0(S',\mathbb{Q})]$
$\oplus[H^0(S,\mathbb{Q})\otimes H^4(S',\mathbb{Q})]\oplus[H^2(S,\mathbb{Q})_{alg}\otimes H^2(S',\mathbb{Q})_{alg}]$,
ii)　$DH^4(S\times S')\subseteqq FH^4(S,S')$,従って $p(DH^4(S\times S'))=0$.
特に.$X\in C^2(S\times S')$, $p(cl(X))\neq 0$ ならXは2つのdivisorsの交わりの和とhomologousでない.

証明　i) Poincaré dualityより自然な同型

$$H^2(S,\mathbb{C})_{trans}\otimes H^2(S',\mathbb{C})_{trans}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(H^2(S,\mathbb{C})_{trans},H^2(S',\mathbb{C})_{trans})$$
$$;\qquad X\longmapsto X(\ ):u\longmapsto \pi_{2*}(X\cdot\pi_1^*u)$$

が存在する.$H^2(S,\mathbb{C})_{trans}$ の定義から.$X\in FH^4(S,S')$ なら.$X(\ ):H^2(S,\mathbb{C})_{trans}\to H^2(S',\mathbb{C})_{trans}$ はzero mapとなる.従って(1.3)の

後の注意から i)がいえる.

ii). S と S' の divisorial correspondence ([5], [11]) を考えれば $q(S)=q(S')=0$ より,

$$H^2(S\times S', \mathbb{Q})_{alg} \cong H^2(S, \mathbb{Q})_{alg} \oplus H^2(S', \mathbb{Q})_{alg}.$$

ii)はこのことから明らかである.

また, $H^4_{HKT}(S, S')$ は(1.1)で定義した $Cor^2(S, S')$ の cohomology 空間での対応物となっている. すなわち, 次の可換で exact な図式が存在する:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & FC^2(S,S')\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[d, "cl\text{の制限}"] & C^2(S\times S')\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[d, "cl"] & Cor^2(S,S')\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{cl}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & FH^4(S,S') \arrow[r] \arrow[d] & H^4(S\times S', \mathbb{Q})_{alg} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & H^4_{HKT}(S,S')_{alg} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

以下, 2°, 3°では, ある種の曲面の積多様体について, その algebraic HKT-part を調べてみる.

2° Singular K3 surfaces

S を K3 surface とする. すなわち $q(S)=0$, $\dim_{\mathbb{C}} H^{2,0}(S)=1$. K3 surface S は $\dim_{\mathbb{C}} H^2(S, \mathbb{C})_{alg} = \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(S)$ なるとき, singular であるという. これは $H^{1,1}(S)_{trans} \cong 0$ と同値である.

S, S' を singular K3 surfaces とする．ω, ω' をそれぞれ $H^0(S, \Omega_S^2)$, $H^0(S', \Omega_{S'}^2)$ の basis, γ_1, γ_2 を $H_2(S, \mathbb{Q})_{trans}$ の, γ_1', γ_2' を $H_2(S', \mathbb{Q})_{trans}$ の basis とし，$\tau = \frac{\int_{\gamma_1}\omega}{\int_{\gamma_2}\omega}$, $\eta = \frac{\int_{\gamma_1'}\omega'}{\int_{\gamma_2'}\omega'}$ とおく．$\tau \in \mathbb{C}$ に対し E_τ を $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ の形の elliptic curve とする．このとき，次の定理が成立する．

<u>定理 2.1</u> $H^4_{\text{ちbt}}(S.S')_{alg} \cong Cor(E_\tau . E_\eta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\cong Hom(E_\tau . E_\eta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} .$$

3° <u>Some quotient surfaces</u>

n を素数とし，$\mathbb{P}^2$ の代数曲線 C_i $(i = 1.2.3.4)$ を

$$u_2^n = \prod_{j=1}^n (u_1 - a_{ij} u_0) \quad , \quad \prod_{j \neq j'} (a_{ij} - a_{ij'}) \neq 0$$

で定める．（たとえばすべての j に対して $a_{ij} = \zeta^j$, $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\right)$ としたとき C_i は degree n の Fermat curve となる）．$G_n = \langle \zeta \rangle$ とおくと，$(u_0 : u_1 : u_2) \mapsto (u_0 : u_1 : \zeta u_2)$ によって G_n は C_i に作用する．$\zeta \mapsto (\zeta, \zeta^r)$ で写像 $i_r : G_n \hookrightarrow G_n \times G_n$ を定め $(1 \leq r \leq n-1)$，$G^{(r)} = Im(i_r)$ とおく．今，$G^{(r)}$ は $\tilde{S} = C_1 \times C_2$ に，$G^{(s)}$ は $\tilde{S}' = C_3 \times C_4$ に作用しているとする．したがって $G^{(r,s)} = G^{(r)} \times G^{(s)}$ は $\tilde{S} \times \tilde{S}'$ に作用している．

一方，$\tilde{S}/G^{(r)}$, $\tilde{S}'/G^{(s)}$ の non-singular model をそれぞれ S_r, S_s' とする．このとき S_1, S_1' は次のようにとれる[8]：

$$S_1 : \prod_{j=1}^{n}(x_3 - a_{1j}x_2) = \prod_{j=1}^{n}(x_1 - a_{2j}x_0) \hookrightarrow \mathbb{P}^3$$

(たとえば. $a_{1j}=a_{2j}=\zeta^j$ とすれば. S_1はFermat surfaceとなる).

$$S_1' : \prod_{j=1}^{n}(x_3 - a_{3j}x_2) = \prod_{j=1}^{n}(x_1 - a_{4j}x_0) \hookrightarrow \mathbb{P}^3$$

このとき. $q(S_1)=q(S_1')=0$ となることに注意しておく.
やさしい計算から.

$$(3.1) \qquad H^4_{\text{ét}}(\tilde{S},\tilde{S}')_{alg} \cong \bigoplus_{1 \leqq r,s \leqq n-1} \left[H^4_{\text{ét}}(\tilde{S},\tilde{S}')_{alg}\right]^{G^{(r,s)}}$$

を得る. ここに右辺は$G^{(r,s)}$-不変部分を表わす. さらに準同型

$$(3.2) \qquad \left[H^4_{\text{ét}}(\tilde{S},\tilde{S}')_{alg}\right]^{G^{(r,s)}} \longrightarrow H^4_{\text{ét}}(S_r, S_s')_{alg}$$

が存在するが. $H^{2,0}(\tilde{S})^{G^{(r)}} \cong H^{2,0}(S_r)$ となることから. これは左辺が零でなければ. non-zero mapである.

さらに. $J(C_i)$をC_iのJacobi多様体とし($i=1,2,3,4$). $J = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_1),J(C_3)) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_2),J(C_4))$ とおくと(ここに$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_1),J(C_3)) = \mathrm{Hom}(J(C_1),J(C_3)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$), I, 1° より自然な準同型 $J \longrightarrow H^4_{\text{ét}}(\tilde{S},\tilde{S}')_{alg}$ が存在するので. (3.1), (3.2)とあわせて準同型

$$\theta^{r,s} : J \longrightarrow H^4_{\text{ét}}(S_r, S_s')_{alg} \qquad (1 \leqq r,s \leqq n-1)$$

を得る. 以上のことから. $J \neq \{0\}$ ならば次がいえる.

<u>定理 3.3</u>　$\exists(r.s)$ such that $\mathrm{Im}(\theta^{r.s})\neq 0$.

<u>定理 3.4</u>　$u: J(C_1)\to J(C_3)$, $v: J(C_2)\to J(C_4)$ が. isogenies ならば. すべての $(r.s)$ に対して $\mathrm{Im}(\theta^{r.s})\neq 0$.
特に. $\theta^{1.1}(u\otimes v)$ は2つの divisors の交わりの和と homologous でない algebraic cycle class となっている.

4°　最後に. 3°における $J\to H^4_{\text{trans}}(C_1\times C_2, C_3\times C_4)_{alg}$ の部分を. 一般の代数曲線 C_i にもどって考察する.

C_1, C_2, C_3, C_4: genus g の非特異代数曲線
$J(C_i)$: C_i の Jacobi 多様体 $(i=1.2.3.4)$.
とする.

a) このとき (1.2) より.

$$H^4(C_1\times C_2\times C_3\times C_4.\mathbb{Q})_{alg}\cong FH^4(C_1\times C_2, C_3\times C_4)\oplus H^4_{\text{trans}}(C_1\times C_2, C_3\times C_4)_{alg}$$

が成り立つ. また. 自然な準同型

$$\lambda: \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_1).J(C_3))\otimes\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_2).J(C_4))\oplus\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_1).J(C_4))\otimes\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_2).J(C_3)) \longrightarrow H^4_{\text{trans}}(C_1\times C_2, C_3\times C_4)_{alg}$$

が存在し, 次の命題が成立する.

<u>命題 4.1</u>

$$\frac{DH^4(C_1\times C_2\times C_3\times C_4)}{DH^4(C_1\times C_2\times C_3\times C_4)\cap FH^4(C_1\times C_2, C_3\times C_4)}\cong \mathrm{Im}(\lambda).$$

b) 一方．このような曲線の積として得られる曲面に対しては．I，2°と類似のことが考えられる．

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_1^k, \cdots, \gamma_{2g}^k : H_1(C_k.\mathbb{Z}) \text{ の basis,} \\ \delta_1^k, \cdots, \delta_{2g}^k : H^1(C_k.\mathbb{Z}) \text{ における } \gamma_1^k, \cdots, \gamma_{2g}^k \text{ の dual basis,} \\ \omega_1^k, \cdots, \omega_g^k : H^{1.0}(C_k) \text{ の basis}\end{array}\right\} \text{で．}$$

$$\Omega^k = \left[\int_{\gamma_i^k} \omega_j^k\right] = \begin{bmatrix} E_g \\ Z^k \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} E_g : g\times g \text{ 単位行列} \\ {}^t(Z^k) = Z^k,\ \mathrm{Im}(Z^k) > 0 \ (Z^k \text{ の imaginary part}) \end{array}$$

をみたすものとする($k=1.2.3.4$)．また．行列 $A=[a_{ij}] \in M(m.n)$，B に対して，行列 $A\otimes B$ を

$$A\otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

で定める．

<u>補題 4.2</u>　$X \in H^1(C_1.\mathbb{Z})\otimes H^1(C_2.\mathbb{Z})\otimes H^1(C_3.\mathbb{Z})\otimes H^1(C_4.\mathbb{Z})$ が．特に．$X = \sum a_{ik}^{13} a_{jl}^{24} \delta_i^1 \otimes \delta_j^2 \otimes \delta_k^3 \otimes \delta_l^4$，$A^{13}=[a_{ij}^{13}]$，$A^{24}=[a_{ij}^{24}] \in M(2g.\mathbb{Z})$ の形に書けていたとする．また，$X = \sum_{p+q=4} X^{p.q}$，$X^{p.q} \in H^{p.q}(C_1\times C_2\times C_3\times C_4)$ とする．このとき．

i) $X^{4.0} = 0 \iff {}^t(\Omega^1\otimes\Omega^2)(A^{13}\otimes A^{24})(\Omega^3\otimes\Omega^4) = 0$

ii) $X^{3.1} = 0 \iff \begin{cases} {}^t(\overline{\Omega^1}\otimes\Omega^2)(A^{13}\otimes A^{24})(\Omega^3\otimes\Omega^4) = 0 \\ {}^t(\Omega^1\otimes\overline{\Omega^2})(A^{13}\otimes A^{24})(\Omega^3\otimes\Omega^4) = 0 \\ {}^t(\Omega^1\otimes\Omega^2)(A^{13}\otimes A^{24})(\overline{\Omega^3}\otimes\Omega^4) = 0 \\ {}^t(\Omega^1\otimes\Omega^2)(A^{13}\otimes A^{24})(\Omega^3\otimes\overline{\Omega^4}) = 0 \end{cases}$

命題 4.3　$X \in H^1(C_1,\mathbb{Z})\otimes H^1(C_2,\mathbb{Z})\otimes H^1(C_3,\mathbb{Z})\otimes H^1(C_4,\mathbb{Z})$
とする．このとき次は同値である．

i) $X=\sum a^{13}_{ik}\, a^{24}_{jl}\, \delta^1_i\otimes\delta^2_j\otimes\delta^3_k\otimes\delta^4_l$ の形に書けて．
$X\in H^{2,2}(C_1\times C_2\times C_3\times C_4)$，

ii) $X \in \mathrm{Im}\big(\mathrm{Hom}(J(C_1),J(C_3))\otimes \mathrm{Hom}(J(C_2),J(C_4))$
$\longrightarrow H^1(C_1,\mathbb{Z})\otimes H^1(C_2,\mathbb{Z})\otimes H^1(C_3,\mathbb{Z})\otimes H^1(C_4,\mathbb{Z})\big)$

証明

$${}^t(\Omega^1\otimes\Omega^2)(A^{13}\otimes A^{24})(\Omega^3\otimes\Omega^4)=0 \Leftrightarrow (\forall i,l)\sum_{j,k=1}^{2g} \omega^1_{ji}\, a^{13}_{jk}\, \omega^3_{kl}\, {}^t\Omega^2 A^{24}\Omega^4=0$$
$$\Leftrightarrow {}^t\Omega^1 A^{13}\Omega^3=0 \text{ or } {}^t\Omega^2 A^{24}\Omega^4=0$$

等に注意すれば (4.2) より．

i) $\Leftrightarrow$ 次の iii)～v) のいずれか．

iii) ${}^t\Omega^1 A^{13}\Omega^3=0$ かつ ${}^t\bar{\Omega}^1 A^{13}\Omega^3=0$

iv) ${}^t\Omega^2 A^{24}\Omega^4=0$ かつ ${}^t\bar{\Omega}^2 A^{24}\Omega^4=0$

v) ${}^t\Omega^1 A^{13}\Omega^3=0$ かつ ${}^t\Omega^2 A^{24}\Omega^4=0$

ところが iii) または iv) ならば $X=0$ となってしまう．

v) $\Leftrightarrow$ ii)

は I の 1°, 2° より明らかである．

References

1. Grothendieck, A.: Le groupe de Brauer. Dix Exposés sur la cohomologie des schémas. North-Holland (1968).
2. Grothendieck, A.: SGA5 Cohomologie ℓ-adique et fonctions L. Lecture Notes in Math. 589, Springer (1977).
3. Hodge, W. V. D., and Atiyah, M. F.: Integrals of the second kind on an algebraic variety. Annales of Math. 62 (1955) 56-91.
4. Kleiman, S. L.: Algebraic cycles and the Weil conjectures. Dix Exposés sur la cohomologie des schémas. North-Holland (1968).
5. Lang, S.: Abelian Varieties. Interscience Pub., New York (1959).
6. Lieberman, D.: Higher Picard varieties. Amer. J. Math. 90 (1968) 1165-1199.
7. Lieberman, D.: Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds. ibid. 90 (1968) 366-374.
8. Sasakura, N.: On some results on the Picard numbers of certain algebraic surfaces. J. Math. Soc. Japan 20 (1968) 297-321.
9. Shioda, T., and Inose, H.: On singular K3 surfaces. Complex Analysis and Algebraic Geometry, Iwanami-Cambridge Univ. Press (1977) 119-136.
10. Tate, J. T.: Algebraic cycles and poles of the zeta function. Arithmetical Algebraic Geometry. Happer & Row, New York (1965) 93-110.

11. Tate, J. T.: Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. Inv. math. 2 (1966) 134-144.

12. Weil, A.: Variétés Abéliennes et Courves Algébriques. Hermannn, Paris (1948).