数理解析研究所講究録
第 450 巻 1982 年 177-187

複素解析的葉層構造の特異点

北大 理(教養)　諏訪 立雄

ここでは余次元 1 の局所葉層構造に限って，その解析理論についてのべる．詳細および一般の場合については[10]－[14]を参照されたい．

1. 局所葉層構造．

以後複素アファイン空間 $\mathbb{C}^n=\{(z_1,\cdots,z_n)\}$ の原点 0 の近傍で考えることとし，${}_n\mathcal{O}$ (又は単に $\mathcal{O}$) で変数 $z_1,\cdots,z_n$ の収束巾級数環を，${}_n\Omega^p$ (又は単に Ω^p) で正則 p 形式の 0 における芽のなす $\mathcal{O}$-加群を表わす．Ω^1 は単に Ω とかく．

定義．($\mathbb{C}^n$ の 0 での) 余次元 1 の局所 (複素解析的) 葉層構造とは Ω の階数 1 の部分 $\mathcal{O}$-加群 $\mathcal{F}$ で積分可能なもの，つまり ω を $\mathcal{F}$ の生成元とすると $d\omega\wedge\omega=0$ が成り立つものをいう．

$\mathcal{F}=(\omega)$ が葉層構造のとき，集合 $\{z \mid \omega(z)=0\}$ (の 0 での芽) を $S(\mathcal{F})$ とかき $\mathcal{F}$ の特異点集合という．$S(\mathcal{F})$ の余次元が 1 のときは $\omega = f\omega'$, $f(0)=0$ とかけるので，以後 $\mathrm{codim}\, S(\mathcal{F}) \geq 2$ と仮定する (このとき $\mathcal{F}$ は reduced であるという)．

定義．$\mathcal{F}$ が Haefliger 葉層構造であるとは，$\mathcal{F}$ が完全1形式 df で生成されること．

以下で分るように，$\mathcal{F}=(df)$ の開折理論は 関数芽 f の right-morphisms に関する開折理論と本質的に同値である．

2．葉層構造の開折．

定義．$\mathcal{F}=(\omega)$ の開折 (unfolding) とは，$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m = \{(z,t)\}$ の原点 0 での余次元 1 の局所葉層構造 $\mathfrak{F}=(\tilde{\omega})$ で，$\tilde{\omega}|_{t=0} = \omega$ となるものをいう．$\mathbb{C}^m$ を $\mathfrak{F}$ の parameter 空間という．

$\mathfrak{F}=(\tilde{\omega})$ および $\mathfrak{F}'$ をそれぞれ $\mathbb{C}^m=\{t\}$ および $\mathbb{C}^\ell = \{s\}$ を parameter 空間とする $\mathcal{F}=(\omega)$ の開折とするとき，$\mathfrak{F}'$

が $\mathcal{F}$ からのひきもどしであるとは，次の条件をみたす写像芽
$\Phi:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^\ell,0)\to(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m,0)$ および $\varphi:(\mathbb{C}^\ell,0)\to(\mathbb{C}^m,0)$
が存在すること：

(1) 図式

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^\ell,0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m,0)\\ \downarrow & & \downarrow\\ (\mathbb{C}^\ell,0) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{C}^m,0)\end{array}$$

は可換，ただしたての写像は射影である．

(2) $\Phi|_{s=0}=id.$

(3) $\mathcal{F}'$ は $\Phi^*\tilde{\omega}$ で生成される．

F の開折 $\mathcal{F}$ が versal であるとは，F の任意の開折が $\mathcal{F}$ からのひきもどしであることと定義する．

$F=(\omega)$ を $\mathbb{C}^n$ の 0 での局所葉層構造とし，$\Omega_F=\Omega/F$ とおく．F の開折理論では群 $Ext^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F,\mathcal{O})$ が重要な役割をはたす．我々の場合，$\omega=\sum_{i=1}^n f_i dz_i$，$f_i\in\mathcal{O}$ と表わしておくと
$$Ext^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F,\mathcal{O})=\mathcal{O}/(f_1,\cdots,f_n)$$
と書ける．ここで $(f_1,\cdots,f_n)$ は $f_1,\cdots,f_n$ で生成された ideal である．$\mathcal{O}$ の元 h に対する $\mathcal{O}/(f_1,\cdots,f_n)$ の元を $[h]$ で表わしておく．$Ext^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F,\mathcal{O})$ が複素ベクトル空間とし

て有限次元であるためには $S(F)=\{0\}$ であることが必要十分である．$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F, \mathcal{O})$ と Bott residue([1])の関係については[13]を参照されたい．

さて，F の開折 $\mathcal{F}=(\tilde{\omega})$ に対し，無限小開折写像

$$\rho : T_{\mathbb{C}^m,0} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F, \mathcal{O})$$

が定義される．ここで $T_{\mathbb{C}^m,0}$ は $\mathcal{F}$ の parameter 空間 $\mathbb{C}^m$ の 0 における正則接空間である．ρ は $\mathbb{C}$-線型写像で，接ベクトル $\frac{\partial}{\partial t_k}$ に対し，$h_k=\langle\tilde{\omega}, \frac{\partial}{\partial t_k}\rangle|_{t=0}$ ($\tilde{\omega}$ の dt_k の係数) の $\mathcal{O}/(f_1,\cdots,f_n)$ での類 $[h_k]$ を対応させるものである．ここで次のような問題が考えられる．

(1) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F, \mathcal{O})$ のどの元が F の開折からくるか？

(2) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F, \mathcal{O})$ のどの元が F の一次開折からくるか？

一般に(1)は容易でない．次節で(2)を考える。

3. 一次(無限小)開折.

${}_{n+1}\Omega$ を $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}=\{(z,t)\}$ 上の正則1形式の原点での芽のなす ${}_{n+1}\mathcal{O}$-加群とする．

定義 葉層構造 $F=(\omega)$ の一次(無限小)開折とは ${}_{n+1}\Omega$ の階数1の部分 ${}_{n+1}\mathcal{O}$-加群 $\mathcal{F}^{(1)}=(\tilde{\omega})$ で次をみたすものをいう：

(1) $\tilde{\omega}|_{t=0}=\omega$,

(2) $d\tilde{\omega}\wedge\tilde{\omega}\equiv 0 \mod. t^2, tdt.$

ただし，$\tilde{\omega}$ は $\mathcal{F}^{(1)}$ の生成元である。

$\mathcal{F}$ の2つの一次開折の間の同値関係は自然に定義される。$\mathcal{U}(\mathcal{F})$ で $\mathcal{F}$ の一次開折の同値類全体の集合を表わすことにする。$\mathcal{F}^{(1)}=(\tilde{\omega})$ が $\mathcal{F}=(\omega)$ の一次開折のとき，

$$\tilde{\omega}\equiv\omega+\omega^{(1)}t+h\,dt \qquad \mod. t^2, tdt$$

$\omega^{(1)}\in{}_n\Omega$, $h\in{}_n\mathcal{O}$ と書け，$\mathcal{F}^{(1)}$ に $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathcal{F}},\mathcal{O})$ の元 $[h]$ を対応させることができる。さらに $\mathcal{F}^{(1)}$ と $\mathcal{F}^{(1)\prime}$ を $\mathcal{F}$ の2つの一次開折とするとき，$\mathcal{F}^{(1)}$ と $\mathcal{F}^{(1)\prime}$ が同値であるためには，対応する $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathcal{F}},\mathcal{O})$ の元が一致することが必要十分であることが容易に確かめられる。従って $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ は $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathcal{F}},\mathcal{O})$ の部分集合と考えることができる。

<u>命題.</u> $\mathcal{U}(\mathcal{F})=\{[h]\in\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathcal{F}},\mathcal{O})\mid h\,d\omega=\eta\wedge\omega,\ \eta\in\Omega\}.$

上の命題は又次のように表わすこともできる。

$Z^2=\{\tau\in\Omega^2\mid\tau\wedge\omega=0\}$, $B^2=\{\tau\in\Omega^2\mid\tau=\eta\wedge\omega\}$,

$H^2=Z^2/B^2$ とおき，Z^2 の元 τ に対応する H^2 の元を $[\tau]$ と書くと

$$\mathcal{U}(\mathcal{F})=\{[h]\in\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathcal{F}},\mathcal{O})\mid [h\,d\omega]=0 \text{ in } H^2\}.$$

4. Malgrange の定理.

まず特に $\mathcal{F}$ が Haefliger の場合を考えてみる. このときは $\mathcal{F}$ の生成元として完全形式 df がとれるので,

$$\mathcal{U}(\mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}) = \mathcal{O}/(\partial f)$$

となる. ただし (∂f) は $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial z_n}$ で生成された ideal である. さらに $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ の任意の元 $[h]$ には対応する $\mathcal{F}$ の開折が存在する. つまり $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\omega})$, $\tilde{\omega} = d(f + ht) = df + dh \cdot t + h\,dt$ を考えればよい.

次に $H^2 = 0$ の場合にも $\mathcal{U}(\mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O})$ となるが, この条件は例えば $\mathrm{codim}\, S(\mathcal{F}) \geq 3$ ならみたされている ([9]). 実際, 次の定理が成り立つ.

<u>定理 (Malgrange [4]).</u> $\mathrm{codim}\, S(\mathcal{F}) \geq 3$ なら $\mathcal{F}$ は Haefliger 葉層構造.

証明には, $\mathcal{F} = (\omega)$ の開折 $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\omega})$ で

$$\tilde{\omega} = \sum_{p \geq 0} \omega^{(p)} t^p + dt, \quad \omega^{(0)} = \omega$$

の形のものを構成する. $H^2 = 0$ から, $d\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0$ を形式的にみたす $\omega^{(p)}$, $p \geq 1$, の存在が分る. この級数の収束性には Malgrange の privileged neighborhood の定理 ([4]) が用いられる. このようにしてできた $\tilde{\omega}$ は特異点を持たないので Frobenius の定理により正則な積分因子で原点で 0 にならない

ものを持つが，これを $t=0$ に制限すれば ω の積分因子が出来るわけである．

5. 普遍性定理.

$\mathcal{F}=(\omega)$ を局所葉層構造とする．

<u>定義.</u> $\mathcal{F}$ の開折 $\tilde{\mathcal{F}}$ が infinitesimally versal であるとは，$\tilde{\mathcal{F}}$ の無限小開折写像の像が $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ と一致すること．

<u>定理（普遍性定理）.</u> $\mathcal{F}$ を余次元1の（reduced な）局所葉層構造とし，$\tilde{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ の開折とする．このとき，$\tilde{\mathcal{F}}$ が infinitesimally versal なら versal である．

証明は，(I) $\mathcal{F}$ の任意の開折を $\tilde{\mathcal{F}}$ からひきもどす写像の形式的巾級数としての構成，および (II) (I) の級数の収束性の証明，から成る．(I) は複雑で，積分可能条件をうまく使う必要がある．(II) には，Kodaira-Spencer [3] の方法と Malgrange [4] の方法を用いる．

以下，この定理の直接的結果をいくつか記すが，まずいくつか定義をのべる．

<u>定義.</u> $\mathcal{F}=(\omega)$ の開折 $\tilde{\mathcal{F}}$ が自明であるとは，submersion の

芽 $\Phi:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m,0)\to(\mathbb{C}^n,0)$ が存在し，$\mathcal{F}$ は $\Phi^*\omega$ で生成されること。ただし $\mathbb{C}^m$ は $\mathcal{F}$ の parameter 空間である。

<u>定義.</u> F の開折 $\mathcal{F}$ が universal であるとは versal かつ無限小開折写像が1対1であること．

<u>命題.</u> $\mathcal{F}$ が F の universal な開折ならば，$\mathcal{F}$ の任意の開折は自明.

<u>普遍性定理の系.</u>

I. $\mho(F)=0$ なら F は自分自身の universal な開折. 従って F の任意の開折は自明.

II (Cerveau-Neto [2]). $\omega=z_1\cdots z_n\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{dz_i}{z_i}$ ，$a_i\neq a_j\neq 0$ ，とすると $F=(\omega)$ の任意の開折は自明（実際 $\mho(F)=0$).

III (Mattei-Moussu [7]). F が Haefliger なら F の任意の開折も Haefliger.

IV (Mather [6]). $\tilde{f}$ が関数芽 f の infinitesimally right-versal な開折なら $\tilde{f}$ は right-morphism に関し versal な f の開折（[15] も参照).

例. $\mathbb{C}^2=\{(x,y)\}$ 上の1形式

$$\omega=(2xy+y^2)dx-(x^2+2xy)dy$$

を考え $F=(\omega)$ とする。このとき, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F,\mathcal{O})=\mathbb{C}^4$ で, $[1],[x],[y]$ および $[xy]$ を基底にとれる. さらに $U(F)=\mathbb{C}^2$ で $[x-y]$ と $[xy]$ を基底にとれることは容易に分る. $\mathcal{F}=(\tilde{\omega})$,

$$\tilde{\omega}=(2xy+y^2-yt-3s)dx-(x^2+2xy+xt-3s)dy$$
$$+3(xy-s)dt+(x-y+t)ds$$

とおくと これは $F=(\omega)$ の infinitesimally versal な開折である. 従って普遍性定理により F の universal な開折であることが分る. $\mathbb{C}^4=\{(x,y,t,s)\}$ の座標を次のように変換する:

$$x'=x,\quad y'=y,\quad t'=t+x-y,\quad s'=s-xy.$$

とすると $\tilde{\omega}=t'ds'-3s'dt'$ となる. これから $\mathcal{F}$ の leaves (積分多様体) は $(x-y+t)^3=C(xy-s)$ で与えられることが分る.

例. $\mathbb{C}^2=\{(x,y)\}$ 上の1形式

$$\omega=ydx+(x+x^2y)dy$$

を考え $F=(\omega)$ とする. このとき $U(F)=\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F,\mathcal{O})=\mathbb{C}$ で, $[1]$ が基底になるが ω は正則な積分因子をもたない ([8] p61, 問3) ので $[1]$ に対応する開折は存在しない.

References

[1] P. Baum and R. Bott, Singularities of holomorphic foliations, J. Differential Geometry 7 (1972) 279-342.

[2] D. Cerveau et A.L. Neto, Formes intégrables tangentes à des actions commutatives, Université de Dijon, 1979.

[3] K. Kodaira and D.C. Spencer, A theorem of completeness for complex analytic fibre spaces, Acta Math. 100 (1958) 281-294.

[4] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 1. Codimension un, Publ. Math. I.H.E.S. 46 (1976) 163-173.

[5] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 2. Le cas général, Invent. Math. 39 (1977) 67-89.

[6] J. Mather, unpublished notes on right equivalence.

[7] J.F. Mattei et R. Moussu, Holonomie et intégrales premières, Université de Dijon, 1979.

[8] 大島利雄, 小松彦三郎, 1階偏微分方程式, 岩波講座 基礎数学 岩波書店, 1977.

[9] K. Saito, On a generalization of de Rham lemma, Ann. Inst. Fourier 26 (1976) 165-170.

[10] T. Suwa, Unfoldings of complex analytic foliations with singularities, preprint.

[11] T. Suwa, A theorem of versality for unfoldings of complex analytic foliation singularities, Invent. Math. 65 (1981) 29-48.

[12] T. Suwa, Kupka-Reeb phenomena and universal unfoldings of certain foliation singularities, preprint.

[13] T. Suwa, Residues of complex analytic foliation singularities and the Riemann-Roch theorem for embeddings, preprint.

[14] T. Suwa, Singularities of complex analytic foliations, preprint.

[15] G. Wasserman, Stability of Unfoldings, Lecture Notes in Mathematics 393, Springer-Verlag, Berlin, 1974.