数理解析研究所講究録
第 450 巻 1982 年 213-219

多項式写像の位相型について

京大 理　　中居 功

この小論の中で、我々は多項式で定義された写像の位相型とThomのA_f-conditionの関連について考え、また多項式写像の位相型が連続濃度あることを示す。

可微分写像の研究は長い間続けられ、それらは写像のC^∞, 位相的性質を明らかにしてきている。しかし、それらの多くはgenericな写像のみを対象としている。今，次の問題を考えるのは、自然なことだろう。

問題　多項式で定義された写像は、どのような、又どれくらい位相型を持つか。

次数K以下の多項式写像 $f:(\mathbb{K}^n,0)\to(\mathbb{K}^p,0)$ 全体の集合を$P(n,p,k;\mathbb{K})$ で表わす、また それらの $0\in\mathbb{K}^n$ でのgermsの集合を $P_0(n,p,k;\mathbb{K})$ で表わす。$f,g\in P(n,p,k;\mathbb{K})$ が

(resp. $f, g \in P_0(n, p, K; \mathbb{K})$) が C^0-同値（以下、単に同値という）であるとは、位相同型（resp. 位相同型の germs）$\varphi : \mathbb{K}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{K}^n, 0$, $\psi : \mathbb{K}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{K}^p, 0$ が存在し $f \circ \varphi = \psi \circ g$ となることをいう。$P(n, p, K; \mathbb{K})$ の (resp. $P_0(n, p, K; \mathbb{K})$ の) 同値類の集合を $P(n, p, K; \mathbb{K})/top$ ($P_0(n, p, K; \mathbb{K})/top$) で表わす。

ここに、我々の今までに知られている結果を述べよう。

(1) R. Thom はすでに 1962 年に [T1] の中で、次の多項式写像 $f_t : \mathbb{R}^3, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^3, 0$ $t \in \mathbb{R}$, $f_t(x, y, z) =$
$((x(x^2+y^2-a^2) - 2ayz)^2((ty-x)(x^2+y^2-a^2)-2az(y-tx))^2, x^2+y^2-a^2, z)$,
$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ は $t = \pm t'$ のときのみ $f_t, f_{t'}$ が同値になることを示している。このことは $P(n, p, k; \mathbb{R})/top$ は $n, p \geqq 3$, $k \geqq 12$ のとき連続濃度の集合となることを示す。

(2) T. Fukud は 1976 [F1] の中で $P(n, 1, K; \mathbb{K})/top$ $P_0(n, 1, K; \mathbb{K})/top$ がすべての n, K, $\mathbb{K}$ に対して有限集合であることを示した。

(3) K. Aoki は $P_0(2, 2, k; \mathbb{K})/top$ が $K < \infty$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ に対し、有限集合であることを示した [A]，このことは Thom, Fukuda の予想 " $P(n, 2, k; \mathbb{K})/top$, $P_0(n, 2; K; \mathbb{K})/top$ は有限集合 " の肯定的結果である [F]。

この予想に反して、次の結果を得た。

定理A. $P(n.p.k;\mathbb{R})/top$, $P_c(n.p.k;\mathbb{K})/top$ は $n.p.k\geqq 3$, 又は $n\geqq 2$, $p\geqq 2$, $k\geqq 4$ のとき連続濃度を持つ。

定理B. $P(n.p.k;\mathbb{C})/top$, $P_c(n.p.k;\mathbb{C})/top$ は $n.p.k\geqq 3$ のとき連続濃度を持つ。

以下に、定理A, Bの例を示す。

ex. A. $f_e:(\mathbb{R}^{3+r},0)\longrightarrow(\mathbb{R}^{2+s},0)$

$$f_e(x.y.z.w)=((e_1x-y)(e_2x-y)(e_3x-y),\ (e_4x-y)(e_5x-y)(e_6x-y)\,z,\ 0)$$

$(x.y.z)\in\mathbb{R}^3$, $w\in\mathbb{R}^s$, ここで $e=(e_1,\cdots,e_6)\in\mathbb{R}^6$。

ex. B. $g_a:(\mathbb{K}^{3+r},0)\longrightarrow(\mathbb{K}^{3+s},0)$

$$g_a(x,y,z,w)=((a_1x^2+a_2xy+a_3y^2),\ (a_4x^2+a_5xy+a_6y^2)z,\ (a_7x^2+a_8xy+a_9y^2)z,\ 0)$$

$(x.y.z)\in\mathbb{K}^3$, $w\in\mathbb{K}^r$. $\mathbb{K}=\mathbb{R}.\mathbb{C}$, ここで $a=(a_1,\cdots,a_9)\in\mathbb{K}^9$。

f_e はパラメーター空間の中に2次元の位相型の族を、g_a は一次元の族を持つ。これらの事実は、定理A. B. と共に [N1, N2] の中に証明された。以下、これらの証明の概略を述べる。また最近 C.Sabbah により次の定理が証明された。

(定理)　$f_s : X \longrightarrow Y$ を complex analytic map の族とする，ここで $s \in S$，$\dim X = 2$。このとき f_s の位相型は S の中で局所有限。(C. Sabbah)

系。$P(2, n, k; \mathbb{C})/tcp$ は有限集合。

上の定理は，さらに一般的な代数幾何的手法によっている。[S_1, S_2]．

さて，我々の目的は f_e, g_a の位相型を調べることであった。始めに，次のことを注意しておこう。f_e は Thom stratification を持たないが，flat morphism である ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)。また g_a は Thom stratification を持たず，flat でもない。Thom の A_f-condition は可微分写像の位相型を考える上で，重要な役割を果している。([M_1, M_2])。ここで A_f-condition について簡単にふれておく。

可微分写像 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ の stratification とは $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ の stratification の組 (S, S') で，任意の $X \in S$ に対して $Y \in S'$ が存在し $f(X) \subset Y$，$f|X : X \longrightarrow Y$ submertion となるものをいう。(S, S') が Thom's A_f-condition を満たすとは，次のことをいう; $X, Y \in S$，$y_i \in Y$ を sequence とする。もし

(1)　$y_i \longrightarrow x \in X$

(2) $\operatorname{Ker} d(f|Y)(y_i) \longrightarrow T \subset T_x\mathbb{R}^n$,

ならば $T \supset \operatorname{Ker} d(f|X)(x)$.

A_f-condition は，x, y が十分に近ければ $f^{-1}(f(x))$, $f^{-1}(f(y))$ が"平行"であることを意味している。

さて，我々の写像 $f_e : \mathbb{R}^3, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^2, 0$ はいかなる Thom stratification も持たない。逆に，A_{f_e}-condition を精密化して，Z軸の部分集合 $M(f_e)(p)$, $p \in S^1$ を次のように定義する。$M(f_e)(p)$ は次のような点 $z \in Z$ からなる。; sequence $x_i \in \mathbb{R}^3$ が存在して次の条件を満たす，

(1) $x_i \to z$; $f_e(x_i) \notin f_e(\Sigma(f_e))$ で半直線 $\overrightarrow{0 f_e(x_i)}$ は原点を通る半直線 L_p, $p \in S^1$ に収束する，ここで S^1 は $0 \in \mathbb{R}^2$ を中心とする単位円，

(2) $\operatorname{Ker} df_e(x_i) \longrightarrow T \subset T_x\mathbb{R}^3$, $T \supset \ker df_e(x_i)$。

Z^ω を Z の compact subsets 全体の集合とする。$M(f_e)(p)$ は $M(f_e) : S^1 \longrightarrow Z^\omega$ を定めることがわかる。S^1 の $(1,0)$ のまわりの coordinate $\frac{y}{x} = \theta$ で次の型となる，

$$M(f_e)(\theta) = \{ d_1\theta, \cdots, d_i\theta \}, \quad d_1, \cdots, d_i \in \mathbb{R}.$$

命題 1，([N_1, N_2]) Open dense subset $U \subset \mathbb{R}^6$ が存在し，$f_e \overset{top}{\sim} f_{e'}$, $e, e' \in U$ ならば $M(f_e)$, $M(f_{e'})$ は conjugate，つまり homeomorphisms の germs

$\varphi : (S^1, (1,0)) \to (S^1, (1,0))$, $\psi : (Z, 0) \to (Z, 0)$ が存在し、$\psi^\omega \circ M(f_e) = M(f_{e'}) \circ \varphi$ となる，ここで $\psi^\omega : (Z^\omega, \{0\}) \to (Z^\omega, \{0\})$ は $\psi^\omega(A) = \psi(A) \in Z^\omega$, $A \in Z^\omega$ で定義される。

この命題は，$M(f_e)$ が f_e の topological invariant であることを示している。また [N, N_2] によると，$M(f_e)$ の conjugacy class は連続濃度存在することが知られている。従って，定理 A が証明された。同様に，g_a に対しても Topological invariant $M(g_a) : S^2 \to Z^\omega$ を定義し，これにより定理 B も証明される。

References

[A] K. Aoki, On topological types of polynomial map-germs of plane to plane, Memoirs of the school of science & Engineering. No 44 (1980) pp. 133～156.

[F] T. Fukuda, Types topologiques des polynomes, Publ. Math. IHES 46 (1976) 87-106.

[N1] On topological types of polynomial map-germs, preprint.

[N2] Topological classification of polynomial map-germs, to appear in Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol 40.

[T] R. Thom. La stabilité topologique des applications polynomiales. Enseig. Math., 8 (1962) pp 24-33.

[S1] C. Sabbah Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescents, Preprint.

[S2] Le type topologique eclaté d'une application Analytique. Preprint.