数理解析研究所講究録
第 450 巻 1982 年 188-212

3重点をもつ4次曲面の分類について

筑波大　数学大学院　　高橋　正

3重点をもつ4次曲面を、その曲面上に現われる特異点によって分類を行う。

1．分類の方法

分類の方法として Arnold の結果を使う。特に擬斉次多項式に対する認識原理（recognition principle）を、しばしば用いる。

いまPを4次曲面V上の特異点とすると、我々は線型変換により、Pを$\mathbb{P}^3$における点［0, 0, 0, 1］に移すことができる。その時、この4次曲面を表わす式は、

$$F = f_2(X,Y,Z)W^2 + f_3(X,Y,Z)W + f_4(X,Y,Z)$$

となる。

ただし、$f_i(X,Y,Z)$ は次数 i の同次式を表わす。

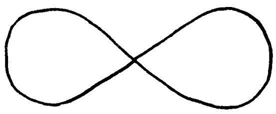
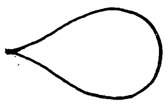
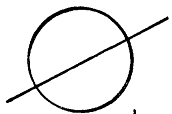
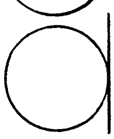
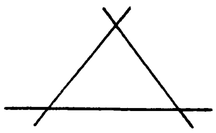
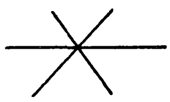
そして3重点をもつという条件により $f_3(X,Y,Z) = 0$ となり、$F=0$ は

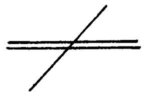
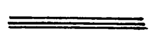
$$F = f_3(X,Y,Z)W + f_4(X,Y,Z)$$

となる。

その時 $f_3(X,Y,Z)$ が線型変換によって移り得なければ $F=0$ の P における特異点が異なることにより、$f_3(X,Y,Z) = 0$ の分類によって $F=0$ の分類を行うことができる。

$f_3(X,Y,Z)$ は、線型変換により、下記のように分類され、それぞれの標準型は以下のようになる。

		f_3 の標準型
Nodal curve		$XYZ + Y^3 + Z^3 = 0$
Cuspidal curve		$X^3 - Y^2Z = 0$
Conic and chord		$Z(XY + Z^2) = 0$
Conic and tangent		$Z(XZ + Y^2) = 0$
Three general line		$XYZ = 0$
Three concurrent line		$Y^3 + Z^3 = 0$

Multiple and single line		$YZ^2 = 0$
Triple line		$Z^3 = 0$
Non-singular elliptic curve		$X^3 + Y^3 + Z^3 + 3\lambda XYZ = 0$ ($\lambda^3 \neq -1$)

上記のような各々の場合を、それぞれ NC, CC, QP, QT, TG, TC, MS, TP, NS として各々の場合について順に示してゆく。

以下において我々は、3重点をもつ4次曲面は孤立特異点のみを持ち、既約であると仮定する。

また、特異点の記号については、最後に記号と式の表を付け加える。

2. 分類

Case NC

Lemma 1.

$$F = (XYZ + Y^3 + Z^3)W + f_4(X,Y,Z),$$
$$G = (XYZ + Y^3 + Z^3)W + g_4(X,Y,Z),$$

とする。

ただし、$f_4(X,Y,Z)$, $g_4(X,Y,Z)$ を4次の X, Y, Z の同次式とし、

$$f_4(X,Y,Z) = c_0X^4 + c_1X^3Y + c_2X^3Z + c_3X^2Y^2 + c_4X^2YZ + c_5X^2Z^2 + c_6XY^3 + c_7XY^2Z + c_8XYZ^2 + c_9XZ^3 + c_{10}Y^4 + c_{11}Y^3Z + c_{12}Y^2Z^2 + c_{13}YZ^3 + c_{14}Z^4$$

とする。

(a) $F=0$ と $G=0$ が線型同値ならば、かつそのときに限り、$f_4(-\theta^3-\phi^3, \theta^2\phi, \theta\phi^2)$ と $g_4(-\theta^3-\phi^3, \theta^2\phi, \theta\phi^2)$ は 12 次の多項式として P を固定して線型同値である。

(b) $F=0$ の P 以外の特異点は、$f_3 = XYZ + Y^3 + Z^3 = 0$ と $f_4(X, Y, Z) = 0$ との $\mathbb{P}^2$ における $[1, 0, 0]$ 以外の重複点に対応する。

(c) $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ の $\mathbb{P}^2$ における $[1, 0, 0]$ 以外の k-重点は、$\mathbb{P}^3$ における $F=0$ の A_{k-1} 特異点に対応する。

(d) もし、$f_4(1, 0, 0) \neq 0$ ならば P は $T_{3,3,4}$ 特異点であり、k を Nodal curve の $[1, 0, 0]$ における 2 つの分岐のうちの一方に対する接触位数とするとき、もう一方の分岐への接触位数が 1 ならば、P は $T_{3,3,4+k}$ 特異点となる。

また、2 つの分岐に対して $f_4(X, Y, Z)$ が、両方とも 2 以上の接触をすれば、P は孤立特異点ではなくなる。

(e) $\mathbb{P}^3$における点 [1, 0, 0, 0] は、特異点ではない。

証明（以後の *Lemma* についても）略。

例. 次の式は、P において各々下記の特異点を持つ。

例1. $T_{3,3,11}$

$$F = X^3Y - X^2Z^2 - XY^2Z + Y^3Z + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例2. $T_{3,3,12}$

$$F = X^3Y + X^2Z^2 + Y^4 + YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例3. $T_{3,3,13}$

$$F = X^3Y + X^2Y^2 + X^2Z^2 + XYZ^2 + 2Y^4 - Y^3Z + YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例4. $T_{3,3,14}$

$$F = X^3Y + X^2Y^2 + X^2Z^2 + XYZ^2 + 2Y^4 - Y^3Z + YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例5. $T_{3,3,15}$

$$F = X^3Y + X^2Z^2 + 2Y^4 + YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例6. $T_{3,3,11}$

$$F = X^3Y - 4X^2Y^2 + X^2Z^2 + 6XY^3 + 2XY^2Z - 4XYZ^2 + 5Y^3Z + 6Y^2Z^2 + 3YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例7. $T_{3,3,11}$

$$F = X^3Y - 2X^2Y^2 + X^2Z^2 -2XY^2Z - 2XYZ^2 + 2Y^4 + 3Y^3Z - YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例8. $T_{3,3,11}$

$$F = X^3Y + X^2Z^2 - 2XY^3 + 2Y^4 - Y^3Z - 2Y^2Z^2 + YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例9. $T_{3,3,11}$

$$F = X^3Y - 2X^2Y^2 + X^2Z^2 + XY^3 - 2XYZ^2 + Y^3Z + Y^2Z^2 + YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例10. $T_{3,3,11}$

$$F = X^3Y - 3X^2Y^2 + X^2Z^2 + 3XY^3 - 3XYZ^2 + Y^4 + 3Y^3Z + 3Y^2Z^2 + YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

例11. $T_{3,3,12}$

$$F = X^3Y + X^2Y^2 + X^2Z^2 - XY^3 + XYZ^2 + Y^4 - Y^3Z - Y^2Z^2 + YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

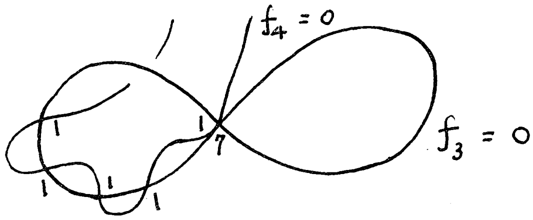
例12. $T_{3,3,13}$

$$F = X^3Y + X^2Y^2 + X^2Z^2 - XY^3 + XYZ^2 + Y^4 - Y^3Z - Y^2Z^2 + YZ^3 + (XYZ + Y^3 + Z^3)W.$$

以上の12個の例は、下記のような性質をもつ。

例番号	[1, 0, 0] 以外での $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ の接触の状態
例 1.	1^4
例 2.	1^3
例 3.	1^2
例 4.	1
例 5.	0
例 6.	4
例 7.	1. 3
例 8.	2. 2
例 9.	1^2. 2
例10.	3
例11.	1. 2
例12.	2

分割の記号は、たとえば 1^4 のときは [1,0,0] において $f_3=0$ と $f_4=0$ が一つの分岐に対して1位に接触し、もう一つの分岐に対して7位の接触をし、[1,0,0] 以外に異なった4点においてそれぞれ1位に接触していることを示す。



Case CC

Lemma 2.
$$F = (X^3 - Y^2Z)W + f_4(X,Y,Z),$$
$$G = (X^3 - Y^2Z)W + g_4(X,Y,Z),$$
とする。

(a) $F=0$ と $G=0$ が線型同値ならばそのときに限り $f_4(\theta^2\phi, \theta^3, \phi^3)$ と $g_4(\theta^2\phi, \theta^3, \phi^3)$ は 12 次の多項式として線型同値である。

(b) $F=0$ の P 以外の特異点は、$f_3=0$ と $f_4=0$ の [0,0,1] 以外の重複点と対応する。

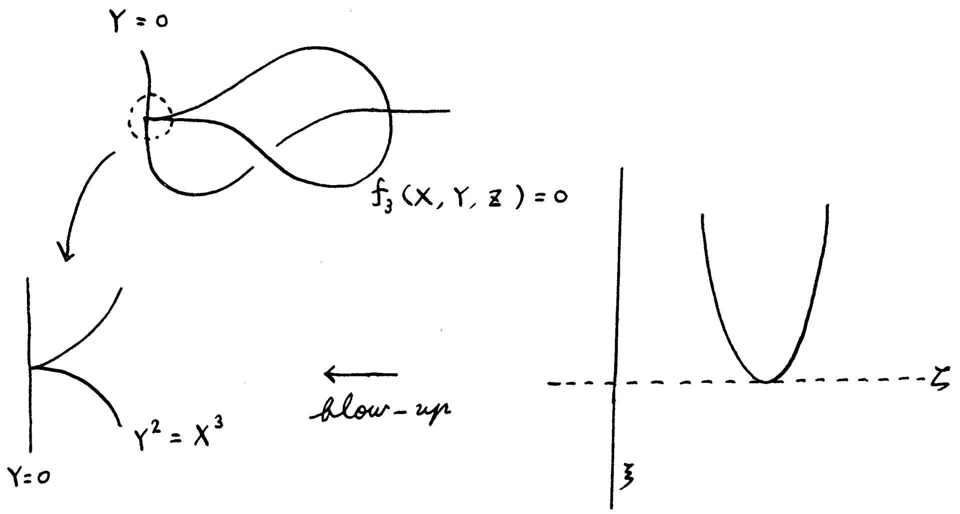
(c) $f_3=0$ と $f_4=0$ の $[0,0,1]$ 以外の k-重点は、$\mathbb{P}^3$ における $F=0$ の A_{k-1} 特異点に対応する。

(d) もし、$f_4(0,0,1)\neq 0$，すなわち $C_{14}=0$ ならば P は Q_{10} 特異点であり、$C_{14}=0$，$C_9\neq 0$ すなわち $[0,0,1]$ において $f_3=0$ と $f_4=0$ が 2 位の接触をするならば、P は Q_{11} 特異点であり、$C_{14}=C_9=0$，$C_{13}\neq 0$ すなわち $[0,0,1]$ において $f_3=0$ と $f_4=0$ が 3 位の接触をするならば、P は Q_{12} 特異点である。

(e) $\mathbb{P}^3$ における点 $[0,0,1,0]$ は、特異点ではない。

証明略

$F=0$ の点 $[0,0,1,0]$ は特異点ではない。なぜなら $f_4=0$ が $[0,0,1]$ において、$f_3=0$ に多重の接触をしても、1 回の *blow-up* で $f_3=0$ と $f_4=0$ は離れてしまうからである。



この結果は、上の *Lemma* 2. に対応している。

Case QP

Lemma 3. $F = Z(XY+Z^2)W + f_4(X, Y, Z)$ とする。

(a) $F=0$ の P 以外の特異点は、$[1, 0, 0]$ と $[0, 1, 0]$ 以外の $f_3=0$ と $f_4=0$ の重複点に対応する。

(b) $f_3=0$ と $f_4=0$ の $[1, 0, 0]$ と $[0, 1, 0]$ 以外の k-重点は、$F=0$ の A_{k-1} 特異点に対応する

(c) $f_4(1, 0, 0) \neq 0$ かつ $f_4(0, 1, 0) \neq 0$ ならば、P は $T_{3,4,4}$ 特異点である。

そして、[1, 0, 0]における $Z=0$ と $f_4=0$ の接触位数を k_0、$XY+Z^2=0$ と $f_4=0$ の接触位数を J_0 とし、[0, 1, 0]における $Z=0$ と $f_4=0$ の接触位数を K_1, $XY+Z^2=0$ と $f_4=0$ の接触位数を J_1 とすると、P は $T_{3,4+\delta,4+\gamma}$ 特異点である。ただし、$\delta = Max.(K_0, J_0)$, $\gamma = Max.(K_1, J_1)$ であり、K_0 と J_0 のどちらか一方は 1 であり、両方が 0 であることはなく、K_1 と J_1 のどちらか一方は 1 であり、両方が 0 ではない。

もし、K_0 と J_0 の両方が 2 以上または K_1 と J_1 の両方が 2 以上ならば、P は孤立特異点ではない。

Case QT

Lemma 4. $F = Z(XZ+Y^2)W + f_4(X, Y, Z)$ とする。

(a) $F=0$ の P 以外の特異点は $f_3=0$ と $f_4=0$ の [1, 0, 0] 以外の重複点に対応する。

(b) $f_3=0$ と $f_4=0$ の [1, 0, 0] 以外の k-重点は、$F=0$ の A_{k-1} 特異点に対応する。

(c) $f_4=0$ と $Z=0$ の $[1,0,0]$ での接触位数を J,

$f_4=0$ と $XZ+Y^2=0$ の $[1,0,0]$ での接触位数を L,

とするとき.

P は次の条件によって決まる。

J	L	P の type
0	0	S_{11}
1	1	S_{12}
2	2	S_{14}
3	2	S'_{13+2}
4	2	S'_{13+3}
2	3	S_{13+2}
2	4	S_{13+3}
2	5	S_{13+4}
2	6	S_{13+5}

2	7	S_{13+6}
2	8	S_{13+7}

もし、JとLがともに3以上ならば、Pは孤立特異点ではない。

Case TG

Lemma 5. $F = XYZW + f_4(X, Y, Z)$ とする。

(a) $F=0$ のP以外の特異点は $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ の $[1,0,0]$ と $[0,1,0]$ と $[0,0,1]$ 以外の重複点に対応する。

(b) $f_3 = 0$ と $f_4 = 0$ の $[1,0,0]$ と $[0,1,0]$ と $[0,0,1]$ 以外の k-重点は $F=0$ の A_{k-1} 特異点に対応する。

(c) $f_4 = 0$ と $Y=0$ の $[1,0,0]$ での接触位数を $K(Y)$,
$f_4 = 0$ と $Z=0$ の $[1,0,0]$ での接触位数を $K(Z)$,
$f_4 = 0$ と $X=0$ の $[0,1,0]$ での接触位数を $L(X)$,

$f_4=0$ と $Z=0$ の $[0,1,0]$ での接触位数を $L(Z)$,

$f_4=0$ と $X=0$ の $[0,0,1]$ での接触位数を $M(X)$,

$f_4=0$ と $Y=0$ の $[0,0,1]$ での接触位数を $M(Y)$

とすると、

P は $T_{4+K,\,4+L,\,4+M}$ 特異点である。

ただし、$K = \mathit{Max.}(K(Y), K(Z))$, $L = \mathit{Max.}(L(X), L(Z))$,

$M = \mathit{Max.}(M(X), M(Y))$ であり、

かつ、$\mathit{Min.}(K(Y), K(Z)) = 0$ または 1, $\mathit{Min.}(L(X), L(Z))$

$= 0$ または 1, $\mathit{Min.}(M(X), M(Y)) = 0$ または 1, である。

もし、$K(Y)$ と $K(Z)$ の両方が 2 以上であるかまたは、

$L(X)$ と $L(Z)$ の両方が 2 以上であるかまたは、

$M(X)$ と $M(Y)$ の両方が 2 以上であるならば、

P は孤立特異点ではない。

例、次の式は P において $T_{7,7,7}$ 特異点をもつ。

$$F = X^3Y + Y^3Z + XZ^3 + XYZW.$$

Case TC

Lemma 6.

(a) $F=0$ の P 以外の特異点は $f_3=0$ と $f_4=0$ の $[1,0,0]$ 以外の重複点に対応する。

(b) $f_3=0$ と $f_4=0$ の $[1,0,0]$ 以外での k-重点は $F=0$ の A_{k-1} 特異点に対応する。

(c) $\omega^3=-1$ とし、

$f_4=0$ と $Y+Z=0$ の $[1,0,0]$ での接触位数を K,

$f_4=0$ と $Y+\omega Z=0$ の $[1,0,0]$ での接触位数を L,

$f_4=0$ と $Y+\omega^2 Z=0$ の $[1,0,0]$ での接触位数を M,

とするとき、

P は次のような条件によって決まる。

K	L	M	P の type
0	0	0	U_{12}
1	1	1	U_{14}
2	1	1	U_{13+2}

1	1	2	U_{13+2}
1	2	1	U_{13+2}
3	1	1	U_{13+3}
1	1	3	U_{13+3}
1	3	1	U_{13+3}
4	1	1	U_{13+4}
1	1	4	U_{13+4}
1	4	1	U_{13+4}

もし、K, L, M のいずれか二つが 2 以上ならば、P は孤立特異点ではない。

Case MS

Lemma 7. $F = YZ^2W + f_4(X, Y, Z)$ とする。

(a) $F=0$ の P 以外の特異点は、$f_3=0$ と $f_4=0$ の $[1,0,0]$ 以外の重複点に対応する。

(b) $f_3=0$ と $f_4=0$ の $[1,0,0]$ 以外の k-重点は、$F=0$ の A_{k-1} 特異点に対応する。

(c) $f_4=0$ と $Z=0$ の $[1,0,0]$ での接触位数を K,
$f_4=0$ と $Y=0$ の $[1,0,0]$ での接触位数を J,
$f_4=0$ と $Z=0$ の $[1,0,0]$ 以外での接触の分割を Par.
とするとき、
P は次の条件によって決まる。

K	J	Par.	P の type
0	0	4	$_1V^*_{18}$
0	0	1.3	$_1V_{17}$
0	0	2.2	$_1V_{15+1+1}$
0	0	$1^2.2$	$_1V_{15+1}$
0	0	1^4	V_{15}

1	1	3	$1^{V}17+1$
1	1	1.2	$2^{V}15+1+1$
1	1	1^{3}	$2^{V}15+1$
1	2	3	$1^{V}17+2$
1	3	3	$1^{V}17+3$
1	4	3	$1^{V}17+4$
1	2	1.2	$2^{V}15+2+1$
1	3	1.2	$2^{V}15+3+1$
1	4	1.2	$2^{V}15+4+1$
1	2	1^{3}	$2^{V}15+2$
1	3	1^{3}	$2^{V}15+3$
1	4	1^{3}	$2^{V}15+4$
2	1	1^{2}	$2^{V}17$

2	1	2	${}_2V_{17+1}$
3	1	1	${}_2V^*_{18}$
4	1	0	${}_3V^*_{19}$

もし、K, J が両方とも 2 以上ならば、P は孤立特異点ではない。

Case TP

Lemma 8. $F = Z^3W + f_4(X, Y, Z)$ とする。

(a) $F = 0$ は P 以外に特異点をもたない。

(b) $f_4(X, Y, Z) = 0$ と $Z = 0$ の接触の分割を Par. とすると、P は、次の条件によって決まる。

Par.	P の type
4	V'_{21}

2.2	$_2V''_{20}$
1.3	V'_{20}
$1^2.2$	V''_{19}
1^4	V'_{18}

Case NS

Lemma 9. $F = (X^3 + Y^3 + Z^3 + 3\lambda XYZ)W + f_4(X, Y, Z)$

$(\lambda^3 \neq -1)$ とする。

そのとき、P以外の点 Q において、$F=0$ は非特異であるかまたは A_k 特異点を持つ。

ただし、$F=0$ は Q を通り、$1 \leqq k \leqq 11$

このとき、P は $f_4(X, Y, Z)=0$ の状態によらず、$\tilde{E}_6$ 特異点である。

208

例. 次の式は [0,0,0,1] において $\widetilde{E_6}$ 特異点を持ち、[1,-1,0,0] において A_{11} 特異点を持つ。

$$F = (6X^3 + 6Y^3 + 6Z^3 + 18XYZ)W - 3X^4 - 5X^3Z + 6X^2Y^2 - 24X^2YZ + 6X^2Z^2 - 24XY^2Z + 9XYZ^2 - 8XZ^3 - 3Y^4 - 5Y^3Z + 6Y^2Z^2 - 8YZ^3.$$

特異点記号と式の表	
$T_{p,q,r}$	$X^p + Y^q + Z^r + aXYZ = 0$ (a: const.)
Q_{10}	$XZ^2 + Y^3 = X^4$
Q_{11}	$XZ^2 + Y^3 = X^3Y$
Q_{12}	$XZ^2 + Y^3 = X^5$
S_{11}	$Z(XZ + Y^2) = X^4$

S_{12}	$Z(XZ + Y^2) = X^3Y$
S_{14}	$Z(XZ + Y^2) = X^5$
S_{13+n} $(n \geqq 2)$	$Z(XZ - 2Y^2) = X^2Y^2 + (Y^2 + X^3)X^{n+1}$
S'_{13+n} $(n \geqq 2)$	$Z(XZ - 2Y^2) = 2X^2Y^2 + X^5 + X^aY^b$ $(2a + 3b = n + 9)$
U_{12}	$Y^3 + Z^3 = X^4$
U_{14}	$Y^3 + Z^3 = X^3Y$
U_{13+n} $(n \geqq 2)$	$Y^3 + Z^3 = X^3(Y + Z) + X^aY^b$ $(2a + 3b = n + 8)$
V_{15}	$YZ^2 = X^4 + Y^4$
${}_1V_{15+n}$ $(n \geqq 1)$	$YZ^2 = X^4 + X^2Y^2 + Y^{n+4}$
${}_2V_{15+n}$ $(n \geqq 1)$	$YZ^2 = Y^4 + X^3Y + X^aZ^b$ $(2a + 3b = n + 8)$
${}_1V_{17}$	$YZ^2 = X^4 + X^3Y + Y^5$
${}_2V_{17}$	$YZ^2 = Y^4 + X^2Y^2 + X^3Z$

${}_1V_{15+m+n}$ ($m,n \geq 1$)	$(X + Y)Z^2 = X^2Y^2 + X^{n+4} + Y^{m+4}$
${}_2V_{15+m+n}$ ($m,n \geq 1$)	$YZ^2 = X^3Y + X^2Y^2 + Y^{n+4} + X^aZ^b$ $(2a + 3b = m + 8)$
${}_1V^*_{18}$	$YZ^2 = X^4 + Y^5$
${}_2V^*_{18}$	$YZ^2 = XY^3 + X^3Z$
${}_3V^*_{19}$	$YZ^2 = Y^4 + X^3Z$
${}_1V_{17+n}$	$YZ^2 = X^3Y + X^aZ^b + Y^5$ $(2a + 3b = n + 8)$
${}_2V_{17+n}$	$YZ^2 = X^2Y^2 + Y^{n+4} + X^3Z$
${}_1V_{18+n}$	$YZ^2 = X^3Y + X^aZ^b + XY^4$ $(2a + 3b = n + 8)$
V'_{18}	$Z^3 = Y^4 + X^4$
V''_{19}	$Z^3 = Y^4 + X^2Y^2 + X^3Z$
V'_{20}	$Z^3 = XY^3 + X^3Z$
V'_{21}	$Z^3 = Y^4 + X^3Z$

$_2V''_{20}$	$Z^3 = X^2Y^2 + X^3Z + Y^3Z$
A_n	$X^2 + Y^2 + Z^{n+1} = 0$

以上の内容の詳細については preprint (9) を御参照下さい。

参考文献

(1) C.M. Jessop M.A. " Quartic surface with singular points" Cambridge at the univ. press (1916)

(2) V.I. Arnol'd " Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k and E_k and Lagrangian singularities" Funk. anal. Appl. 6 (1972)

(3) V.I. Arnol'd " Normal forms of functions near degenerate critical points" Russian Math. Surveys 29(2) (1974) 11-49

(4) J.W.Bruce and C.T.C.Wall "On the classification of cubic surfaces " J.London Math. Soc. (2) 19 (1979)245-256

(5) H.B.Laufer "On minimally elliptic singularities" Amer. J.Math. 99 (1977) 1257-1295

(6) Y.Umezu " On Nomal Projective surfaces with $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ " Preprint (1980)

(7) U.Karras " Deformations of cusp singularities"
Proc. symp. In pure Math. A.M.S. 30 (1977) 34-44

(8) 多変数複素解析入門，樋口，吉永，渡辺
森北数学ライブラリー51， 1980 ，森北出版

(9) T.Takahashi " On the classification of the Quartic surfaces with a triple point" Preprint (1982)