数理解析研究所講究録
第 450 巻 1982 年 157-176

代数解析と Hodge 構造

東大 理　　斎藤盛彦

孤立特異点を持つ超曲面 $\{f=0\}$ に対し, Milnor fibration

$$f : X = B_\varepsilon \cap f^{-1}(S) \longrightarrow S$$

は one-parameter family $\{X_t = f^{-1}(t)\}$ の degenerate する様子を topological に表わすものである (vanishing cycle やその monodromy, etc)。それに対し、これらの現象を解析的に考察する手段として、現在のところ次の2つの理論が知られている。ひとつは Steenbrink による vanishing cohomology 上の mixed Hodge structure であり、もうひとつは Brieskorn に始まる Gauss-Manin connection である。ところが最近になって、これら2つの理論の間の関係が注目され始め、Scherk-Steenbrink は Gauss-Manin connection に付随して natural に定まる Brieskorn lattice $\mathcal{H}^{(0)}_{X,0} = \Omega^{n+1}_{X,0}/df\wedge d\Omega^{n-1}_{X,0}$ より Steenbrink の Hodge filtration $\{F_{St}^{\cdot}\}$ が定まることを見い出した。(ただし、彼らの定式化した命題は少し修正する必要があった, cf [Sa])

これらの関係をもう少し詳しく調べていくと、そこでカギになっているのは、柏原氏らによる代数解析の理論であり、Scherk-Steenbrinkの結果はさらに一般的な理論（これはWeil Conjectureの標数0 versionとでもいえる）の一端ではないかという感じをいだかせる。

ここではまず、Weil Conjectureの標数0における対応物は何かについて、代数解析の言葉を使って少し説明をした後、Scherk-Steenbrinkの結果について、その正しい定式化を与える。　なお、上において本質的な問題のひとつは、projective variety Yの Zariski open set上で定義されたlocal system Lがpolarizable variation of Hodge structureの構造を持つとき、Lから定まるIntersection cohomology sheaf $^{\pi}L$にcanonicalに(pure) Hodge complexの構造がはいるかということであるが、これはまだ未解決の様である。

§1. Constructible sheafとregular holonomic system

(1.1)　Xをn次元複素多様体、Aを$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$とする。このとき、$D(A_X)$をX上のA-Moduleのderived category, $D_c^b(A_X)$を、$D(A_X)$のfull subcategoryでconstructible cohomologyを持つbdd complexからなるものとする。ここでX上のA-moduleのsheaf $\mathcal{F}$

が constructible というのは，X の stratification $X=\bigcup X_i$（ただし $\overline{X_i}$ は closed analytic set）があって、$\mathcal{F}|X_i$ は locally constant かつ $\forall x\in X$, $\mathcal{F}_x$ は finite A-module ということである。

一方，$\mathcal{D}_X$ を X 上の holomorphic differential operator のなす sheaf とする。同様に、$D(\mathcal{D}_X)$ を X 上の $\mathcal{D}_X$-Module の derived category，$D^b_{r.h}(\mathcal{D}_X)$ を $D(\mathcal{D}_X)$ の full subcategory で regular holonomic cohomology を持つ bdd complex からなるものとする。(cf. [K.K])

(1.2) <u>定理</u>（柏原．Mebkhout）

$$\Phi:\ D^b_{r.h}(\mathcal{D}_X)\xrightarrow{\sim} D^b_c(\mathbb{C}_X)\quad \text{equivalent}$$

ただし、Φ は $\Phi(\mathcal{M}^\cdot)=DR(\mathcal{M}^\cdot)\ (:=\Omega_X^\cdot\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{M}^\cdot)$ で与えられる。

（$\Omega_X^\cdot$ は X 上の holomorphic differential form の complex）□

(1.3) <u>定理</u>　$\mathcal{F}^\cdot\in D^b_c(\mathbb{C}_X)$ に対し，次は同値。

1) $^\exists\mathcal{M}$: regular holonomic system s.t. $DR(\mathcal{M})\simeq\mathcal{F}^\cdot$。

2) $\mathcal{F}^\cdot$ は perverse complex.　□

ここで $\mathcal{F}^\cdot$ が perverse というのは，次の２つの条件を満たすことである。

1) $\operatorname{codim}\operatorname{supp}\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\cdot)\geq i\quad(i\geq 0)$，$\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\cdot)=0\quad(i<0)$.

2) $\operatorname{codim}\operatorname{supp}\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^{*\cdot})\geq i\quad(i\geq 0)$，$\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^{*\cdot})=0\quad(i<0)$.

$(\mathcal{F}^{*\cdot}:=\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}^\cdot,\mathbb{C}_X))$

Perverse complex からなる $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ の full subcategory を $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ とすれば，定理 (1.3) は Φ により regular holonomic system の abelian category は $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ と equivalent であることを意味する。

(1.4) <u>命題</u>　Y を X の irreducible closed analytic subset ($\mathrm{codim}\, Y = \ell$), L を Y の smooth Zariski open subset U 上で定義された local system とする。このとき $\mathcal{F}^{\cdot} \in \mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ が unique に存在して次の条件を満たす。

1) $\mathrm{supp}\, \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^{\cdot}) \subset Y$, $\quad \mathcal{F}^{\cdot}|_U \simeq L[-\ell]$ in $D^b_c(U)$

2) $\mathrm{codim}\ \mathrm{supp}\, \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^{\cdot}) > i \quad (\forall i > \ell)$

2*) $\mathrm{codim}\ \mathrm{supp}\, \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^{*\cdot}) > i \quad (\forall i > \ell)$

さらに、$DR(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{F}^{\cdot}$, $Z := Y - U$ とおくと、上の条件は次の3つの条件と同値

1)' $\mathcal{M}|_{X-Z} \simeq L \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_{U|X-Z} \quad (\mathcal{B}_{U|X-Z} := \mathcal{H}^{\ell}_{[U]}(\mathcal{O}_{X-Z}))$

2)' $\mathcal{H}^0_Z(\mathcal{M}) = 0$

2*)' $\mathcal{H}^0_Z(\mathcal{M}^*) = 0 \quad (\mathcal{M}^* := \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\Omega^n_X)^{\otimes -1})$ □

<u>定義</u>　上の $\mathcal{F}^{\cdot}$ (及び $\mathcal{M}$) を L (及び $\mathcal{N} := L \otimes \mathcal{B}_{U|X-Z}$) の minimal extension といい、${}^{\pi}L$ (及び ${}^{\pi}\mathcal{N}$) と書く。
(${}^{\pi}L$ は intersection cohomology sheaf とも呼ばれる)

(1.5)　$f: X \longrightarrow Y$ を complex manifold の間の proper holomorphic map とする。このとき、積分 $\int_f : D^b_{r.h}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D^b_{r.h}(\mathcal{D}_Y)$ が

$$\int_f \mathcal{M}^{\cdot} := \mathbb{R}f_*(\mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}^{\cdot})[\dim Y - \dim X]$$

で定義され、Φ により $\int_f$ と $\mathbb{R}f_*$ は同一視される。

(i.e. $\Phi_Y(\int_f \mathcal{M}^{\cdot}) \simeq \mathbb{R}f_*(\Phi_X \mathcal{M}^{\cdot})$)

(1.6) 定理 (Deligne, Gabber, Beilinson, Bernstein) (cf [G.M])

$f: Z \longrightarrow Y$ を algebraic manifold の間の smooth projective morphism ($m := \dim Z - \dim Y$), X を Z の irreducible closed sub variety とする。 このとき、次が成り立つ。

(1.6.1) $$Rf_* {}^{\pi}\mathbb{C}_X \simeq \bigoplus_{\alpha} {}^{\pi}L_\alpha [\ell_\alpha] \quad \text{in } D_c^b(\mathbb{C}_Y)$$

ただし、${}^{\pi}\mathbb{C}_X$ は $\mathbb{C}_{X_{reg}}$ の minimal extension, ${}^{\pi}L_\alpha$ は Y の sub variety V_α の open dense sub set 上の local system L_α の minimal extension である。 さらに、$Loc(V.\ell) := \bigoplus_{\substack{V_\alpha = V \\ \ell_\alpha = \ell}} {}^{\pi}L_\alpha [\ell_\alpha]$ とおくと、

$^\exists \Lambda : Loc(V.\ell) \longrightarrow Loc(V.\ell+2)$ が存在して、

$$Loc(V.\ell)[2m] \simeq (Loc(V,-2m-\ell))^* \quad \text{(Poincaré duality)}$$

$$\Lambda^\ell : Loc(V,-m-\ell) \xrightarrow{\sim} Loc(V,-m+\ell) \quad \text{(Hard Lefschetz)}$$

が成り立つ。 □

[G.M] によれば、証明には標数 p の理論 (Weil Conjecture) を使うと書いてある。 我々の目標は当然上の命題を標数 0 の範囲内で証明することであるが、それには今の Hodge Theory (ないしは harmonic theory) ではとても手が届かないという気もする。 標数 p では Gabber により Intersection cohomology sheaf I_X は pure 故に $Rf_* I_X$ も pure (cf (2.2))、よって pure complex に関する一般論から (1.6.1) の分解はでてくるらしい。 そこで標数 0 においても pure complex にあたる概念を定義したいが、それはなかなかうまくいかない。 Frobenius が local に定義されるのに

対して、Hodge構造は何らかの global な対象と結びついてしか意味を持ちにくいというのがその最大の理由であろう。ただ ${}^{\pi}L$ については、generic には L が polarizable variation of Hodge structure の構造を持つと定式化してもよさそうに思われる。当面の問題は、Hodge filtration に対応する $L\otimes_{\mathbb{C}} B_{U|X}$ の good filtration を canonical に ${}^{\pi}(L\otimes B_{U|X})$ にまで延長する方法があるかであるが、これはよくわからない。ただ、孤立特異点の Gauss Manin connection の計算は、これに対して何らかの示唆を与えるものと思われる。

§2 Weil Conjecture と Mixed Hodge Structure

(2.1) X_0 を $\mathbb{F}_q$ 上 finite type の scheme, $\mathcal{F}_0$ を X_0 上の constructible $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-sheaf とする。(cf. [CWII(1.1)]) このとき、$\mathcal{F}_0$ が ponctuel に pure of weight n というのは任意の closed point $x_0 \in |X_0|$ と x_0 上の geometric point $x \in X(\mathbb{F})$ に対し、Frobenius $F_{x_0}^{*} := F_x^{*\deg x_0} : \mathcal{F}_x \circlearrowleft$ のすべての固有値が代数的数でその共役はどれも絶対値 $N(x_0)^{n/2}$ を持つことである。($N(x_0) := \# k(x_0)$) 又、$\mathcal{F}_0$ が ponctuel に pure な $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-sheaf の extension をくり返して得られるとき mixed といい、さらにそれらの ponctuel な weight がどれも n 以下の時、mixed of ponctuel weight $\leq n$ ということにする。

次に．$K \in D_c^b(X)$ に対し，K が mixed of weight $\leq n$ とは．
任意の i に対し，$\mathcal{H}^i(K)$ が mixed of ponctuel weight $\leq n+i$ とし，
K が pure of weight n とは．K が mixed of weight $\leq n$ かつ
DK が mixed of weight $\leq -n$ なることとする。(cf [CWII(6.2)])
($DK := R\mathcal{H}om(K. K_{X_0})$，$K_{X_0} := Ra^!\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ dualizing sheaf，$a : X_0 \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p$)

(2.2) <u>定理</u> (Deligne [CWII(6.2.3)])

$f: X \longrightarrow Y$ が $\mathbb{F}_p$ 上 finite type の schemes の morphism で
$K \in D_c^b(X)$ が mixed of weight $\leq n$ とする。このとき．
$Rf_! K$ は mixed of weight $\leq n$。 □

<u>系</u>　さらに f が proper で $K \in D_c^b(X)$ が pure of weight n なら $Rf_* K$ も pure of weight n。 □

上の系から、X が $\mathbb{F}_q$ 上 proper で smooth な場合の Weil Conjecture が得られる。又．X が singular な場合でも．irreducible で normal なら．Intersection cohomology sheaf I_X を使えば．Gabber の purity より．Weil Conjecture の主要結果はそのまま成り立つことになる。

(2.3) [THI] によれば Weil Conjecture に対応するのは mixed Hodge structure である。

<u>定義</u>　A を $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ 又は $\mathbb{R}$ とする。このとき，A-mixed Hodge structure とは．finite A-module H_A，$H_{A\otimes\mathbb{Q}} \simeq H_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 上の finite increasing filtration W (weight filtration)，$H_{\mathbb{C}} \simeq H_A \otimes_A \mathbb{C}$ 上の finite decreasing filtration

F (Hodge filtration) から成り．これらは次の条件を満たす。

(2.3.1) $(Gr_n^W(H_{A\otimes\mathbb{Q}}),\ Gr_n^W(F))$ は $A\otimes\mathbb{Q}$-Hodge structure of weight n ($^\forall n\in\mathbb{Z}$)。（即ち．$Gr_n^W(H_{\mathbb{C}})=\bigoplus_{p+q=n}H^{pq}$ なる直和分解が存在して，$Gr_n^W(F^p)=\bigoplus_{p'\geq p}H^{p',q}$ かつ $H^{pq}=\overline{H^{qp}}$ が成り立つ。）

<u>定義</u> topological space X 上の cohomological A-mixed Hodge complex とは，$K_A\in D^+(A_X)$，$K_{A\otimes\mathbb{Q}}\in D^+(A\otimes\mathbb{Q}_X)$，$K_{\mathbb{C}}\in D^+(\mathbb{C}_X)$ 及び $K_{A\otimes\mathbb{Q}}$ の filtration W，$K_{\mathbb{C}}$ の filtrations W, F から成り，次を満たす。

(2.3.2) i) $H^k(X,K_A)$ は finite A-module で $H^\cdot(X,K_A)\otimes\mathbb{Q}\xrightarrow{\sim}H^\cdot(X,K_A\otimes\mathbb{Q})$。

ii) $K_{A\otimes\mathbb{Q}}\simeq K_A\otimes\mathbb{Q}$ in $D^+(A\otimes\mathbb{Q}_X)$，$(K_{\mathbb{C}},W)\simeq(K_{A\otimes\mathbb{Q}},W)\otimes\mathbb{C}$ in $D^+F(\mathbb{C}_X)$ (i.e. filtered quasi iso)。（ただしこれらの同型は given とする）

iii) $(Gr_n^W(K_{A\otimes\mathbb{Q}}),\ Gr_n^W(F))$ は cohomological $A\otimes\mathbb{Q}$-Hodge complex of weight n ($^\forall n$)。つまり．$Gr_n^W(F)$ による $H^\cdot(X,Gr_n^W(K_{\mathbb{C}}))$ の spectral sequence は E_1-degenerate して，$(H^i(X,Gr_n^W(K_{A\otimes\mathbb{Q}})),\ Gr_n^W(F))$ は $A\otimes\mathbb{Q}$-Hodge structure of weight $n+i$ ($^\forall i$) となる。

これらの2つの概念は次の命題によって結びついている。

(2.4) <u>命題</u> K を cohomological A-mixed Hodge complex とせよ。このとき，$H^n(X,K_{A\otimes\mathbb{Q}})$ 上の filtration $W[n]$ 及び $H^n(X,K_{\mathbb{C}})$ 上の filtration F は．$H^n(X,K_A)$ に A-mixed Hodge structure を定める。□

Deligne が algebraic variety の cohomology に mixed Hodge structure を定義した方法はすべてこの命題によっている。（が(．(2.3.2)iii) の条件は，かなり強い条件であるが．complex の global な条件

のみしか規定しておらず、Frobeniusにより local に定義された mixed complex の対応物とはとても見なせない。定理(2.2) になるようなら、何か local に定義された、W及びFに関する良い条件をみつけて、local にその条件を満たしていれば(さらに $\overline{\mathrm{supp}\,\mathcal{H}^{\cdot}(K_A)}$ が projective なら) K は上の意味で cohomological A-mixed Hodge complex になるというのが理想であろう。次節では、その条件に対し、多少の考察を試みる。

§3. Variation of Hodge structure

(3.1) <u>定義</u>　$\mathcal{M}$を coherent $\mathcal{D}_X$-Module とする。このとき、$\mathcal{M}$ の decreasing filtration $\mathcal{F}^{\cdot}$ が次を満たす時、$\mathcal{F}^{\cdot}$を good filtration という。

i) $\forall i \in \mathbb{Z}$　$\mathcal{F}^i\mathcal{M}$ は coherent $\mathcal{O}_X$-Module で

$$\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^i\mathcal{M} = \mathcal{M}, \qquad \mathcal{F}^i\mathcal{M} = \{0\} \quad \text{for } i \gg 0.$$

ii) $\mathcal{D}(k)\,\mathcal{F}^i\mathcal{M} \subset \mathcal{F}^{i-k}\mathcal{M}$　for $\forall k \geq 0,\ \forall i \in \mathbb{Z}$.

iii) $\exists i_0 \in \mathbb{Z}$ s.t. $\mathcal{D}(k)\,\mathcal{F}^i\mathcal{M} = \mathcal{F}^{i-k}\mathcal{M}$ for $\forall k \geq 0\ \forall i \leq i_0$.

(ただし、$\mathcal{D}(k) = \left\{ \sum_{|\nu|\leq k} a_\nu\, \partial_1^{\nu_1}\cdots\partial_n^{\nu_n} \right\}$)

<u>定義</u>　$\mathcal{M}^{\cdot} \in D^b_{r.h}(\mathcal{D}_X)$ を各 $\mathcal{M}^i$ が coherent $\mathcal{D}_X$-Module よりなる complex とする。この時 $\mathcal{M}^{\cdot}$ の filtration $\mathcal{F}^{\cdot}$ が good とは各 i について $\mathcal{F}^{\cdot}(\mathcal{M}^i)$ が good であるとする。

さらに、DR$(\mathcal{M}^\cdot)$の filtration $\mathcal{F}^\cdot$ を

$$(\mathcal{F}^i DR(\mathcal{M}^\cdot))^k := \bigoplus_{p+q=k} \Omega_X^p \otimes \mathcal{F}^{i-p}\mathcal{M}^q$$

で定義する。

<u>定義</u>　$f : X \longrightarrow Y$ を projective morphism，$(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{F}^\cdot)$を上の通りとする。この時，filtered complex $(\int_f \mathcal{M}^\cdot, \mathcal{F}^\cdot)$を次の様に定める。

i) f が smooth な場合は，filtered complex $(DR_{X/Y}(\mathcal{M}^\cdot), \mathcal{F}^\cdot)$ の direct image として定義する。

ii) f が closed immersion の場合は，local に $X = \{x_1 = \cdots = x_\ell = 0\}$ として，$\int_f \mathcal{M}^\cdot[-\ell] \simeq \mathcal{M}^\cdot \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_1 \cdots \partial_\ell]$ の filtration を

$$\mathcal{F}^i(\mathcal{M}^\cdot \otimes \mathbb{C}[\partial_1 \cdots \partial_\ell]) = \sum_\nu \mathcal{F}^{i+\ell+|\nu|}\mathcal{M}^\cdot \otimes \partial_1^{\nu_1} \cdots \partial_\ell^{\nu_\ell}$$

により定義する。これは good filtration の性質から coordinate のとり方によらない。

(3.2) <u>命題</u>　$f : X \to Y$，$(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{F}^\cdot)$を上の通りとする。この時 (1.5)の同型 $DR_Y(\int_f \mathcal{M}^\cdot) \simeq \mathbb{R}f_* DR_X(\mathcal{M}^\cdot)$ は filtered complex としても同型である。

(3.3) <u>定義</u>　Xを複素多様体，Aを $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ 又は $\mathbb{R}$ とする。このとき，X上の variation of A-Hodge structure of weight n とは，X上のA-local system L，$\mathcal{M} := \mathcal{O}_X \otimes_A L$ の decreasing filtration $\mathcal{F}^\cdot$ からなり，これらは次を満たす。

i) $\mathcal{F}^\cdot$ は $\mathcal{D}_X$-Module $\mathcal{M}$ の good filtration

ii) $\mathcal{F}^\cdot\mathcal{M}$ は holomorphic vector bundle $\mathcal{M}$ の subbundle であり、各 $x \in X$ に対し、$(L_x \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \mathcal{F}^\cdot|_{L_x \otimes_A \mathbb{C}})$ は $A \otimes \mathbb{Q}$-Hodge structure of weight n となる。

さらに、local system の morphism $S : L \otimes_A L \to A$ が存在して次を満たすとき、S を $(L, \mathcal{F}^\cdot)$ の polarization という。

i) S は A 上 $\underbrace{\text{bilinear}}_{S(u,v)=(-1)^n S(v,u)}$、(よって $\mathbb{C}$ まで係数拡大したのをやはり S で表わす。)

ii) $\forall x \in X$, $S(H_x^{p,q}, \overline{H_x^{p',q'}}) = 0$ if $p \neq p'$, $q \neq q'$

$i^{p-q} S(v, \bar{v}) > 0$ if $v \in H_x^{p,q}$ $v \neq 0$

(ただし、$H_x^{p,q} := \mathcal{F}_x^p \cap \overline{\mathcal{F}_x^q}$)

(3.4) 命題 (Deligne cf [Zu])

$f : X \to Y$ を smooth projective morphism, $(L, \mathcal{F}^\cdot)$ を X 上の polarizable variation of A-Hodge structure of weight n とする。この時、$\int_f^i \mathcal{O}_X \otimes L := \mathcal{H}^i(\int_f \mathcal{O}_X \otimes L)$ に induce される filtration $\mathcal{F}^\cdot$ は $R^i f_* L \simeq DR_Y(\int_f^i \mathcal{O}_X \otimes L)$ に polarizable variation of A-Hodge structure of weight $n+i$ を定め、$\mathbb{R}f_* DR_X(\mathcal{O} \otimes L)$ の $\mathcal{F}^\cdot$ に関する spectral sequence は E_1-degenerate する。

系 L, $(DR_X(\mathcal{O} \otimes L), \mathcal{F}^\cdot)$ は X が smooth projective の時 cohomological A-Hodge complex になる。

(3.5) 問題　Yを irreducible projective variety, $U\subset Y$を smooth Zariski open subset, $Z=Y-U$, $(L, \mathcal{F})$を U上の polarizable variation of Hodge structure とし、Yが $i: Y\hookrightarrow X$ で多様体Xに埋め込まれているとする。このとき $\mathcal{B}_{U|X\setminus Z}\otimes L=\int_{i|_U}\mathcal{O}_U\otimes L\,[-l]\big|_{X\setminus Z}$ の minimal extension を$\mathcal{M}$とすると、$\mathcal{F}$が $\mathcal{M}|_{X-Z}=\mathcal{B}_{U|X\setminus Z}\otimes L$ に induce する good filtration (cf (3.1)) を canonical に$\mathcal{M}$にまで extend し、$({}^{\pi}L, DR_X(\mathcal{M}), \mathcal{F})$ が cohomological Hodge complex になるようにすることができるか？

最も楽観的な予想はこの問いが肯定的に解け、しかも (1.6.1) の同型が filtration こみで成り立つというのであるが、計算できる具体例がほとんどないので、今のところ何ともいえない。Lとして$\mathbb{Z}_U$、$\mathcal{F}$として trivial filtration をとった場合は、Intersection cohomology に Hodge structure を入れる問題になるが、その場合は逆にYの resolution に定理(1.6)を適用して、Hodge structure を定義できる可能性もある。(例えば cone の場合など)

次節では、good filtration の extension の例として、孤立特異点の Gauss Manin system を考察する。

§4, Gauss Manin system と mixed Hodge structure

(4.1) $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}$ を孤立特異点を持った正則函数とする。
このとき、f は多項式としてよく、その次数は任意に大きくとれる。
又、$\overline{f^{-1}(0)} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ は原点以外で smooth と仮定してよい。

<u>定義</u> $Y := \overline{\{f(x) = t\}} \subset \mathbb{P}^{n+1} \times S$ $\quad p : Z = \mathbb{P}^{n+1} \times S \longrightarrow S$ projection

$X := (B \times S) \cap Y$, $\quad S := \{|t| < \eta\}$, $\quad B = \{\|x\| < \varepsilon\}$,

$\bar{f} := p|_Y$. $\quad f = \bar{f}|_X$, $\quad i : X \hookrightarrow Y$ inclusion.

このとき、$1 \gg \varepsilon \gg \eta > 0$ なら、$\bar{f} : Y \to S$ は原点以外で smooth,
$f : X \to S$ はいわゆる Milnor fibration になり

$$f' : X^* = X \setminus f^{-1}(0) \to S^* = S \setminus \{0\}$$

は $\quad C^\infty$ fibration になる。

<u>定義</u> $H_X := R^n f_* \mathbb{C}_X|_{S^*}$ $\quad H_Y := R^n \bar{f}_* \mathbb{C}_Y|_{S^*}$

H_X 及び H_Y は S^* 上の local system であり それぞれの monodromy を M_X 及び M_Y とする。

$\pi : \tilde{S} \ni \hat{t} \mapsto t = \hat{t}^e \in S$ を $\tilde{H}_Y := \pi^* H_Y$ が unipotent monodromy となる base change とし、$\quad U \to S^*$ universal covering に対し、$X_\infty := X \times_S U$, $\quad Y_\infty = Y \times_S U$ とおく。

(4.2) <u>定義</u> $\mathcal{H}_X := \int_f^n \mathcal{O}_X$, $\quad \mathcal{H}_Y := \int_{\bar{f}}^n \mathcal{O}_Y$. $\quad$ (cf (1.5))

$f : X \to S$ の場合、proper ではないが、$\int_f \mathcal{O}_X \in D^b_{r.h}(\mathcal{D}_S)$ となり、$DR_S(\int_f \mathcal{O}_X) = \mathbb{R}f_* \mathbb{C}_X$, $\quad DR_S(\int_{\bar{f}} \mathcal{O}_Y) = \mathbb{R}\bar{f}_* \mathbb{C}_Y$ となる。

(3.1) によれば，$\mathcal{O}_X$ 及び $\mathcal{O}_Y$ の trivial filtration $F^{\cdot}$ (i.e. $F^0\mathcal{O}_X=\mathcal{O}_X$, $F^1\mathcal{O}_X=\{0\}$) は $\mathcal{H}_X$ 及び $\mathcal{H}_Y$ に decreasing filtration $F^{\cdot}$ を induce する。このとき，次が成り立つ。(cf [Sa])

(4.3) <u>定理</u>

i) $F^n\mathcal{H}_{X,0} \simeq \Omega^{n+1}_{X,0}/dt\wedge d\Omega^{n-1}_{X,0}$ (Brieskorn lattice)

$\forall i\geq 0, \quad F^{n-i}\mathcal{H}_X = \partial_t^{\,i}\, F^n\mathcal{H}_X.$

ii) $F^{\cdot}(\mathcal{H}_Y)$ の各 $t\in S^*$ における制限は $H^n(Y_t,\mathbb{C})$ の Hodge filtration と一致し，$(R^n f_*\mathbb{Z}_Y|_{S^*},\ F^{\cdot}|_{S^*})$ は S^* 上の polarizable variation of Hodge structure of weight n となる。

iii) $d=$ degree f が十分大きければ，$i^*:\mathcal{H}_Y\to\mathcal{H}_X$ は surjective. Ker i^* は locally free $\mathcal{O}_S$-Module of finite type, i.e.

$$0\to\oplus\mathcal{O}_S\to\mathcal{H}_Y\to\mathcal{H}_X\to 0$$

さらに i^* は F に関し，strictly compatible, i.e.

$$i^*F^p\mathcal{H}_Y = F^p\mathcal{H}_X \qquad \square$$

注意．$\mathcal{H}_{X,0}$ は $\mathcal{H}_{Y,0}$ の microlocalization であり，この場合 microlocalize する事が丁度 vanishing cohomology をとり出すことと一致している。又 iii) の exact sequence は $\mathcal{H}_X$ に invariant cycle がある場合は split しない。

以下，定理 (4.3) の iii) が成り立つ様，d は十分大きいと仮定する。

(4.4) $j: S^* \hookrightarrow S$ を inclusion とする。このとき、

$${}^\pi H_Y = j_* H_Y \simeq R^n f_* \mathbb{C}_Y, \quad DR(\mathcal{H}_Y) = {}^\pi H_Y$$

であり、$\mathcal{F}^\cdot(\mathcal{H}_Y)$ は S^*上の Hodge filtration を原点まで接続してることになる。故に問題はこの filtration が、何らかの意味で canonical かどうかである。

例えば、$\tilde{Y} \to Y$ という bimeromorphic な変換で singular fiber だけを変えた場合、$\mathcal{H}_Y$ は $\int^n \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ の direct factor になるが、このとき、$\int^n \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ の Hodge filtration $\mathcal{F}^\cdot$ がその直和分解と compatible でさらに、$\mathcal{H}_Y$ に induce された filtration がもとの $\mathcal{H}_Y$ の Hodge filtration と一致するかというのが問題である。(これは dual filtration の理論がうまくいけば、成り立ちそうに思われる。)

又、S^*上の variation $\mathcal{F}^\cdot|_{S^*}$ だけから何とかして $\mathcal{F}^\cdot$ を特徴付けられないかというのも当然問題になる。そこで Schmid の limit mixed Hodge structure との対比を試みる。

(4.5) S^*上の local system H_Y に対し、locally free $\mathcal{O}_S$-Module としての原点への接続 $\mathcal{H}_Y$ (及び $\mathcal{H}_Y'$) が unique に存在し、次を満たす。

i) $\mathrm{Ker}\,\nabla = H_Y$ となる S^*上の connection は原点まで meromorphic に接続され、原点で simple pole を持つ。

ii) ∇の原点での residue の固有値は $(-1,0]$ (及び $[0,1)$) に含まれる。

さらに, 同型 $H^n(Y_\infty, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_Y(0) := \mathcal{L}_{Y,0}/t\mathcal{L}_{Y,0}$ が

$u \longmapsto \exp(-\log t \log M_Y/2\pi\sqrt{-1})$ により得られる。

ただし, u は H_Y の multivalued section とみなし, $\log M_Y$の固有値は $[0,1)$ (及び $(-1,0]$) にはいるようにする。

一方 H_X, $\hat{H}_X := \pi^* H_X$, $\hat{H}_Y := \pi^* H_Y$ に対しても同様の extension が得られ, それらを $\mathcal{L}_X$, $\hat{\mathcal{L}}_X$, $\hat{\mathcal{L}}_Y$ などで表わす。

($\pi : \tilde{S} \to S$ は $\pi^* H_Y$ が unipotent monodromy を持つ様な covering (4.1))

(4.6) <u>命題</u> (Schmid)

$\hat{S}^* := \hat{S} \setminus \{0\}$ 上の variation $\pi^*(\mathcal{F}^\cdot|_{S^*})$ は原点まで $\hat{\mathcal{L}}_Y$ の subbundle $\tilde{\mathcal{F}}^\cdot$ として接続され, $F_S^\cdot := \tilde{\mathcal{F}}^\cdot|_{\hat{t}=0}$ と monodromy weight filtration とは $H^n(Y_\infty, \mathbb{C}) \simeq \hat{\mathcal{L}}_Y(0)$ に mixed Hodge structure を定める。 □

<u>注意</u>. $\mathcal{F}^\cdot|_{S^*}$ も $\mathcal{L}_Y$ の subbundle $\check{\mathcal{F}}^\cdot$ として接続されるが $\check{F}^\cdot = \check{\mathcal{F}}^\cdot|_{t=0}$ は monodromy decomposition $H^n(Y_\infty, \mathbb{C}) = \bigoplus_\lambda H^n(Y_\infty, \mathbb{C})_\lambda$ (ただし, $H^n(Y_\infty, \mathbb{C})_\lambda := \{u \in H^n(Y_\infty, \mathbb{C}) \mid (M_Y - \lambda)^{n+1} u = 0\}$) とは一般に compatible でなく, $F_S^\cdot$ とは一致しない。 ただ $\check{F}^\cdot$ はあまり意味を持たないにしても, $\check{\mathcal{F}}^\cdot$ の方は意味がある。

$\mathcal{H}_Y \supset \mathcal{L}_Y \supset \mathcal{F}^n \mathcal{H}_Y$ より $\check{\mathcal{F}}^n \supset \mathcal{F}^n$ 及び $\check{\mathcal{F}}^\cdot \supset \mathcal{F}^\cdot \cap \mathcal{L}_Y$ は, $\check{\mathcal{F}}^\cdot$ の定義からすぐわかる。 特に問題ははたして等号

成り立つかどうかである。（もし等号が成り立つなら，Scherk-Steenbrinkの結果はすぐでてくる。）

(4.7) 命題 (Steenbrink)

$H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ は canonical に mixed Hodge structure を持ち，$i^*: H^n(Y_\infty, \mathbb{C}) \to H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ は mixed Hodge structure の morphism となる。 □

ここで，Scherk-Steenbrinkの結果というのは $H^n(X_\infty \mathbb{C})$ の Hodge filtration $F^\cdot_{St}$ が $\mathcal{H}_X = \int_f^n \mathcal{O}_X$ の Hodge filtration $\mathcal{F}^\cdot$ (cf (4.2)) から定まるというのであるが，その定め方において彼らは，$\check{F}^\cdot$ が monodromy decomposition (cf (4.6)の注意) と compatible でないことに気付かず，unipotent base change をせずに，議論を進めた。そこを修正すると次の様に定式化される。

(4.8) 定理

$$F^\cdot_{St} = \mathrm{Im}(\pi^*(\mathcal{F}^\cdot\mathcal{H}_X \cap \mathcal{L}_X) \cap \tilde{\mathcal{L}}_X \to \tilde{\mathcal{L}}_X(0)(= H^n(X_\infty \mathbb{C})))$$

ただし，$\pi^*(\mathcal{F}^\cdot\mathcal{H}_X \cap \mathcal{L}_X)$ は $\pi^*\omega$ ($\omega \in \mathcal{F}^\cdot\mathcal{H}_X \cap \mathcal{L}_X$) で生成される $\tilde{\mathcal{L}}_X[\zeta^{-1}]$ の $\mathcal{O}_\zeta$-sub Module である。 □

注意. Scherk-Steenbrinkの定式化は $F^\cdot_{St} = \mathrm{Im}(\mathcal{F}^\cdot\mathcal{H}_X \cap \mathcal{L}_X \to \mathcal{L}_X(0))$ であるが，もしこれが正しいとすれば semisimple monodromy を持つ $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ (i.e. plane curve) は必ず quasi homogeneous になり (∵ $\mathcal{F}^n\mathcal{H}_X$ が saturated) 矛盾が生じる。

証明） 定理(4.8)の等式の右辺を $F_G^{\cdot}$ とでもおく。 $F_G^{\cdot} < F_{St}^{\cdot}$ は (4.3)のiii) 及び $\check{\mathcal{F}}^{\cdot} \supset \mathcal{F}^{\cdot}(\mathcal{H}_Y) \cap \mathcal{L}_Y$ からすぐわかるが、逆は $\check{\mathcal{F}}^{\cdot} = \mathcal{F}^{\cdot}(\mathcal{H}_Y) \cap \mathcal{L}_Y$ が今のところわからないので少しまわり道をする必要がある。

<u>定義</u> monodromy decomposition と compatible な $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ の decreasing filtration $F^{\cdot}$ に対し、μ コの有理数 $\{\alpha_i\}$ を次の様に定め F-exponent と呼ぶ。 ($\mu = \dim H^n(X_\infty, \mathbb{C})$)

i) $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_\mu$,

ii) $\forall p, \forall \lambda \in \mathbb{C}_1$, に対し、

$\lambda \neq 1 \Rightarrow \#\{i \mid \exp(-2\pi\sqrt{-1}\alpha_i) = \lambda, [\alpha_i] = n-p\} = \dim_{\mathbb{C}} Gr_F^p H^n(X_\infty, \mathbb{C})_\lambda$

$\lambda = 1 \Rightarrow \#\{i \mid \alpha_i = n+1-p\} = \dim_{\mathbb{C}} Gr_F^p H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1$ 。

($[\alpha_i]$ は Gauss 記号)

又、F_{St}-exponent のことを単に exponent という。 □

このとき exponent の duality と斎藤恭司先生の補題 $\det\left(\int_{\gamma_i(t)} \omega_j\right) \sim t^{(n-1)\mu/2}$ より、 F_{St}-exponent 及び F_G-exponent の総和は共に $(n+1)\mu/2$ となり、 $F_G^{\cdot} < F_{St}^{\cdot}$ より $F_G^{\cdot} = F_{St}^{\cdot}$ がわかる。 QED

注意 1. $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ の filtration ${}'F^{\cdot}$ を ${}'F^{\cdot} := \mathrm{Im}(\pi^*(\check{\mathcal{F}}^{\cdot}\mathcal{H}_X) \cap \tilde{\mathcal{L}}_X \to \tilde{\mathcal{L}}_X(0))$ で定義すると、(4.3)のiii)の exact sequence が split しない関係上 一般には F_{St} とは一致しない。(例えば $f = x^5 + y^5 + z^5 + x^3y^3$)

2、 Varchenko は asymptotic Hodge filtration $F_a^{\cdot}$ を

$F_a^p = \mathrm{Im}\left(\pi^*(t^{p-n}\partial_t^{-n}\mathcal{H}_X)\cap\hat{\mathcal{L}}_X \to \hat{\mathcal{L}}_X(0)\right)$ となる様に定義した。

(cf [Va]) (ただし、$t^{p-n}\partial_t^{-n}\mathcal{H}_X$ は $\mathcal{L}_X[t^{-1}]$ の中で考える。)

$n=1$ 又は f が quasi homogeneous なら $F_a^{\cdot}$ は $F_{St}^{\cdot}$ と一致するが一般には $^\exists k \leq n-1$ s.t. $h_\lambda^{k,n+1-k}\neq 0$ $(\lambda\neq 1)$ or $h_1^{k,n+2-k}\neq 0$ となる場合には両者は一致しない。($h_\lambda^{pq} := \dim Gr_F^p Gr_{p+q}^W H^n(X_\infty,\mathbb{C})$)

<u>系1</u> Hodge number $h_\lambda^{p,q}$ 及び exponent は μ-constant deformation で一定 □

<u>系2</u> $\tilde{\mathcal{H}}_X^{(0)}$ を Brieskorn lattice $\mathcal{H}_X^{(0)} = \partial_t^{-n}\mathcal{H}_X$ の saturation とし、R を $\mathrm{res}(t\partial_t): \tilde{\mathcal{H}}_X^{(0)}/t\tilde{\mathcal{H}}_X^{(0)} \circlearrowleft$ とする。このとき $n=1$ なら $\exp(-2\pi\sqrt{-1}R)$ は monodromy M_X と conjugate. □

系2 は、$N=\log(M_X)_u$ が type $(-1,-1)$ の morphism として $H^n(X_\infty,\mathbb{C})$ に作用することから得られる。

後書き この原稿を書き終えた後、[Bry] の Part II が手に入った。内容はかなり重複している所もあるが、彼は特に (13.5) の問題に対し、regular holonomic system の order という概念を使って1つの予想を立てている様である。

References

[CW] Deligne, P.: La conjecture de Weil. I,II.

[TH] Deligne, P.: Théorie de Hodge. I,II,III.

[Bry] Brylinski, J.L.: Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge I (preprint).

[GM] Goresky, M. and MacPherson, R.: On the topology of complex algebraic maps (preprint).

[KK] Kashiwara, M. and Kawai, T.: On holonomic systems of micro-differential equations III (to appear).

[Sa] Saito, M.: Gauss-Manin system and Mixed Hodge structure (to appear).

[Sch] Schmid, W.: Variation of Hodge structure. Inv. Math. 22.

[SS] Scherk, J. and Steenbrink, J.: On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fiber (preprint).

[St] Steenbrink, J.: Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology. Proc. Nordic Summer School, Oslo (1976).

[Va] Varchenko, A.: Asymptotics of holomorphic forms define mixed Hodge structure. Dokl. Akad. Nark. SSSR 255-5.

[Zu] Zucker, S.: Hodge theory with degenerating coefficients. Ann. Math. 109.