数理解析研究所講究録
第451巻 1982年 3-36

フーリエ解析における複素函数論的方法

東北大 理　猪狩 惺

古典フーリエ解析は，自然に単位円盤または半平面上の解析函数の議論に結びつけられ（§1 参照），複素函数論が効果的に用いられる．その一つの理由は，単位円周又は直線上の実変数函数を単位円盤又は半平面の調和函数に延長するとき，調和函数とその共役調和函数の性質のいくつかがお互いに遺伝することにあると考えられる．その典型的な例としては，L^p-評価，函数の連続性，Stolz の路に沿った極限（n.t.l. とかく）の存在性等があげられる．

一方，1940年代以降は，複素函数論的手法を実函数論的手法でおきかえる研究が盛んに行われるようになった．この手法によって適用範囲がより広くなり種々の成果がえられた．

一変数フーリエ級数の複素函数論的手法については Koosis [12], Duren [3], Zygmund [19] に詳しい．また予測理論については Dym-McKean [4] にある．このノート

では解析函数の n.t.l. についての Privalov の定理と Lusin の函数について述べる（§§3－6）．近年これらは，多変数の場合に拡張された．更に Lusin の函数の評価を利用して二変数函数の実函数論的な特徴づけが可能となった．これらを Malliavin, Chang－Fefferman 等に従って解説する．

第一章　序

1. フーリエ解析と解析函数．$\mathbb{T}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の単位円周または区間 $[-\pi, \pi]$ とする．$f \in L^1(\mathbb{T})$ に対してそのフーリエ級数は

$$f \sim \sum \hat{f}_n e^{int}$$

で定義される，ここに

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

である．f の共役函数 $\tilde{f}$ は

$$\tilde{f} \sim \sum -i(\operatorname{sign} n)\hat{f}_n e^{int}$$

によって定義される．

函数 f は次のようにして，単位円盤 $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z|<1\}$ 内の解析函数 $F(z)$ と結びつけられる；以下 f は実数値函数とする．

$$u(z) = \sum \hat{f}_n r^{|n|} e^{int}, \quad z = re^{it} \in D$$

と f の Poisson 積分

$$v(z) = \sum(-i\,\mathrm{sign}\,n)\,\hat{f}_n\, r^{|n|} e^{int}$$

を共役 Poisson 積分とすれば，v は調和函数 u の共役調和函数であって，f は解析函数

$$\begin{aligned} F(z) &= u(z) + i\,v(z) \\ &= \hat{f}_0 + 2\sum_1^\infty \hat{f}_n z^n \end{aligned} \qquad (1)$$

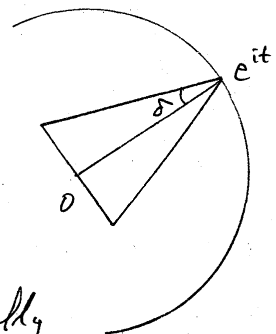
の実部の境界函数と考えることができる．

$f \in L^2(\mathbb{T})$ なら Parseval の等式と，Riesz-Fischer の定理によって $\tilde{f} \in L^2$ である．以下の議論に関連するので，$\tilde{f}$ についてもう少し立ち入って述べておく．

$0 < \delta < \pi/2$，$t \in \mathbb{T} = \partial D$ に対して

$$\Gamma_\delta(t) = \{ z \in D \,;\, z = e^{it}(1-h),\ 0 < \mathrm{Re}\, h < 1,\ |\arg h| < \delta \}$$

とおく．



$f \in L^2(\mathbb{T})$ なら，$0 < \delta < \pi/2$ とするとき

$$\lim_{\Gamma_\delta(t) \ni z \to e^{it}} F(z) = f(t) + i\tilde{f}(t) \quad \text{a.e.}$$

特に，$v(z)$ は a.e. で $\tilde{f}$ に non-tangentially に収束する．$f \in L^1(\mathbb{T})$ の場合も $\tilde{f}$ は v の non-tangential limit (n.t.l. とかく) として定義される．そのためには $f \geq 0$ としてよい．このとき，$e^{-F(z)}$ は D の有界な解析函数であるから，a.e. で n.t.l. をもち，一方 $u(z)$ ももつからである．

以上の事情はフーリエ変換についても同様である．$f \in L^2_{real}(R)$, $R=(-\infty,\infty)$, に対して $\mathbb{C}$ の上半平面 $R^2_+ = \{z = x+iy,\ y>0\}$ に於ける解析函数 F が存在して，その境界値の実，虚部は夫々 f 及び共役函数となる．

2．共役函数への遺伝．f に対して解析函数 F を導入する場合，f の性質が F にどのように翻訳され，f に還元されるか，すなわち，f と $\tilde{f}$ の性質の相互遺伝性が問題となる．この節ではそれに関する古典的な定理を二つあげておく．

定理 1 (M. Riesz)．$1<p<\infty$ とする．$f \in L^p(T)$, $\hat{f}_0 = 0$ なら

$$\|\tilde{f}\|_p \approx \|f\|_p \quad (\text{ノルム同値}).$$

この定理は A. Kolmogorov の不等式

$$m\{t \in T : |\tilde{f}(t)| > a\} \le \text{const.}\ a^{-1}\|f\|_1 \quad (a>0) \qquad (1)$$

から導かれる．(1) の複素函数を利用した証明は L. Carleson によって与えられた [11]．本質的には同じであるが，その簡単な証明を記そう．$f \ge 0$ としてよい．$w(z) = \log|1 + a^{-1}eF(z)|$ は D で調和であるから，

$$w(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(re^{it})\,dt, \quad 0<r<1.$$

ゆえに

$$w(0) \ge \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|1 + a^{-1}e f(t) + i a^{-1}e \tilde{f}(t)|\,dt.$$

左辺 $= \log|1+a^{-1}e\,F(0)| \leq a^{-1}e\,|F(0)| = e\,a^{-1}\|f\|_1$. 一方 $E = \{t : |\tilde{f}(t)| > a\}$ とおくと，右辺は

$$\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|a^{-1}e\,\tilde{f}(t)|\,dt = m(E).$$

ゆえに (1) がえられた.

D 上の函数 u に対して

$$M_p(u, r) = \|u(re^{it})\|_{L^p(dt)}, \quad 0<r<1.$$

$\mathbb{T}$ 上の函数 f に対して

$$\Delta_h f(t) = f(t+h) - f(t)$$

とおく. $0 < p \leq \infty$, $0 < \alpha \leq 1$ に対して

$$Lip_\alpha^p = \{f \text{ on } \mathbb{T} : \|\Delta_h f\|_p = O(|h|^\alpha)\}$$

$$Lip_*^p = \{f \text{ on } \mathbb{T} : \|\Delta_h^2 f\|_p = O(h)\}$$

とおく. $k+1 \geq \alpha > k$ のときは, $Lip_\alpha^p = \{f : f^{(k)} \in Lip_{(\alpha-k)}^p\}$, $Lip_{k+1*}^p = \{f : f^{(k)} \in Lip_*^p\}$ である.

f に対して $F = u + iv$ を §1 のように定義する.

<u>定理</u> 2. $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \alpha \leq 1$ とする.

(i) $f \in Lip_\alpha^p \iff M_p(\partial u/\partial t, r) = O(1-r)^{\alpha-1}$

$\iff M_p(\partial v/\partial t, r) = O(1-r)^{\alpha-1}$

$\iff M_p(F', r) = O(1-r)^{\alpha-1}$

(ii) $f \in Lip_*^p \iff M_p(\partial^2 u/\partial t^2, r) = O(1-r)^{-1}$

$\iff M_p(\partial^2 v/\partial t^2, r) = O(1-r)^{-1}$

$$\Leftrightarrow M_p(F'', r) = O(1-r)^{-1}.$$

証明は [19] 又は [3] にある.

定理1と2は, L^p $(p>1)$, Lip_α^p, Lip_*^p においては"効果的に"解析函数の議論に移行できることを示している. 次の章では, 局所的に境界値の存在を考える.

第二章 解析函数の境界における non-tangential limit.

3 解析函数の境界値(一変数の場合).

§1では可積分函数に対して F を (1.1) で定義するとき, n.t.l. は a.e. で存在することを示した. この節では, 円盤の一般の解析函数についてその問題を考える.

定理3 (Privalov). $E \subset \partial D = \mathbb{T}$, $m(E) > 0$ とする. $u(z)$ は D で調和, E の各点で n.t. 有界, すなわち,

$$\forall t \in E \quad \exists\, 0 < \delta < \pi/2 \ ; \quad u(\Gamma_\delta(t)) \text{ は有界}$$

をみたせば, E の a.e. で n.t.l. をもつ.

$$S_\delta(u)(t) = \left(\int_{\Gamma_\delta(t)} |\nabla u(z)|^2 dz \right)^{1/2} + |u(0)|$$

を Lusin の函数又は面積分という.

定理4. $E \subset \partial D$, $m(E) > 0$, u は D で調和とする. このとき

(i) u が E で n.t.l. をもてば,

$$S_\delta(u)(t) < \infty \quad \text{a.e. in } E \quad \text{for } 0<\delta<\pi/2.$$

(ii) 各 $t\in E$ に対して $0<\delta=\delta_t<\pi/2$ が存在して $S_\delta(u)(t)<\infty$ ならば, u は E の a.e. で n.t.l. をもつ.

v を u の共役調和函数 $u(0)=v(0)=0$ とすれば, $S_\delta(u)=S_\delta(v)$ であることに注目しよう. n.t.l. をもつという性質は, 零集合を除けば相互に移行する.

定理4の証明は [19] で, 等角写像を用いる方法と Poisson 核を用いる方法の二通りの仕方で示している. 後者は多変数の場合にも適用できる (cf [17]). 定理5は Marcinkiewicz - Zygmund 及び D. Spencer による. 証明はいずれも [19] にある.

$0<p\leq\infty$ とする. Hardy 空間 $H^p(D)$ は D で解析的な

$$\|f\|_{H^p} = \sup\{\|f(re^{it})\|_{L^p(\partial D)}\ ;\ 0<r<1\}<\infty$$

をみたす函数 f の集合である.

$0<\delta<\pi/2$ を固定するとき, f が D で解析的なら,

$$\|f\|_{H^p} \approx \|\sup_{z\in\Gamma_\delta(t)}|f(z)|\|_{L^p(\partial D)}$$

である. 従って

$f\in H^p(D)$, $0<p$. なら f は a.e. で n.t.l. をもつ.

4. 解析函数の境界値（多変数の場合）

§3で述べた性質は多変数の場合にも成りたつことが近年示された．それを二変数に限って述べよう．次のような記号を用いる．

$\mathbb{D} = D_1 \times D_2$, $D_j = \{ z_j \in \mathbb{C},\ |z_j| < 1 \}$, $j = 1, 2$.

$\mathbb{T} = T_1 \times T_2 = \partial \mathbb{D}$, $T_j = \{ t_j \ ;\ 0 \le t_j < 2\pi \}$

$\Gamma_\delta(t) = \Gamma_\delta(t_1) \times \Gamma_\delta(t_2)$, $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{T}$

定理 5 (Calderón - Zygmund). $E \subset \partial \mathbb{D}$, $m(E) > 0$ とする． $u(z_1, z_2)$ は $\mathbb{D}$ で重調和，E の各点で n. t. 有界，すなわち，各 $t \in E$ に対して $0 < \delta < \pi/2$ が存在して $u(\Gamma_\delta(t))$ が有界ならば，E の a. e. で $u(z_1, z_2)$ は n. t. l. をもつ．

証明は [19] にある．

$0 < \delta < \pi/2$ に対して Lusin の函数は

$$S_\delta(u)(t) = \left(\int_{\Gamma_\delta(t)} | \nabla_1 \nabla_2 u(z) |^2 dz \right)^{1/2}$$

$$+ \left(\int_{\Gamma_\delta(t)} | \nabla_1 u(z) |^2 \, | \nabla_2 u(z) |^2 dz \right)^{1/2}$$

$$+ \left(\int_{\Gamma_\delta(t_1)} |\nabla_1 u(z_1, 0)|^2 dz_1 \right)^{1/2} + \left(\int_{\Gamma_\delta(t_2)} |\nabla_2 u(0, z_2)|^2 dz_2 \right)^{1/2}$$

$$+ |u(0)|$$

で定義される．ここに $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$; $\nabla_j = (\partial/\partial x_j, \partial/\partial y_j)$, $j = 1, 2$; である．

<u>定理</u> 6. $E \subset \partial\mathbb{D}$, $m(E) > 0$, u は $\mathbb{D}$ で重調和とする．

(i) u が E で n. t. l. をもてば，$S_\delta(u)(t) < \infty$ a. e. in E.

(ii) $S_\delta(u)(t) < \infty$ in E ならば，E の a. e. で u は n. t. l. をもつ．

(i) は M. P. Malliavin - P. Malliavin [13] により，(ii) は J. Brossard [1] で示されている．

重調和函数 $u(z_1, z_2)$ に対して $u^{12} = u$, $u^{\tilde{1},2}$, $u^{1,\tilde{2}}$, $u^{\tilde{1},\tilde{2}}$ を夫々 z_1; z_2, z_1 及び z_2 に関する共役函数とするとき $S_\delta(u)(t) < \infty$ なら，これら四つの重調和函数に対しても Lusin の函数は有限であることに注目しよう．

§3 と同様，$0 < p \leq \infty$ とするとき，f は $\mathbb{D}$ で解析的

$$\|f\|_{H^p} = \sup \{ \|f(r_1 e^{it_1}, r_2 e^{it_2})\|_{L^p(\mathbb{T})} ; 0 < r_j < 1 \}$$

が有限ならば $H^p(\mathbb{D})$ に属するという．$t \in \mathbb{T}$ に対して

$$N_\delta f(t) = \sup \{ |f(z)| : z \in \Gamma_\delta(t) \}$$

とおくとき

$$\| f \|_{H^p(D)} \approx \| N_\delta (f) \|_{L^p(T)}$$

であるから，$f \in H^p(D)$ ならば n.t.l.

$$f(t_1, t_2) = \lim_{\Gamma_\delta(t_1, t_2) \ni (z_1, z_2)} f(z_1, z_2)$$

は a.e. で存在する．

第三章 Littlewood-Paley の函数，Lusin の函数

5. Lusin の函数と Littlewood-Paley の函数（一変数の場合）．

§3で述べた Lusin の函数と Littlewood-Paley の函数の関係を述べる．これは n.t.l. の存在とフーリエ級数の強総和法可能性の関係を示している．

D 上の函数 F に対して

$$g(F)(t) = \left(\int_{[0,1]} (1-|z|) |F'(ze^{it})|^2 dz \right)^{1/2}$$

$$g_\alpha^*(F)(t) = \left(\int_D \left(\frac{1-|z|}{|1-z|} \right)^{2\alpha} |F'(ze^{it})|^2 dz \right)^{1/2}$$

$$\Delta(F)(t) = \left(\sum_0^\infty |\Delta_k(t)|^2 \right)^{1/2},$$

ここに $\quad \Delta_k = \sum_{2^{k-1}}^{2^k} \hat{f}_n e^{int} \quad (k \geq 1), \quad \Delta_0 = \hat{f}_0$

そして $F = \sum_0^\infty \hat{f}_n e^{int}$ である．

$$h_\alpha(F)(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sigma_k^\alpha(F)(t) - \sigma_k^{\alpha-1}(F)(t)|^2}{k} \right)^{1/2},$$

ここに σ_k^α は F のフーリエ級数の k 次 Cesàro 平均である．

補題1. $\alpha > 0$ とするとき

(i) $c\, h_\alpha(F)(t) \le g_\alpha^*(F)(t) \le c'\, h_\alpha(F)(t)$.

(ii) $c\, g(F)(t) \le S_\delta(F)(t) \le c'\, g_\alpha^*(F)(t)$.

分解函数 $\Delta(F)$ は次のように解釈される．$r_k = \exp(-2^{-k})$ とおくとき $r_k(1-r_k)F'(r_k e^{it})$ の第 n フーリエ係数は $i\hat{f}_n[n r_k(1-r_k) r_k^n]$．従って，$|\Delta_k|^2$ の挙動は $r_k(1-r_k)|F'(r_k e^{it})|^2(r_k - r_{k-1})$ のそれに，従って $\Delta^2(F) = \sum |\Delta_k(F)|^2$ の挙動は

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k(1-r_k)|F'(r_k e^{it})|^2 (r_k - r_{k-1}) \sim \int_0^1 (1-r)|F'(re^{it})|^2\, dr$$

のそれに近いと考えられる（精密な議論については [19] 参照）

定理7. (i) $F \in H^p$, $0<p<\infty$, $\alpha > \max(1/p, 1/2)$ ならば

$$\| g_\alpha^*(F) \|_p \le c\, \|F\|_{H^p}.$$

$0 < p \le 2$, $\alpha = 1/p$ ならば，$F \mapsto g_\alpha^*(F)$ は weak type (p,p).

(ii) $F \in H^p$, $0<p<\infty$ なら

$$\|F\|_{H^p} \le c\,\|g(F)\|_p$$

(iii) $1<p<\infty$ なら

$$\|\Delta(F)\|_p \approx \|F\|_{H^p}, \quad F \in H^p$$

従って, 特に, $0<p<\infty$ なら

$$\|S_\delta(F)\|_p \approx \|F\|_{H^p}, \quad F \in H^p.$$

(i)の前半の証明は[18], 後半は[5], [10]にある. (ii)は[7], [15]を参照. (iii)の複素函数論的手法による証明は[19]を実函数論的方法による証明は[14], [9]などにある.

6 Lusinの函数(二変数の場合).

(6.1) この節の目的は, 次の定理を示すことである.

<u>定理 8.</u> $0<p<2$, uを$\mathbb{D}$の重調和函数とすると

$$\|S_\delta(u)\|_p \approx \|N_\delta(u)\|_p.$$

この定理は[8]による. 証明は簡単なスケッチが与えられているだけであるので, ここでできるだけ詳しく述べる.

定理8の証明に入る前に, この定理から導かれる重要な結果を示す.

$\mathbb{D}$の函数uに対して

$$S^{12}(u) = \left(\int_{\Gamma_\delta(t)} |D_1 D_2 u|^2 dz\right)^{1/2},$$

$$B(u) = \left(\int_{\Gamma_\delta(t)} |\nabla_1 u|^2 |\nabla_2 u|^2 dz\right)^{1/4},$$

$$S^1(u) = \left(\int_{\Gamma_\delta(t_1)} |\nabla_1 u(z_1, 0)|^2 dz_1\right)^{1/2},$$

$$S^2(u) = \left(\int_{\Gamma_\delta(t_2)} |\nabla_2 u(0, z_2)|^2 dz_2\right)^{1/2}$$

とおく．

補題 2．　$0 < p < \infty$ とする．$F \in H^p(\mathbb{D})$ に対して

$$\|F\|_{H^p} \approx \|S^{12}(F) + S^1(F) + S^2(F)\|_p + |F(0)|.$$

証明．$z = (z_1, z_2) = (r_1 e^{it_1}, r_2 e^{it_2}) \in \mathbb{D}$ とおく．$H = L^2(\Gamma_\delta(0), dz_2)$ とおく．F の $\mathbb{D}$ に対して $G_{t_2}(z_1) = \partial F(z_1, e^{it_2} z_2)/\partial z_2$ とおくと，$|G_{t_2}(z_1)|_H = \left(\int_{\Gamma_\delta(0)} |\nabla_2 F(z_1, z_2 e^{it_2})|^2 dz_2\right)^{1/2}$．ゆえに一変数の Lusin の函数の評価を H-値函数に対して適用して，

$$\int \sup_{z_1 \in \Gamma_\delta(t_1)} |G_{t_2}(z_1)|_H^p\, dt_1 \approx \int \left(\int_{\Gamma_\delta(t_1)} |\nabla_1 G_{t_2}(z_1)|_H^2 dz_1\right)^{p/2} dt_1 + |G_{t_2}(0)|_H^p.$$

所で，

$$\int (\text{右辺})\, dt_2 = \int S^{12}(F)^p dt_1 dt_2 + \int S^2(F)^p dt_1 dt_2,$$

$$\int (\text{左辺})\, dt_2 + \int S^1(F)^p dt_1 dt_2 \approx \int |G_{t_2}(e^{it_1})|_H^p dt_1 dt_2 + \int |F(e^{it_1}, 0)|^p dt_1$$

$$\approx \int |F(e^{it_1}, e^{it_2})|^p dt_1 dt_2 = \|F\|_{H^p}. \qquad \text{q.e.d.}$$

$F \in H^p(D)$ に対して $u = \mathrm{Re}\, F$ とおくと, u は重調和であって,

$$\| N_\delta u \|_p \le \| N_\delta F \|_p \le C \, \| F \|_{H^p}$$

一方, u を D の実数値重調和函数とするとき, $F = (1/4)\{ u^{1,2} - u^{\tilde{1},\tilde{2}} + i u^{\tilde{1},2} + i u^{1,\tilde{2}} \}$ とおくと, F は D で解析的, $\mathrm{Re}\, F = u$. ゆえに §4 定理6の注意によって $\| S_\delta (F) \|_p \le \| S_\delta (u) \|_p$. 最後の式は定理8より $\le C \, \| N_\delta (u) \|_p$ ゆえに補題2によって

$$\| F \|_{H^p} \le C \, \| N_\delta (u) \|_p .$$

$u \in \mathcal{D}'(\partial D)$ が与えられたとき, u を D の重調和函数として延長しておく.

<u>定理</u> 9. $0 < p < \infty$ とする. $u \in \mathcal{D}'(\partial D)$ とするとき, 次の命題は同値

(i) $F \in H^p(D)$ が存在して $\mathrm{Re}\, F = u$,

(ii) $N_\delta u \in L^p(\partial D)$ for all $0 < \delta < \pi/2$,

(iii) $\varphi \in \mathcal{S}(R^2)$, $\int \varphi \, dx \neq 0$ が存在して $\sup_{\varepsilon > 0} | u * \varphi_\varepsilon | \in L^p$,

(iv) $\sup_{\varphi \in \mathcal{B}} \sup_{\varepsilon > 0} | u * \varphi_\varepsilon | \in L^p$, $\mathcal{B}$ は $\mathcal{S}$ のある有界集合.

(iii), (iv) については [6] を参照.

この定理によって $H^p(D)$ は, 実数値重調和函数で $N_\delta u \in L^p$ なる u のなす空間としてよい. 重調和函数 u に対して

$$\| u \|_{H^p} = \| N_\delta u \|_{L^p}$$

とかく，ここで $0<\delta<\pi/2$ は固定しておく．異なる δ に対しては同値な距離が定義される．

(6.2) S^1, S^2 の評価

一変数の場合の評価を適用して

$$\| S^1 u \|_p \leq c \| N_\delta u \|_p = c \| u \|_{H^p}.$$

$S^2 u$ に対しても同様な評価がなされる．

(6.3) B の評価．

補題 3 ([16])．u, v を D の重調和函数とする．

$$B(u, v) = \left(\int_{\Gamma_\delta(t)} |\nabla_1 u|^2 |\nabla_2 v|^2 dz_1 dz_2 \right)^{1/4}$$

とおくとき

$$\| B(u, v) \|_4^2 \leq c \| u \|_{H^4} \| v \|_{H^4}.$$

証明．Δ_j を z_j に関する Laplacian，∇_j を z_j に関する gradient とする．

$$(1/2)\Delta_1(|u|^2|\nabla_2 v|^2) = |\nabla_1 u|^2 |\nabla_2 v|^2 + |u|^2 |\nabla_1\nabla_2 v|^2$$
$$+ O(|u||\nabla_1 u||\nabla_2 v||\nabla_1 \nabla_2 v|).$$

ゆえに

$$\Delta_1(|u|^2|\nabla_2 v|^2) + c|u|^2|\nabla_1\nabla_2 v|^2 \geq c'(|\nabla_1 u|^2|\nabla_2 v|^2). \qquad (1)$$

Green の公式によって，

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z_1|)(1-|z_2|)\,\Delta_1\left(|u|^2|\nabla_2 v|^2\right) dz_1\, dz_2$$

$$\leq \int (1-|z_2|) \log\frac{1}{|z_1|}\,\Delta_1\left(|u|^2|\nabla_2 v|^2\right) dz_1\, dz_2$$

$$= \int_D (1-|z_2|)dz_2 \int_{t_1\in T} \left\{|u(e^{it_1}, z_2)|^2|\nabla_2 v(e^{it_1}, z_2)|^2 - |u(0,z_2)|^2|\nabla_2 v(0,z_2)|^2\right\}\frac{dt_1}{2\pi}$$

$$\leq \int_D (1-|z_2|)dz_2 \int_T |u(e^{it_1}, z_2)|^2|\nabla_2 v(e^{it_1}, z_2)|^2 \frac{dt_1}{2\pi}$$

$$\leq C_\delta \int_{\partial\mathbb{D}} \left\{\int_{\Gamma_\delta(t_2)} |u(e^{it_1}, z_2)|^2|\nabla_2 v(e^{it_1}, z_2)|^2 dz_2\right\} dt_1\, dt_2$$

$|u(e^{it_1}, z_2)| \leq N_\delta u(t_1, t_2)$ for $z_2 \in \Gamma_\delta(t_2)$ であるから，上式は

$$\leq \int [N_\delta u(t_1,t_2)]^2 [S_\delta(v(e^{it_1}, \cdot))(t_2)]^2 dt_1\, dt_2$$

$$\leq \|N_\delta u\|_4^2 \;\|S_\delta(v(e^{it_1}, \cdot))(t_2)\|_4^2 .$$

最後の項に対して，一変数の Lusin の函数の評価を用いると，$C\|v\|^2_{L^4(\partial\mathbb{D})} \leq C\|N_\delta v\|_4^2$ でおさえられることがわかる．ゆえに

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z_1|)(1-|z_2|)\,\Delta_1\left(|u|^2|\nabla_2 v|^2\right) dz \leq C\|u\|^2_{H^4}\,\|v\|^2_{H^4}. \qquad (2)$$

次に，$|u| \leq N_\delta u$ in $\Gamma_\delta(t)$ であるから，

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z_1|)(1-|z_2|)\ |u|^2\ |\nabla_1\nabla_2 v|^2\ dz_1\, dz_2$$

$$\le c\int_{\partial\mathbb{D}} \left\{ \int_{\Pi_\delta(t)} |u|^2 |\nabla_1\nabla_2 v|^2\, dz \right\} dt \quad , \qquad t=(t_1,\ t_2)$$

$$\le c\ \| N_\delta u\|_4^2\ \| S^{12}(v)\|_4^2 .$$

$v = \mathcal{R}e\, F$ なる $F\in H^4(\mathbb{D})$ をとると補題2によって

$$\| S^{12}(v)\|_4 \le \| S^{12}(F)\|_4 \le c\ \|F\|_4 \le c\ \|v\|_4$$

$$\le c\ \|v\|_{H^4}$$

ゆえに,

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z_1|)(1-|z_2|)\ |u|^2 |\nabla_1\nabla_2 v|^2 dz_1 dz_2 \le c\ \|u\|_{H^4}^2\ \|v\|_{H^4}^2 . \qquad (3)$$

最後に,

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z_1|)(1-|z_2|)\ |\nabla_1 u|^2 |\nabla_2 v|^2\, dz \quad , \qquad z=(z_1,\ z_2)$$

$$\ge c\int_{\partial\mathbb{D}} \left\{ \int_{\Pi_\delta(t)} |\nabla_1 u|^2 |\nabla_2 v|^2 dz \right\} dt \qquad t=(t_1,\ t_2)$$

$$= c\ \| B(u,v)\|_4^4 .$$

(1), (2), (3), と最後の式を合せると求める式をうる.

<u>補題</u> 4. $0<p<2$, u を重調和, $A>0$ とするとき

$\| Bu\|_p \le c\,(A\|u\|_{H^p} + A^{-1}\|S^{12}u\|_p)$, c は A, u に無関係.

証明. 第1段階. 一変数の Lusin の函数 s_δ を考え

$$C_2u(t) = C_2u(t_1, t_2) = s_\delta(u(e^{it_1}, \cdot))(t_2)$$

とおく. C_1u の定義は第一変数に s_δ を作用させて定義する.

$\lambda > 0$ とする. $a, b > 0$ を固定し

$$E = \{t \in \partial D;\ N_\delta u(t) < a\lambda,\ S^{1/2}u(t) \le b\lambda,\ C_1u(t) \le \lambda,\ C_2u(t) \le \lambda\}$$

$P_r(\chi_E)(s) = P\chi_E(z)$ は χ_E の double Poisson 積分, 但し

$z = (r_1e^{is_1}, r_2e^{is_2})$ とする. $\varepsilon > 0$ は十分小として固定する.

$$E^* = \{t \in \partial D;\ P\chi_E(z) > 1-\varepsilon,\ \text{for all } z \in \Gamma_\delta(t)\}$$

とおく. そのときは,

$$E^* \subset E, \quad m(E^{*c}) \le C_\varepsilon\, m(E^c).$$

何となれば, $P\chi_E = 1 - P\chi_{E^c}$ であるから,

$$E^{*c} \subset \{t \in \partial D;\ P\chi_{E^c}(z) > \varepsilon$$
$$\text{for some } z \in \Gamma_\delta(t)\}.$$

ゆえに, M_S を Hardy-Littlewood の強最大函数とすると,

$$m(E^{*c}) \le m\{t \in \partial D;\ M_S\chi_{E^c}(t) > \varepsilon\}$$

$$\le \frac{c}{\varepsilon^2}\int (\chi_{E^c})^2 dt = c_\varepsilon\, m(E^c).$$

従って, $\varphi \in C^\infty(-\infty, \infty)$, $\varphi(t) = 0$ $(0 \le t \le 1-2\varepsilon)$, $= 1$ $(t \ge 1-\varepsilon)$ とすると,

$$\int_{E^*} B^4 u(t)\, dt$$

$$= \iint \chi_{E^*}(t)\, \chi_{\Gamma_\delta(t)}(z)\, |\nabla_1 u(z)|^2 |\nabla_2 u(z)|^2\, dz\, dt$$

$$\leq c \int (1-|z_1|)(1-|z_2|)\, \varphi(P(\chi_E)(z))\, |\nabla_1 u(z_1)|^2 |\nabla_2 u(z_2)|^2\, dz$$

$$= c\, M, \text{ say.} \tag{4}$$

第2段階

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z_1|)(1-|z_2|)\, \Delta_1 \left(\varphi(P\chi_E(z))\, |u|^2 |\nabla_2 u|^2 \right) dz \tag{5}$$

$$\leq c a^2 \lambda^2 \int_E [C_2 u]^2\, dt.$$

実際, z_1 について Green の公式を用いると, $(1-|z_1|) \leq \log|z_1|^{-1}$ であるから, (5) の左辺は

$$\leq c \int \left[\int_D (1-|z_2|) \left(\varphi(P\chi_E(z))\, |u|^2 |\nabla_2 u|^2\, dz_2 \right) ds_1, \right.$$

$$z = (e^{is_1}, z_2)$$

$$\leq c \int_{\partial \mathbb{D}} ds_1 ds_2 \int_{\Gamma_\delta(s_2)} \varphi(P\chi_E(z))\, |u|^2 |\nabla_2 u|^2\, dz_2.$$

所で $\varphi(P\chi_E(z)) \neq 0$ なら $P\chi_E(z) > 1-2\varepsilon$. 従って E の定義から $|u(z)| \leq a\lambda$ ゆえに上式

$$\leq ca^2\lambda^2 \int_E ds_1\, ds_2 \int_{\Gamma_\delta(s_2)} \varphi(\mathcal{P}\chi_E)\cdot |\nabla_2 u|^2 dz_2$$

$$= ca^2\lambda^2 \int_E [C_2 u(s_1, s_2)]^2 ds_1\, ds_2$$

第3段階．積分

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z_1|)(1-|z_2|)\, \Delta_1\left(\varphi(\mathcal{P}\chi_E(z))\, |u|^2 |\nabla_2 u|^2\right) dz \qquad (6)$$

を考える．(6) で

Δ_1 がすべて $|u|^2$ に作用することによって得られる積分は

$$2M.$$

Δ_1 がすべて $|\nabla_2 u|^2$ に作用することによって得られる積分

$$\leq 2a^2\lambda^2 \int_E [S^{12}u]^2 dt$$

Δ_1 が一部 $|u|^2$ に，一部 $|\nabla_2 u|^2$ に作用することによって得られる積分

$$\leq caM^{1/2}\lambda\left(\int_E [S^{12}u]^2 dt\right)^{1/2}$$

Δ_1 がすべて $\varphi(\mathcal{P}\chi_E)$ に作用する項；

$$\Delta_1(\varphi(\mathcal{P}\chi_E)) = \varphi''(\mathcal{P}\chi_E)\, |\nabla_1 w|^2$$

但し $w = \mathcal{P}\chi_{E^c}$．$\tilde{\varphi} \in C^\infty(-\infty, \infty)$，$\tilde{\varphi}(t) = 0$ $(0 \leq t \leq 1-2\varepsilon')$，$> 0$ $(t > 1-2\varepsilon')$ とする，ここに $\varepsilon' > \varepsilon$ とす

3. そのときは、

$$|\varphi^{(j)}(t)| \leq c\,\tilde{\varphi}(t)\,.\ (j=1,2,3,4)$$

更に

$$|\tilde{\varphi}^{(j)}(t)|^2 \leq c\,\tilde{\varphi}(t)\quad (j=1,2)$$

と仮定しておく。そのときこの場合の積分は

$$\leq a^2\lambda^2 L\,,$$

但し

$$L = \int (1-|z_1|)(1-|z_2|)\,\tilde{\varphi}(\lambda\chi_E)\,|\nabla_1 w|^2\,|\nabla_2 u|^2 dz_1 dz_2 .$$

Δ_1が一部 $|u|^2$, 一部 $\varphi(\lambda\chi_E)$ に作用する項は

$$\leq a\lambda L^{1/2} M^{1/2}.$$

Δ_1が一部 $|\nabla_2 u|^2$, 一部 $\varphi(\lambda\chi_E)$ に作用する項は

$$\leq a^2\lambda^2 \left(\int_E [\,C_2 u\,]^2 dt\right)^{1/2} L^{1/2}.$$

従って、これらの評価を合せると

$$M \leq c\Big\{a^2\lambda^2\int_E [\,C_2 u\,]^2 dt + a^2\lambda^2\int_E [\,S^{12} u\,]^2 dt$$

$$+ a\lambda M^{1/2}\left(\int_E [\,S^{12} u\,]^2 dt\right)^{1/2} + a^2\lambda^2 L + a\lambda L^{1/2} M^{1/2}$$

$$+ a^2\lambda^2 \left(\int_E [\,C_2 u\,]^2 dt\right)^{1/2} L^{1/2}\Big\}.$$

ゆえに、$M < \infty$ なら

$$M \leq c a^2 \lambda^2 \left\{ \int_E [C_2 u]^2 dt + \int_E [S^{12} u]^2 dt + L^2 \right\} \tag{7}$$

オ4段階　L の評価

$$K = \int (1-|z_1|)(1-|z_2|)\, \Delta_2 \left(\tilde{\varphi}(P\chi_E) |\nabla_1 w|^2 u^2 \right) dz_1 dz_2 \tag{8}$$

を考えよう．z_2 変数に対して Green の公式を用いると，

$$K \leq c \int_T ds_2 \int_D (1-|z_1|) \left(\tilde{\varphi}(P\chi_E)\, u^2 |\nabla_1 w|^2 dz_1 \right)$$

$$\leq c a^2 \lambda^2 \int_{\partial D} ds \int_{\Gamma_\delta(s_1)} |\nabla_1 w|^2 dz_1 , \qquad s = (s_1, s_2)$$

$$\leq c a^2 \lambda^2 \int w\, ds = c a^2 \lambda^2 m(E^c).$$

K で Δ_2 がすべて u^2 に作用する項は，

$$= 2L.$$

K で Δ_2 がすべて $|\nabla_2 w|^2$ に作用する項は，

$$\leq c a^2 \lambda^2 \int [S^{12} w]^2 ds \leq c a^2 \lambda^2 \int w^2 ds = c a^2 \lambda^2 m(E^c)$$

K で Δ_2 がすべて $\tilde{\varphi}(P\chi_E)$ に作用する項は，

$$\leq c a^2 \lambda^2 \int [B w]^4 ds \leq c a^2 \lambda^2 \int w^4 ds = c a^2 \lambda^2 m(E^c).$$

K で Δ_2 が一部 $\tilde{\varphi}(P\chi_E)$，一部 u^2 に作用する項

$$\leq ca\lambda\left(\int[Bw]^4 ds\right)^{1/2} L^{1/2} \leq ca\lambda\left(m(E^c)\right)^{1/2} L^{1/2}.$$

Kで Δ_2 が一部 $\tilde{\varphi}(P\chi_E)$, 一部 $|D_1 w|^2$ に作用する項

$$\leq ca^2\lambda^2 \left(\int[Bw]^4 ds\right)^{1/2}\left(\int[C_1 w]^2 ds\right)^{1/2} \leq ca^2\lambda^2 m(E^c).$$

ゆえに，$L<\infty$ なら，

$$L \leq ca^2\lambda^2 m(E^c). \tag{9}$$

第5段階　(7) と (9) によって，$M, L<\infty$ なら

$$M \leq ca^2\lambda^2\left\{\int_E [C_2 u]^2 dt + \int_E [S^{12} u]^2 dt\right\} + ca^4\lambda^4 m(E^c).$$

Čebyšev の不等式によって

$$m\{t : Bu(t)>\lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^4}\int_{E^*}[Bu]^4 dt + m(E^{*c}).$$

右辺の積分は M でおさえられ，第2項に対しては第1段の評価を用いると

$$m\{Bu>\lambda\} \leq \frac{ca^2}{\lambda^2}\left\{\int_E [C_2 u]^2 dt + \int_E [S^{12} u]^2 dt\right\} + c(a^4+1)\, m(E^c).$$

Eの定義から右辺は $a<1$ のとき

$$\leq \frac{ca^2}{\lambda^2}\left\{\int_{\{C_2 u<\lambda\}} [C_2 u]^2 dt + \int_{\{S^{12} u<b\lambda\}} [S^{12} u]^2 dt\right\}$$

$$+\ c\, m(N_\delta u>a\lambda) + c\, m(S^{12} u>b\lambda) + c\, m(C_2 u>\lambda)$$

ゆえに $L, M<\infty$ ならば（この仮定によって一般性は失われない）

$$\int [Bu]^p dt = p\int_0^\infty m\{Bu>\lambda\}\lambda^{p-1}d\lambda$$

$$\leq c\,(a^2+a^{-2})\,\|N_\delta u\|_p^p + c\,(a^2 b^{2-p}+b^{-p})\,\|S^{1/2}u\|_p^p + c\,\|G_2 u\|_p^p.$$

$\|G_2 u\|_p^p \leq c\,\|N_\delta u\|_p^p$ であることに注目，b を十分大にとり，次に a を十分小にとれば求める式がえられる

(6. 3) $S^{1/2}u$ の評価.

<u>補題</u> 5. u を $\mathbb{D}$ の重調和函数，$0<p<2$ とすると，

$$\|S^{1/2}u\|_p \leq c\,\|N_\delta u\|_p .$$

<u>証明</u>. 証明の方針はほぼ補題 4 と同様である.

第 1 段階. $a, b>0$ を固定する. $\lambda>0$ に対して

$$E=\{t : N_\delta u(t)<a\lambda,\ S^{1/2}u(t)<b\lambda,\ Bu(t)<\lambda\}$$

とおく. $\varepsilon>0$ は小として固定する.

$$E^*=\{t : P\chi_E(z)>1-\varepsilon \text{ for all } z\in\Gamma_\delta(t)\}$$

とおく. 補題 4，第 1 段階によって

$$E^*\subset E,\quad m(E^{*c})\leq c\,m(E^c).$$

φ を補題 4 で与えた函数とする

$$I=\int(1-|z_1|)(1-|z_2|)\,\Delta_1\Delta_2\left[\varphi(P\chi_E)\,u^2\right]dz_1dz_2$$

の評価を考える.

Green の公式を2回用いて

$$\mathrm{I} \leq c\int_E u^2\,dt \leq c\int_{\{N_\delta u < a\lambda\}} [N_\delta u]^2\,dt \tag{10}$$

第2段階.

Iにおいて $\Delta_1\Delta_2$ がすべて u^2 に作用する項は,

$$4\int (1-|z_1|)(1-|z_2|)\,\varphi(P\chi_E)\,(\nabla_1\nabla_2 u(z))^2\,dz_1dz_2$$

$$\geq c\int_{\partial D}\int_D \chi_{E^*}(t)\,\chi_{\Gamma_\delta(t)}(z)\,|\nabla_1\nabla_2 u(z)|^2\,dz\,dt$$

$$= c\int_{E^*} [S^{12}u(t)]^2\,dt, \tag{11}$$

であることが補題4のようにして示される.

Iにおいて $\Delta_1\Delta_2$ がすべて $\varphi(P\chi_E)$ に作用する項を I_1 とする.

$$\Delta_1\Delta_2\,\varphi(P\chi_E) = \varphi^{(iv)}(P\chi_E)\,|\nabla_1 w|^2|\nabla_2 w|^2$$

$$+\,O\big(\varphi'''(P\chi_E)|\nabla_1 w||\nabla_2 w||\nabla_1\nabla_2 w| + \varphi''(P\chi_E)|\nabla_1\nabla_2 w|^2\big),$$

ここに $w = P\chi_E c$ である.

$$\int (1-|z_1|)(1-|z_2|)\,|\varphi^{(iv)}(P\chi_E)|\,|\nabla_1 w|^2|\nabla_2 w|^2\,u^2\,dz_1dz_2$$

$$\leq c\int (1-|z_1|)(1-|z_2|)\,\tilde{\varphi}(P\chi_E)\,|\nabla_1 w|^2|\nabla_2 w|^2\,u^2\,dz_1dz_2$$

$$\le c a^2 \lambda^2 \int [Bw]^4 dt \le c a^2 \lambda^2 \int w^4 dt = c a^2 \lambda^2 m(E^c).$$

他の2項についても同様な評価がなされる．ゆえに

$$|I_1| \le c a^2 \lambda^2 m(E^c).$$

I において Δ_1 が $\varphi(P\chi_E)$ に Δ_2 が u^2 に作用する項を I_2 とする．

$$\Delta_1 \varphi(P\chi_E)\, \Delta_2 u^2 = 2\varphi''(P\chi_E)\, |\nabla_1 w|^2 |\nabla_2 u|^2.$$

ゆえに，補題4の L の評価から

$$|I_2| \le c a^2 \lambda^2 m(E^c).$$

I において Δ_2 が $\varphi(P\chi_E)$ に Δ_1 が u^2 に作用する項も同様にして評価される．

I において $\varphi(P\chi_E)$ と u^2 にそれぞれ z_1, z_2 に関する微分が1ヶづつ作用する項を I_3 とする．

$$|I_3| \le c \int (1-|z_1|)(1-|z_2|)\, \tilde{\varphi}(P\chi_E) \left[|\nabla_1 w||\nabla_2 w| + |\nabla_1 \nabla_2 w| \right]$$

$$\times \left[|u||\nabla_1 \nabla_2 u| + |\nabla_1 u||\nabla_2 u| \right] dz_1 dz_2$$

Schwarz の不等式によって

$$\int (1-|z_1|)(1-|z_2|)\, \tilde{\varphi}(P\chi_E)\, |\nabla_1 w||\nabla_2 w||\nabla_1 u||\nabla_2 u|\, dz_1 dz_2$$

$$\le [L \cdot L']^{1/2},$$

但し L は補題4で与えた積分（集合Eの定義は異なる），L'

はLでuとwの立場を交換して定義される．ゆえに上式は

$$\leq c\, a^2 \lambda^2\, m(E^c).$$

$$\int (1-|z_1|)(1-|z_2|)\,\widehat{\varphi}(P\chi_E)\,|\nabla_1 w||\nabla_2 w||\nabla_1\nabla_2 u||u|\,dz_1 dz_2$$

$$\leq c\, a\lambda \left(\int_E [S^{12}u]^2 dt\right)^{1/2} \left(\int [Bw]^4 dt\right)^{1/2}.$$

補題3から，$\int [Bw]^4\, dt \leq c\; m(E^c)$であるから，上式

$$\leq c\,\lambda^2 m(E^c) + c a^2 \int_{S^{12}u < b\lambda} [S^{12}u]^2 dt.$$

$$\int (1-|z_1|)(1-|z_2|)\,\widehat{\varphi}(P\chi_E)\,|\nabla_1\nabla_2 w||\nabla_1\nabla_2 u||u|\,dz_1 dz_2$$

についても上と同様にして，$\int [S^{12}w]^2 dt \leq c\; m(E^c)$を用いると，

$$\leq c\,\lambda^2 m(E^c) + c a^2 \int_{S^{12}u < b\lambda} [S^{12}u]^2 dt.$$

がえられる．最後に

$$\int (1-|z_1|)(1-|z_2|)\,\widehat{\varphi}(P\chi_E)\,|\nabla_1\nabla_2 w||\nabla_1 u||\nabla_2 u|\,dz_1 dz_2$$

$$\leq c\left(\int [S^{12}w]^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_E [Bu]^4 dt\right)^{1/2}.$$

$\int [S^{12}w]^2\, dt \leq c\; m(E^c)$であるから，上式

$$\leq C\lambda^2 m(E^c) + C\lambda^{-2}\int_{Bu<\lambda}[Bu]^4 dt.$$

ゆえに，$0<a<1$ ならば，

$$|I_3| \leq ca^2\int_{S^{12}u<b\lambda}[S^{12}u]^2 dt + C\int_{Bu<\lambda}[Bu]^4 dt + C\lambda^2 m(E^c)$$

I において u^2 に z_1 に関する微分が1ヶ他の3ヶの微分は $\varphi(P\chi_E)$ に作用する項を I_4 とする．

$$|I_4| \leq c\int(1-|z_1|)(1-|z_2|)\tilde{\varphi}(P\chi_E)\left[|\nabla_1 w||\nabla_2 w|^2 + |\nabla_1\nabla_2 w||\nabla_2 w|\right]|\nabla_1 u||u|\,dz_1 dz_2$$

$$\leq ca\lambda\left(\int(1-|z_1|)(1-|z_2|)\tilde{\varphi}(P\chi_E)|\nabla_2 w|^2|\nabla_1 u|^2 dz_1 dz_2\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\int(1-|z_1|)(1-|z_2|)\tilde{\varphi}(P\chi_E)|\nabla_1 w|^2|\nabla_2 w|^2 dz_1 dz_2\right)^{1/2}$$

$$+ca\lambda\left(\int(1-|z_1|)(1-|z_2|)\tilde{\varphi}(P\chi_E)|\nabla_1\nabla_2 w|^2 dz_1 dz_2\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\int(1-|z_1|)(1-|z_2|)\tilde{\varphi}(P\chi_E)|\nabla_2 w|^2|\nabla_1 u|^2 dz_1 dz_2\right)^{1/2}$$

右辺の第1，第4積分は補題4.第4段階によって

$$\leq ca^2\lambda^2\, m(E^c)$$

第2の積分は補題3によって

$$\leq c\,\|Bw\|_4^4 \leq c\, m(E^c).$$

第3項の積分は

$$\leq c\,\|S^{1/2}w\|_2^2 \leq c\,\|w\|_2^2 = c\,m(E^c).$$

以上をまとめると

$$|I_4| \leq c a^2\lambda^2\, m(E^c).$$

Iにおいて，u^2 に z_2 に関する微分が1つ他の3つの微分は $\varphi(P\chi_E)$ に作用する項を I_5 とすれば，同様にして

$$|I_5| \leq c a^2\lambda^2\, m(E^c).$$

Iにおいて，$\varphi(P\chi_E)$ に z_1 に関する微分が1つ他の3つの微分は u^2 に作用する項を I_6 とする．

$$|I_6| \leq c\int(1-|z_1|)(1-|z_2|)\tilde{\varphi}(P\chi_E)\,|\nabla_1 w|\,|\nabla_2 u|\,|\nabla_1\nabla_2 u|\,dz_1dz_2.$$

Lを補題4，第3段で与えた積分とする（集合Eの定義は異なる）ならば

$$|I_6| \leq c\left(\int(1-|z_1|)(1-|z_2|)\tilde{\varphi}(P\chi_E)\,|\nabla_1\nabla_2 u|^2dz_1dz_2\right)^{1/2}L^{1/2}$$

ゆえに
$$|I_6| \leq c a^2\int_{S^{1/2}u<b\lambda}[S^{1/2}u]^2dt + c\lambda^2 m(E^c).$$

Iにおいて，$\varphi(P\chi_E)$ に z_2 に関する微分が1つ，他の3つの微分は u^2 に作用する項も上と同様にして評価される．

以上をまとめると，$0<a<1$ なら，

$$m\{S^{12}u>\lambda\}\le m\{t\in E^*;\ S^{12}u(t)>\lambda\}+m(E^{*c})$$

$$\le\frac{1}{\lambda^2}\int_{E^*}[S^{12}u]^2dt+c\,m(E^c)$$

$$\le\frac{ca^2}{\lambda^2}\int_{S^{12}u<b\lambda}[S^{12}u]^2dt+\frac{c}{\lambda^4}\int_{Bu<\lambda}[Bu]^4dt$$

$$+\frac{c}{\lambda^2}\int_{N_\delta u<a\lambda}[N_\delta u]^2dt+c\,m(N_\delta u>a\lambda)$$

$$+c\,m(S^{12}u>b\lambda)+cm(Bu>\lambda).$$

ゆえに $0<p<2$ なら,

$$\int_{\partial D}[S^{12}u]^p dt=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}m(S^{12}u>\lambda)d\lambda$$

$$\le ca^2b^{2-p}\|S^{12}u\|_p^p+c\|Bu\|_p^p+ca^{2-p}\|N_\delta u\|_p^p$$

$$+ca^{-p}\|N_\delta u\|_p^p+cb^{-p}\|S^{12}u\|_p^p+c\|Bu\|_p^p.$$

所で補題4から,

$$\|Bu\|_p\le c(A\|u\|_{H^p}+A^{-1}\|S^{12}u\|_p).$$

従って, b を十分大にとって固定し次に a を十分小にとり最後に A を大とすれば,

$$\int_{\partial D}[S^{12}u]^p dt\le\frac{1}{2}\|S^{12}u\|_p^p+\mathrm{const}\,\|u\|_{H^p}.$$

ゆえに

$$\|S^{12}u\|_p\le c\,\|u\|_{H^p}.\qquad q.e.d.$$

定理8の証明. 補題4, 5より直ちに示される.

第四章 Hardy空間とatom分解

7. Chang-Fefferman の定理. 前節の結果から, $H^p(D)$, $0<p<\infty$, は重調和函数, または超函数のクラスとして複素函数の概念をはなれて定義できることがわかった. Chang-Fefferman [2] は更に一歩進めて atom 分解による表現が可能であることを示した.

記述を簡単にするため, $H^1(D)$ の代りに上半平面の積 $R^2_+ \times R^2_+$ 上の Hardy 空間 $H^1(R^2_+ \times R^2_+)$ を考えることにする, ここに $R^2_+ \times R^2_+ = \{(x, y)\ ;\ x = (x_1, x_2) \in R^2,\ y = (y_1, y_2), y_j > 0\}$ である. $F \in H^1(R^2_+ \times R^2_+)$ または単に $F \in H^1$ であるとは, F は $z = (z_1, z_2)$, $z_j = x_j + iy_j$, $y_j > 0$, の解析函数で

$$\|F\|_{H^p} = \sup_{y_1, y_2 > 0} \left(\int_{R^2} |F(x_1+iy_1, x_2+iy_2)|^p dx_1 dx_2 \right)^{1/p} < \infty$$

であることである. 前節の結果によって, H^p は次のような $R^2_+ \times R^2_+$ 上の実重調和函数 u の空間としてよい;

$$\|Nu\|_p < \infty,$$

但し
$$Nu(x) = \sup\{|u(t, y)|\ ;\ |x_j - t_j| < y_j,\ j = 1, 2\}.$$

定義. R^2 上の函数 a が atom であるとは, 開集合 $\Omega \subset$

$\mathbb{R}^2$が存在して

1) $\operatorname{supp} a \subset \Omega$,

2) $\| a \|_{L^2} \leq 1/|\Omega|^{1/2}$,

3) $\displaystyle\int_I a(x_1, y_1)\,dx_1 = \int_J a(x_1, y_2)\,dx_2 = 0, \quad (y_1, y_2) \in \Omega$.

但し I は $\Omega_{x_2} = \Omega \cap \{(y_1, x_2) : y_1 \in \mathbb{R}\}$ の任意の成分，J も同様である．更に a は素粒子 $\{a_R\}$ の和で表わされる；$a = \sum a_R$，ここに a_R は次の条件をみたす．

i) $\operatorname{supp} a_R \subset R$，ここで $R \subset \Omega$ は長方形 $R = I \times J$ であって $\sum$ の R はどの他の R の 3 倍の中に含まれることはない．

ii) $\displaystyle\int_I a_R(x_1, y_2)\,dx_1 = \int_J a_R(y_1, x_2)\,dx_2 = 0 \quad \text{for } (y_1, y_2) \in I \times J$,

iii) $a_R \in C^\infty$, $\| a_R \|_\infty \leq c_R |R|^{1/2}$, $\| (\partial/\partial x_1) a_R \|_\infty \leq c_R |I|^{-3/2} |J|^{-1/2}$, $\| (\partial/\partial x_2) a_R \|_\infty \leq c_R |I|^{-1/2} |J|^{-3/2}$, $\| (\partial^2/\partial x_1 \partial x_2) a_R \|_\infty \leq c_R |I|^{-3/2} |J|^{-3/2}$.

$\sum c_R^2 < A/|\Omega|$，A は絶対定数．

<u>定理</u> 10. $u \in H^1(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2)$ とする．その境界函数は

$$u = \sum \lambda_k a_k \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

とかける，ここに a_k は原子，$\lambda_k \geq 0$，$\sum \lambda_k \leq A \| u \|_{H^1}$．

逆に $u = \sum \lambda_k a_k$，a_k は原子，$\lambda_k \geq 0$，$\sum \lambda_k < \infty$ ならば $u \in H^1(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2)$．そして $\| u \|_{H^1} \leq A \sum \lambda_k$．

参 考 文 献

1. J.Brossard, Comportement des fonctions biharmoniques là où l'integrale d'aire est finie, Bull.sc.math.,103 (1979),77-95.

2. S.-Y.Chang and R.Fefferman, A continuous version of duality of H^1 with BMO on the bidisc, Ann.of Math.,112(1980),179-201.

3. P.L.Duren, Theory of H^p Spaces, Acad.Press, 1980.

4. H.Dym and H.P.McKean, Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem, Acad.Press, 1976.

5. C.Fefferman, Inequalities for strongly singular convolution operators, Acta Math.,124(1970),9-36.

6. C.Fefferman and E.M.Stein, H^p-spaces of several variables, Acta Math., 129(1972),137-193.

7. T.M.Flett, On some theorems of Littlewood and Paley, J.London Math.Soc., 31(1956),336-344.

8. R.F.Gundy and E.M.Stein, H^p theory for the poly-disc, Proc.Natl Acad. Sci.,U.S.A.,76(1979),1026-9.

9. S.Igari, On the decomposition theorems of Fourier transforms with weighted norms, Tohoku Math.J.,15(1963),6-36.

10. M.Kaneko, The absolute Cesàro summability and the Littlewood-Paley function, ibid.,24(1972),223-232.

11. Y.Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, Wiley, New York,1968.

12. P.Koosis, Introduction to H_p Spaces, Cambridge Univ.Press, 1980.

13. M.-P.Malliavin and P.Malliavin, Intégrales de Lusin-Calderon pour les fonctions biharmoniques, Bull.sc.math.,101(1977),357-384.

14. J.Schwartz, A remark on inequalities of Calderon-Zygmund type for vector valued functions,Comm.Pure Appl.Math.,14(1961),785-799.

15. E.M.Stein, Classe H^p, multiplicateure et fonctions de Littlewood-Paley, C.R.Acad.Sc.Paris,263(1966),716-719 : Classe H^p, multiplicateures et fonctions de Littlewood-Paley, Applications de résultats antérieurs, ibid. 780-781 : H^p et multiplicateurs ; Cas n-dimensional, ibid.264(1967), 107-108.

16. E.M.Stein, A variant of the area integral, Bull.sc.math.,103(1979),449-461.

17. E.M.Stein and G.Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ.Press, 1971.

18. G.Sunouchi, Theorems on power series of the class H^p, Tohoku Math.J., 8 (1956), 125-146.

19. A.Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge Univ.Press, 1959.