数理解析研究所講究録
第 451 巻 1982 年 87-124

函数解析から見た Littlewood - Paley 理論

筑波大学数学系　村松寿延

序. Littlewood と Paley が円周上の函数について導入した g-function の類似物として, E.M. Stein [5] は $\mathbb{R}^n$ 上の函数について,

$$(1)\qquad g(f)(x) = \left\{ \int_0^\infty |\operatorname{grad}_x u(t,x)|^2 t\,dt \right\}^{1/2}$$

と定義している. ただし,

$$(2)\qquad u(t,x) = \int P(t, x-y) f(y)\,dy$$

$$(3)\qquad P(t,x) = \frac{c_n t}{(|x|^2+t^2)^{(n+1)/2}}, \quad c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}}$$

である. g-function についての Littlewood - Paley 理論とは次の定理のことである:

定理　$1 < p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ のとき

$$(4)\qquad C_p \| g(f) \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqq \| f \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqq C_p' \| g(f) \|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

が成立する.

このように, これまでの研究では g-function が中心であって $u(t,x)$ はそのための補助のように見なされている. しかし, われわれの見地からは $u(t,x)$ の方が本質的である. すなわち定理の前半を対応 $f \to t\,\mathrm{grad}_x u$ が, $L_p(\mathbb{R}^n)$ から $L_p(\mathbb{R}^n; L_2^*(\mathbb{R}_+))$ への有界作用素であると読み, 後半を f が $t\,\mathrm{grad}\,u$ により"積分表示され"て, それが $L_p(\mathbb{R}^n; L_2^*(\mathbb{R}_+))$ から $L_p(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素になることと解釈できるのである.

ただし, X が Banach 空間のとき測度空間 (Ω, μ) 上の強可測で p 乗可積分な函数の全体を $L_p(\Omega, \mu; X)$ と書く. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (n 次元ユークリッド空間) で μ が Lebesgue 測度のときは μ を省き, $\mathbb{R}_+ = \{t > 0\}$ またはこの部分集合で測度 dt/t をとるときは L_p^* で示し, $X = \mathbb{C}$ のときは X を省く.

われわれの定式化が有効である理由は

第一に, $u(t,x)$ は函数 f の正則化で t は近似の程度を示すパラメーターであるというはっきりとした意味があるが, g-function には意味がつけにくい.

第二に対応 $f \mapsto t\,\mathrm{grad}_x u$ および $t\,\mathrm{grad}\,u$ による f の積分表示は線型である しかもある意味では

積分作用素である．一方 対応 $f \mapsto g(f)$ は線型でなくて，いわゆる sublinear である．作用素は補間など種々の事項について線型の方がずっとやさしい。

実際，後でみすように，われわれの方法で定理を実に見通しよく証明することができる．g-function の難点はなんといっても g-function でもとの f を表示できない所にある．したがって定理の後半の証明がかなりめんどうになる．

また，積分核が Laplace 方程式，あるいは Cauchy-Riemann 方程式を満たしている本質的でないことがわかる．したがってわれわれはこの意味での Littlewood-Paley 理論を円錐性をもつ $\mathbb{R}^n$ の領域の場合に拡張することができる．

"正則化" は函数および超函数の L_p 空間での微分可能性の理論，いわゆる Sobolev 空間論と Besov 空間論でも中心的な役割を荷っていたのである．

§1. Fourier 級数に関する Littlewood-Paley の g-function について．

上記についてはよく知られているが，原論文から定義を抜き出し，われわれの方法が適用できることを示そう．

f が 円周 $\mathbb{T}$ 上可積分な実数値函数のとき

(1) $$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta,$$

と定める．簡単のため $c_0=0$ を仮定する．

(2) $$\phi(z) = 2\sum_1^\infty c_n z^n \qquad (z=\rho e^{i\theta}),$$

(3) $$g(\theta) = \left(\int_0^1 (1-\rho)\,|\phi'(\rho e^{i\theta})|^2\, d\rho\right)^{1/2}$$

（ϕ' は導函数を示す）

と定義する．この論文［2］の定理7が序の定理に対応しているのである．計算すればわかるように，$t=1-\rho$ とおくと，

(4) $$\phi'(\rho e^{i\theta})(1-\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(t,\theta,\theta')\, f(\theta')\, d\theta',$$

(5) $$K(t,\theta,\theta') = \frac{2t\, e^{-i\theta'}}{\{1-(1-t)\,e^{i(\theta-\theta')}\}^2},$$

となる．不等式

$$\|g\|_{L_p} \leqq C\,\|f\|_{L_p}$$

は，対応，$f(\theta) \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(t,\theta-\theta')\, f(\theta')\, d\theta'$ が $L_p(\mathbb{T})$ から $L_p(\mathbb{T},\ L^*_2(0,1))$ への有界作用素であることと解釈できる．（$\mathbb{T}$ は1次元トーラス）．

$p=2$ の場合は Parseval の等式によりすぐわかる．すなわち，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1}(1-\rho)\,|\phi'(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho\, d\theta$$

$$= 4\int_0^1 (1-\rho)\, d\rho \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_1^\infty n c_n \rho^{n-1} e^{i(n-1)\theta}\right|^2 d\theta$$

$$= 4\int_0^1 \sum_1^\infty n^2 \rho^{2n-2}(1-\rho)|c_n|^2 d\rho = \sum_1^\infty \frac{4n^2}{2n(2n-1)}|c_n|^2$$

で，右辺は $\sum_1^\infty |c_n|^2 = \|f\|_{L_2(\mathbb{T})}$ と同値である。

一般の p については，$p=2$ の結果と後で述べる積分作用素の L_p 有界性についての定理（定理 4）を使えばよい。そこで積分核についての条件をためす．

$$\frac{\partial K}{\partial \theta'}(t,\theta,\theta') = \frac{-2ti\,e^{-i\theta'}\{1+(1-t)e^{i(\theta-\theta')}\}}{\{1-(1-t)e^{i(\theta-\theta')}\}^3}$$

である．したがって，$s = \left|\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right|$ とおくと，

$$\int_0^1 \left|\frac{\partial K(t,\theta,\theta')}{\partial \theta'}\right|^2 \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^1 \frac{t\,|t^2-4(1-t)s^2|}{\{t^2+4(1-t)s^2\}^3}\, dt \leqq \frac{c}{s^4},$$

また，

$$\frac{\partial K}{\partial \theta}(t,\theta,\theta') = \frac{2it\,e^{-i\theta'}(1-\theta)\,e^{i(\theta-\theta')}}{\{1-(1-t)e^{i(\theta-\theta')}\}^3},$$

$$\int\left|\frac{\partial K}{\partial \theta}(t,\theta,\theta')\right|^2\frac{dt}{t} \leqq C\left\{\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right\}^{-4}$$

である．よって定理4が使えるのである．

不等式：

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T})} \leqq C' \|g\|_{L_p(\mathbb{T})}$$

は"積分表示"，L_2有界性と定理4によりわかる．

まず円周の場合のPoisson核を

$$(6) \qquad P(\rho, \theta) = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

とおく．Dirichlet問題の解の一意性により，

$$(7) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\rho_1, \theta-\theta')P(\rho_2, \theta')\,d\theta' = P(\rho_1\rho_2, \theta)$$

である．これは直接計算してもわかる．序と同様に，

$$(8) \qquad u(t,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(1-t, \theta-\theta')f(\theta')\,d\theta'$$

とおくと，$t \to 0$のとき$u(t,\theta) \to f(\theta)$である．（$f$については適当に仮定をおく．あるいは，収束の意味を適当に考えるとよい）．仮定より$u(1,\theta)=0$であるから，部分積分により，

$$(9) \qquad f(\theta) = \int_0^1 t\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{u(2t-t^2, \theta)\}\,dt$$

を得る．これに，(7)，(8)，および部分積分と

(10) $$\rho\frac{\partial P(\rho,\theta)}{\partial\rho}=\frac{\partial Q(\rho,\theta)}{\partial\theta},\quad \rho\frac{\partial Q(\rho,\theta)}{\partial\rho}=-\frac{\partial P(\rho,\theta)}{\partial\theta},$$

ただし， (Cauchy-Riemann方程式)

(11) $$Q(\rho,\theta)=\frac{2\rho\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2},$$

を使うと，積分表示式

(12) $$f(\theta)=2\int_0^1\frac{dt}{t}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}tP_1(1-t,\theta-\theta')u_1(t,\theta')d\theta'-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\tilde{Q}(1-t,\theta-\theta')v_1(t,\theta')d\theta'\right\}$$

(13) $$u_1(t,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}tP_1(1-t,\theta-\theta')f(\theta')d\theta',\quad P_1(\rho,\theta)=\frac{\partial P}{\partial\rho}(\rho,\theta),$$

(14) $$v_1(t,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}tQ_1(1-t,\theta-\theta')f(\theta')d\theta',\quad Q_1(\rho,\theta)=\frac{\partial Q}{\partial\rho}(\rho,\theta)$$

(15) $$\tilde{Q}(\rho,\theta)=\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\{\rho Q(\rho,\theta)\},$$

を得る．

$$P_1(\rho,\theta)=\mathrm{Re}\frac{2e^{i\theta}}{\{1-\rho e^{i\theta}\}^2},\quad Q_1(\rho,\theta)=\mathrm{Im}\frac{2e^{i\theta}}{\{1-\rho e^{i\theta}\}^2}$$

であるから，

$$t^2|\varphi'((1-t)e^{i\theta})|^2 = u_1(t,\theta)^2 + v_1(t,\theta)^2$$

である．したがって，不等式 (4) の後半は作用素

$$w(t,x) \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{t}\int_{-\pi}^{\pi} tP_1(1-t,\theta-\theta')w(t,\theta')d\theta'$$

$$w(t,x) \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{t}\int_{-\pi}^{\pi} t\,\tilde{Q}(1-t,\theta-\theta')w(t,\theta')d\theta'$$

が $L_p(\mathbb{T}; L_2^*(0,1))$ から $L_p(\mathbb{T})$ への有界作用素であることからわかる．$p=2$ のときは Parseval の等式により，$1<p<\infty$ のときは，$p=2$ の結果と

$$\int_0^1 \left| t\frac{\partial P_1(1-t,\theta)}{\partial\theta}\right|^2 \frac{dt}{t} \leqq \frac{C}{\sin^4\frac{\theta}{2}},$$

$$\int_0^1 \left| t\frac{\partial \tilde{Q}(1-t,\theta)}{\partial\theta}\right|^2 \frac{dt}{t} \leqq \frac{C}{\sin^4\frac{\theta}{2}},$$

を使い，定理4 を適用すればわかる．

§2. E.M.Stein の g-function の場合．

序のように $u(t,x)$ を定義すると，

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(t,x) = \int P_j(t,x-y)f(y)dy,\quad P_j(t,x) = \frac{\partial P(t,x)}{\partial x_j}$$

であるから，不等式 $\|g(f)\|_{L_p} \leqq C\|f\|_{L_p}$ は作用素

(1) $\quad f \mapsto \int tP_j(t,x-y)f(y)dy \qquad (j=1,2,\cdots,n)$

が $L_p(\mathbb{R}^n)$ から $L_p(\mathbb{R}^n;\ L_2^*(\mathbb{R}_+))$ への有界作用素であることと同値である．$p=2$ のときは Parseval の等式によりわかる．すなわち，$P(t,x)$ の Fourier 変換は

(2) $$\hat{P}(t,\xi) = (2\pi)^{-n/2}\, e^{-|\xi| t}$$

であり，したがって $t P_j(t,x)$ の Fourier 変換は $-(2\pi)^{-n/2} i t \xi_j e^{-|\xi| t}$ であり，ゆえに，

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t} \int \left| \int t P_j(t, x-y) f(y)\, dy \right|^2 dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int \left| \{ t \xi_j e^{-|\xi| t} \hat{f}(\xi) \} \right|^2 d\xi$$

$$\leqq C \| f \|_{L_2}^2, \qquad C = \int_0^\infty t e^{-2t} dt = \frac{1}{4}.$$

ただし，$\hat{f}$ は f の Fourier 変換；

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx$$

$$x\cdot\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$$

である．$p=2$ のときの結果と，

(3) $$\frac{\partial P_j(t,x)}{\partial x_j} = -(n+1)c_n \left\{ \frac{t}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+3}{2}}} - \frac{(n+3)x_j^2 t}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+5}{2}}} \right\},$$

(4) $$\frac{\partial P_j(t,x)}{\partial x_k} = \frac{(n+1)(n+3)x_j x_k t}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+5}{2}}}, \qquad (k \neq j)$$

からわかる評価式

(3) $$\left(\int |t\, \mathrm{grad}_x P_j(t,x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \leqq \frac{C}{|x|^{n+1}}$$

と定理4により $1<p<\infty$ の場合がわかる.

序の(4)の後半は§1と同様に積分表示と同じ方法でわかる. $t\to 0$ のとき $u(t,x)\to f(x)$ であるから, 部分積分により,

$$(5)\qquad f(x) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty t^2 \frac{\partial^3}{\partial t^3}\{u(2t, x)\}\,dt$$

がわかる.

$$(6)\qquad \frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = \frac{c_n(|x|^2 - nt^2)}{(|x|^2+t^2)^{(n+3)/2}},$$

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(x,t) = \frac{c_n(n+1)t\,(-3|x|^2+nt^2)}{(|x|^2+t^2)^{(n+5)/2}}$$

より, $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$ については

$$\left| t^j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(t,x)\right| \leqq c_j\, t^{-(p'-1)n}\|f\|_{L_p}$$

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$$

が成立するからである.

Poisson核の性質

$$(8)\qquad P(t_1+t_2, x) = \int P(t_1, x-y)\,P(t_2, y)\,dy$$

により

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}P(2t,x) = \int P_{ttt}(t, x-y)\,P(t,y)\,dy$$

(この式続く)

$$+\,3\int P_{tt}(t,x-y)\,P_t(y)\,dy$$

$$+\,3\int P_t(t,x-y)\,P_{tt}(y)\,dy$$

$$+\int P(t,x-y)\,P_{ttt}(y)\,dy$$

$$P_t=\frac{\partial P}{\partial t},\quad P_{tt}=\frac{\partial^2 P}{\partial t^2},\quad P_{ttt}=\frac{\partial^3 P}{\partial t^3}.$$

これに，Laplace方程式

(9) $$\frac{\partial^2 P(t,x)}{\partial t^2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 P(t,x)}{\partial x_j^2}=0$$

と 部分積分 を使うと，積分表示

(10) $$f(x)=4\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty\frac{dt}{t}\int t^2 P_{tj}(t,x-y)\,u_j(t,y)\,dy$$

を得る．ただし，

(11) $$u_j(t,x)=t\,\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j}.$$

(12) $$P_{tj}(t,x)=\frac{\partial^2 P(t,x)}{\partial x_j\,\partial t}$$

$$=\frac{-c_n(n+1)\{|x|^2-(n+2)t^2\}\,x_j}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+5}{2}}}$$

である． P_{tj} の Fourier 変換 は $-(2\pi)^{-n/2}\,i\,\xi_j|\xi|\,e^{-|\xi|t}$ であること，および

$$\left(\int_0^\infty\left|t^2\,\mathrm{grad}_x\,P_{tj}(t,x)\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2}\leqq\frac{C}{|x|^{n+1}}$$

を使えば Parseval の等式と定理4により作用素

(13) $$v(t,x) \mapsto \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int t^2 P_{tj}(t, x-y) v(t,y)\,dy$$

が $L_p(\mathbb{R}^n; L_2^*(\mathbb{R}_+))$ から $L_p(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素であることがわかる. 積分表示 (10) と組合せて左の不等式 (4) の後半が得られる。

附記. §1 では Cauchy-Riemann 方程式, §2 では Laplace 方程式が使われているが, それらは積分表示を得るための手段であって, 重要なのは積分表示であることを強調しておく.

§3. 分解定理

Calderón-Zygmund の分解定理を L_p 有界性定理の証明に使うのでここに述べておく. トーラスの場合も考える. $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ ($-\pi$ と π を同一視する).

<u>定理 1.</u> (a) f を $\mathbb{R}^n$ 上の非負値可積分函数, $\lambda > 0$ とすると, 次のような立方体の列 $\{Q_j\}_{j=1,2\cdots}$ が存在する:

(1) $f(x) \leqq \lambda$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\}$

(2) $Q_j^\circ \cap Q_k^\circ = \phi$ $(j \neq k)$. (Q_j° は Q_j の内部)

(3) $$\lambda < \frac{1}{\mathrm{meas}(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)\,dx \leqq 2^n \lambda \quad (j=1,2\cdots)$$

(meas Q は Q の測度)

(b) f を $\mathbb{T}^n$ 上の非負値可積分函数とし，$\lambda > 0$ とすると，

$$\frac{1}{\mathrm{meas}(\mathbb{T}^n)} \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\,dx > \lambda \tag{4}$$

または $\mathbb{T}^n$ 内の立方体の列 $\{Q_j\}_{j=1,2,\cdots}$ で，(1),(2),(3)
（ただし，(1)は $f(x) \leqq \lambda \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{T}^n \setminus (\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j)$）を
みたすものが存在する．

証明．(a) はたとえば [5] p17～18 にある．

(b)の証．(4)が成立しないとする．$\mathbb{T}^n$ を 2^n 個の立方体に分割し，

$$\frac{1}{\mathrm{meas}(Q)} \int_Q f(x)\,dx > \lambda \tag{5}$$

を満すものを $Q_1, \cdots, Q_k$ とする．作り方から(3)が成立する．上の不等式の成立しない立方体をそれぞれ 2^n 等分し，(5)の成立するものを $Q_{k+1}, \cdots, Q_{k+l}$ とする．以下同様な操作をつづけて，$Q_1, Q_2, \cdots\cdots$ を作る．作り方から(2)と(3)が成立することがわかる．(1)を示そう．$x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ とする．$\{Q_j\}$ の選び方により，各 $k=1,2,\cdots$ について一辺が $2\pi\cdot 2^{-k}$ の立方体 Q'_k が存在して，

$$\frac{1}{\mathrm{meas}\, Q'_k} \int_{Q'_k} f(y)\,dy \leqq \lambda$$

となる．Lebesgue の微分定理により，a.e. $x \in \mathbb{T}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$

$f(x) \leqq \lambda$ がわかる.　　　　　　　　　　　　証明終.

§4. ある L_p 有界性定理.

われわれの議論の中心となる定理を示す. これは分解定理と Marcinkiewicz の補間定理により証明できる.

<u>定理2.</u>　X, Y を Banach 空間, $Q = \{x\,;\ |x_j| \leq 1\ (j=1,\cdots,n)\}$ を $\mathbb{R}^n$ の立方体とする. $\mathcal{L}(X, Y)$ で X から Y への線型有界作用素の全体を示す.

(a)　$H(x, x')$ を $(x, x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ の $\mathcal{L}(X, Y)$-値強可測函数とし, 作用素 T を

$$(1) \qquad T : f \longmapsto \int H(x, x') f(x')\, dx'$$

と定義する. $1 < r \leqq \infty$ とし,

(i)　T は $L_r(\mathbb{R}^n; X)$ から $L_r(\mathbb{R}^n; Y)$ への有界作用素であって,

(ii)　$H(x, x')$ は $x \neq x'$ のとき x' について微分可能であって,

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{ess.sup}_{b>0,\ x'} \int_{\mathbb{R}^n \setminus (x' + bQ)} \left\| \frac{\partial H}{\partial x'_j}(x, x') \right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} dx = \gamma < \infty$$

とする. このとき $1 < p < r$ について T は $L_p(\mathbb{R}^n; X)$ から $L_p(\mathbb{R}^n; X)$ への有界作用素である.

(b) $J(y) = (e^{iy_1}, \cdots, e^{iy_n})$ を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{T}^n$ への射影とする.

$H(x, x')$ を $(x, x') \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ の $\mathcal{L}(X, Y)$-値可測函数とし, (1) により作用素 T を定義する. $1 < r \leq \infty$ とし,

(i) T は $L_r(\mathbb{T}^n; X)$ から $L_r(\mathbb{T}^n; Y)$ への有界作用素であって,

(ii) $x \neq x'$ のとき $H(x, x')$ は x' について微分可能,

$$(3) \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{ess.sup}_{b>0,\ y' \in \mathbb{R}^n} b \cdot \int_{\mathbb{T}^n \setminus J(y'+bQ)} \left\| \frac{\partial H}{\partial x'_j}(x, J(y')) \right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} dx = \gamma < \infty,$$

とする. このとき $1 < p < r$ について T は $L_p(\mathbb{T}^n; X)$ から $L_p(\mathbb{T}^n; X)$ への有界作用素である.

証明. T が weak type (1, 1) となることをいえば Marcinkiewicz の補間定理 (たとえば [5] p. 21. これが Banach 空間値の場合に拡張できることは容易にわかる) により結論を得る. $r < \infty$ だけ考える.

(a) の証. $f \in L_1(\mathbb{R}^n; X)$ とする. $\|f(x)\|_X$ に分解定理を適用する. $\lambda > 0$ とすると, 定理 1 の条件 (3.1), (3.2), (3.3) を満たす立方体の列 $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ がとれる. $F = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ とおく. $x \in F$ のとき $f_0(x) = f(x)$, $x \in Q_k^{\circ}$ のとき

$$f_0(x) = \frac{1}{\mathrm{meas}(Q_k)} \int_{Q_k} f(y)\,dy$$

と定め，$f_1 = f - f_0$ とおく．また，$x \in Q_k^\circ$ のとき

$$g_k(x) = f(x) - \frac{1}{\mathrm{meas}(Q_k)} \int_{Q_k} f(y)\,dy,$$

その他で $g_k(x) = 0$ として g_k を定める．

$$f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} g_k, \qquad \int g_k(x)\,dx = 0$$

である．また

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|f_0(x)\|_X^r\,dx \leqq \int_F \|f(x)\|_X \cdot \lambda^{r-1}\,dx$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} \frac{dx}{\mathrm{meas}(Q_k)} \int_{Q_k} \|f(y)\|_X\,dy \cdot (2^n\lambda)^{r-1}$$
$$\leqq (2^n\lambda)^{r-1} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n;X)}$$

ゆえに

$$\mathrm{meas}\{x;\ \|Tf_0(x)\|_Y > \lambda/2\} \leqq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^r \|Tf_0\|^r_{L_r(\mathbb{R}^n;Y)}$$
$$\leqq C_0^r 2^{r+n(r-1)} \frac{\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n;X)}}{\lambda}.$$

次に $\mathrm{meas}\{x;\ \|Tf_1(x)\|_Y > \lambda/2\}$ を評価しよう．Q_k の一辺 $2b_k$，その中心は $x^{(k)}$ とする．Q_k' で中心 $x^{(k)}$ で一辺 $4b_k$ の立方体とする．

$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k'$ と定め，$x \notin E$ とする．

$$Tg_k(x) = \int H(x,x')\, g_k(x')\, dx'$$

$$= \int \{H(x,x') - H(x, x^{(k)})\} g_k(x')\, dx'$$

$$= \int_0^1 ds \int \sum_{j=1}^{n} (x_j' - x_j^{(k)}) H_j(x, x^{(k)} + s(x' - x^{(k)}))\, g_k(x')\, dx'.$$

$$\left(H_j(x,x') = \frac{\partial H}{\partial x_j'}(x,x') \right)$$

ゆえに，

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus E} \| Tg_k(x) \|_Y\, dx$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{n} b_k \int \|g_k(x')\|_X\, dx' \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_k'} \| H_j(x, x^{(k)} + s(x' - x^{(k)})) \|_{\mathcal{L}(X,Y)}\, dx$$

$$\leqq \gamma \int \| g_k(x') \|_X\, dx'.$$

よって，

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus E} \| T f_1 \|_Y\, dx \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \int \| T g_k(x) \|_Y\, dx$$

$$\leqq \gamma \sum_{k=1}^{\infty} \int \| g_k(x') \|_X\, dx'$$

$$\leqq 2\gamma\, \| f \|_{L_1(\mathbb{R}^n; X)}.$$

一方，$\lambda \cdot \mathrm{meas}(Q_k) \leqq \int_{Q_k} \| f(y) \|_X\, dy$ より

$$\mathrm{meas}(E) \leqq 2^n \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{meas}(Q_k) \leqq \frac{2^n}{\lambda} \| f \|_{L_1(\mathbb{R}^n; X)}.$$

以上により

$$\mathrm{meas}\{x;\ \|Tf_1(x)\|_Y > \lambda/2\} \leqq \frac{4\gamma + 2^{n+1}}{\lambda}\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n;X)}.$$

結局,

$$\mathrm{meas}\{x;\ \|Tf(x)\|_Y > \lambda\}$$

$$\leqq \mathrm{meas}\{x;\|Tf_0(x)\|_Y > \lambda/2\} + \mathrm{meas}\{x;\|Tf_1(x)\|_Y > \tfrac{\lambda}{2}\}$$

$$\leqq \{C_0^r\, 2^{r+n(r-1)} + 4\gamma + 2^{n+1}\}\lambda^{-1}\cdot\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n;X)}.$$

(b). $f \in L_1(\mathbb{T}^n; X)$とする. $\lambda > 0$

$$\frac{1}{\mathrm{meas}(\mathbb{T}^n)}\int_{\mathbb{T}^n}\|f(x)\|_X\,dx > \lambda$$

ならば,

$$\mathrm{meas}\{x;\ \|Tf(x)\|_Y > \lambda\} \leqq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_1(\mathbb{T}^n;X)}$$

は自明である. そうでないときは定理1のように立方体の列がとれる. 以下(a)と同様にして, 上の不等式を導くことができる. [証明終].

この定理と $L_p(\Omega,\mu;X)$ の共役空間が $L_{p'}(\Omega,\mu;X^*)$ (X^*はXの共役空間), 核 $H(x,x')$ の作用素の共役作用素は $H(x';x)^*$ を核とする作用素であること, 共役作用素のノルムはもとの作用素のノルムを越えないこと, および Hilbert 空間 X については $X^*=X$ となることを使って次の定理がわかる.

定理 3. X, Y を Hilbert 空間, $Q=\{x;\ |x_j|\leqq 1,\ j=1,2,\cdots n\}$ とする.

(a) $H(x,x')$ を $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上の $\mathcal{L}(X,Y)$ 値をとる可測函数で, (1) で定めた作用素 がL$_2(\mathbb{R}^n;X)$ から $L_2(\mathbb{R}^n;Y)$ への有界作用素であって, $x\neq x'$ のとき $H(x,x')$ は x および x' について微分可能で (2) および

$$(4)\quad \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{ess.\,sup}_{b>0,\ x} b\int_{\mathbb{R}^n\setminus(x+bQ)} \left\| \frac{\partial H}{\partial x_j}(x,x') \right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} dx' = \gamma' < \infty$$

が成立すれば, $1<p<\infty$ のとき T は $L_p(\mathbb{R}^n;X)$ から $L_p(\mathbb{R}^n;Y)$ への有界作用素である.

(b) $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{T}^n$ として (a) と同様な結果が成立する. ただし, (4) は

$$(5)\quad \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{ess.\,sup}_{b>0,\ y} b\int_{\mathbb{T}^n\setminus J(y+bQ)} \left\| \frac{\partial H}{\partial x_j}(J(y),x') \right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} dx' = \gamma' < \infty$$

でおきかえる.

(2) が成立する十分条件は

$$(6)\quad \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial H}{\partial x_j}(x,x') \right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqq \frac{C}{|x-x'|^{n+1}}$$

作用素 $\xi\mapsto\phi(t)\xi$ および作用素 $f(t)\mapsto\int f(t)\phi(t)d\mu$ の $\mathbb{C}$ から $L_p(\Omega,\mu)$ または $L_p(\Omega,\mu)$ から $\mathbb{C}$ への作用素としてのノルムはそれぞれ $\|\phi\|_{L_p(\Omega,\mu)}$, $\|\phi\|_{L_{p'}(\Omega,\mu)}$

であるから，X と Y を $\mathbb{C}$ または L_2^* とした特別の場合に定理 3 を書き換えると，

<u>定理 4.</u> (a) $K(t,x,x')$ を $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 上の可測函数で，$x\neq x'$ のとき x と x' について微分可能で，

(7) $$\left(\int_0^\infty |\operatorname{grad}_x K(t,x,x')|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2}\leqq\frac{C}{|x-x'|^{n+1}},$$

(8) $$\left(\int_0^\infty |\operatorname{grad}_{x'} K(t,x,x')|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2}\leqq\frac{C}{|x-x'|^{n+1}},$$

とする．作用素 T と S を

(9) $$(Tf)(t,x)=\int K(t,x,x')f(x')\,dx'$$

(10) $$(Su)(x)=\int_0^\infty\frac{dt}{t}\int K(t,x,x')u(t,x')\,dx'$$

で定義する．このとき，さらに，$T\in\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n);L_2(\mathbb{R}^n;L_2^*))$ ならば $1<p<\infty$ について $T\in\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n);L_p(\mathbb{R}^n;L_2^*))$ であり，$S\in\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n$ $1<p<\infty$ について，$S\in\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n;L_2^*),L_p(\mathbb{R}^n))$ である．

(b) $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{T}^n$ と換えて同様な結果が成立する．ただし，(7) と (8) の右辺の $|x-x'|$ は x と x' の $\mathbb{T}^n$ における距離と解釈する．

定理の中の条件のひとつである L_2 有界性を示すのに §1

と§2ではParsevalの等式を使ったが，一般の場合にはLions-Peetreらによる実補間の方法を使う．

§5. 一般の領域における積分表示.

われわれの見地から g-function に関するLittlewood-Paley理論は"定理4の仮定を満たす核による積分表示"と定式化できる．そして，このような積分表示は円錐条件を満たす領域について可能である．証明は[3]，[4]などを見ていただくことにして，結果だけを述べておく．

領域Ωが円錐条件を満たすとはΩの各点に対して，開きおよび高さが一定数以上の円錐でΩに含まれその点を頂点とするものがとれることを意味する．円錐の中心軸を示すベクトルを$\Psi(x)$で表わすと，このことは，"$\mathbb{R}^n$-値有界函数$\Psi(x)$と$0<t_0\leqq\infty$が存在して，

(1) $x\in\Omega$ $0\leqq t<t_0$ ならば $x+t\Psi(x)+tB\subset\Omega$

が成立する"と表現できる．ただし，$B=\{x;|x|\leqq 1\}$.

正数j_0をとり，$\Psi(x)$を$j_0\Psi(x)$，t_0をt_0/j_0でおき換えると，(1)の後半を $x+t\Psi(x)+j_0tB\subset\Omega$ とすることもできる．われわれはこの条件を少し強めて，$\Psi(x)$が$\mathbb{R}^n$上 Lipschitz 連続に作れることを仮定する．この仮

定と C_0^∞ 函数との合成積により，実は Ψ が C^∞ 級でそのすべての導函数が有界となるようにとれることがわかる．条件をゆるめて，" $\overline{\Omega}$ に局所有限な開被覆 $\{\Omega_\nu\}$ と上記の性質をもつ $\{\Psi_\nu\}$ がとれて，

$x \in \Omega_\nu \cap \Omega$，$0 \leq t < t_0$ ならば $x + t\Psi_\nu(x) + j_0 t B \subset \Omega$

が成立する" という仮定を満たす領域でも同様に論ずることができるが，簡単のため，以下では，Ψ が上記のようにとれると仮定しておく．

$\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，$(\omega \text{ の } \delta) \subset B$，$\int \omega(z)dz = 1$

に ω を選び，

(2) $\qquad \omega_1(x, z) = \omega(z + \Psi(x))$

とおく．正整数 m に対して

(3) $\qquad \omega_m(x, z) = \sum_{|\alpha| < m} \frac{1}{\alpha!} \partial_z^\alpha \{z^\alpha \omega_1(x, z)\}$

(4) $\qquad M(x, z) = \sum_{|\alpha| = m} \frac{m}{\alpha!} \partial_z^\alpha \{z^\alpha \omega_1(x, z)\}$

とおく．ただし，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は多重指数，$\alpha ! = \alpha_1 ! \cdots \alpha_n !$ $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$．$\partial_z^\alpha = \partial_{z_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{z_n}^{\alpha_n}$，$\partial_{z_j} = \partial/\partial z_j$ と書く．

$f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (Schwartz の distribution) とするとき，

(5) $\qquad U_m(t, x) = \langle t^{-n} \omega_m(x, \frac{x-y}{t}), f(y) \rangle_y$

と定義する．$\langle \, , \, \rangle$ は $\mathcal{D}'$ と $\mathcal{D}$ との duality を示

す. U_m は t と x の C^∞ 函数になる. ゆえに,

$$U_m(\varepsilon, x) = -\int_\varepsilon^a \left\{ t \frac{\partial U_m}{\partial t}(t,x) \right\} \frac{dt}{t} + U_m(a,x)$$

$t\dfrac{\partial U_m}{\partial t}$ を計算し, $\varepsilon \to 0$ とすると,

<u>定理5.</u> (積分表示 I). ω_m, M, U_m を (3), (4), (5) で定めると, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対して, $0 < a < t_0$ のとき

$$(6) \qquad f(x) = \int_0^a \langle t^{-n} M(x, \frac{x-y}{t}), f(y) \rangle_y \frac{dt}{t} + U_m(a,x).$$

である. ただし, 積分の意味は $[\varepsilon, a]$ 上の積分の $\mathcal{D}'$ の位相による $\varepsilon \to 0$ のときの極限と解釈する.

<u>系.</u> k, m を整数, $0 \leqq k \leqq m$, $m > 0$ とし, $|\beta| \leqq k$ について

$$(7) \quad M_\beta(x,z) = \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\gamma|=m-k} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \frac{k!(m-k)!}{(m-1)!\,\alpha!\,\gamma!} \partial_x^{\alpha-\beta} \partial_z^\gamma \left\{ z^{\alpha+\gamma} \omega_1(x,z) \right\}$$

とおく. ただし, $\binom{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$, $\alpha \geqq \beta$ (すべての j について $\alpha_j \geqq \beta_j$) でないとき $\binom{\alpha}{\beta} = 0$ とする. このとき $f \in \mathcal{D}'$ について

$$(8) \quad f(x) = \sum_{|\beta| \leqq k} \partial_x^\beta \int_0^a \langle t^{-n} M_\beta(x, \frac{x-y}{t}), f(y) \rangle_y\, t^k \frac{dt}{t} + U_m(a,x).$$

整数の組 l, h をとり, 上と同様な函数を作って, (8) を導き, それを (6) の右辺の f に代入すると,

定理 6. (積分表示 II). $0 \leqq k \leqq m$, $0 \leqq h \leqq l$, ω_m, M, M_β をそれぞれ (3), (4), (7) で定義し, k を h, m を l に代えて同じ式により ω_l, L, L_β を定義する. $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $|\alpha| = k$, $|\beta| \leqq h$, $0 < a < t_0$ に対して,

$$(9)\quad U^\alpha(s,x) = \sum_\gamma \binom{\alpha}{\gamma} s^{k-|\gamma|} \langle s^{-n} L^{(\alpha-\gamma,\gamma)}(x, \frac{x-y}{s}), f(y) \rangle_y$$

$$(10)\quad U_\beta(s,x) = \langle s^{-n} L_\beta(x, \frac{x-y}{s}), f(y) \rangle_y$$

$$(11)\quad u^\alpha(t,x) = \int_t^a t^k s^{-k} U^\alpha(s,x) \frac{ds}{s}$$

$$(12)\quad u_\beta(t,x) = \int_0^t t^{-h} s^h U_\beta(s,x) \frac{ds}{s}$$

$$(13)\quad f_\infty(x) = \langle a^{-n} \omega_l(x, \frac{x-y}{a}), f(y) \rangle_y, \quad f_\infty^{(\alpha)} = \partial_x^\alpha f_\infty$$

とおく. ただし, $K^{(\alpha,\beta)}(x,z) = \partial_x^\alpha \partial_z^\beta K(x,z)$. このとき,

$$(14)\quad f(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + F_4(x),$$

$$F_1(x) = \sum_{|\alpha|=k} \int_0^a \langle t^{-n} M_\alpha(x, \frac{x-y}{t}), u^\alpha(t,y) + t^k f_\infty^{(\alpha)}(y) \rangle_y \frac{dt}{t}$$

$$F_2(x) = \sum_{|\beta| \leqq h} \int_0^a \langle t^{-n} M^{(0,\beta)}(x, \frac{x-y}{t}), t^{h-|\beta|} u_\beta(t,y) \rangle_y \frac{dt}{t}$$

$$F_3(x) = \sum_{|\beta| \leqq h} \langle a^{-n} \omega_m^{(0,\beta)}(x, \frac{x-y}{a}), a^{h-|\beta|} u_\beta(a,y) \rangle_y$$

$$F_4(x) = \langle a^{-n}\omega_m\left(x, \frac{x-y}{a}\right), f_\infty(y) \rangle_y .$$

この積分表示に使われている積分核が定理4の条件を満たすことは次節で述べる.

実は, この積分表示は函数および超函数の微分可能性についてのL_p理論, いわゆるSobolev空間論とBesov空間論において重要な鍵となるものであって, それにより, たとえばfがBesov空間$B^{\sigma}_{p,q}(\Omega)$に属する必要十分条件は, $|\alpha| = k$, $|\beta| \leqq n$について,

$$t^{-\sigma} U^{\alpha}(t,x) \in L^{*}_{q}(I; L_p(\Omega)), \qquad I = [0, a]$$
$$t^{-\sigma} U_{\beta}(t,x) \in L^{*}_{q}(I; L_p(\Omega)),$$
$$f_\infty \in W_p^{k}(\Omega)$$

となることである. ただしW_p^kはk階までの導函数がすべてL_pに属する函数の全体を表す. U^α, U_βをu^α, u_βに代えてもよく, また$f_\infty \in W_p^k$は$f \in W_p^{-\infty} = \bigcup_{k \in Z} W_p^k$としてもよい. ただし, $f \in W_p^{-k}$ (k: 正整数) とは

$$(15) \qquad f = \sum_{|\alpha| \leqq k} \partial_x^{\alpha} f_\alpha , \qquad f_\alpha \in L_p(\Omega)$$

(σに応じて, k, m, l, nを適当に選ぶ)

と表現されることをいう. Sobolev空間のときは右辺の空間を$L_p(\Omega; L^{*}_{2}(I))$に代えて同様に特徴づけができる. 詳しくは[3], [4]を参照されたい.

Taibleson [6] は Hardy-Littlewood [1] Zygmund らの研究を $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{T}^n$ の場合に一般化して、Besov 空間 (= Lipschitz 空間) の理論を構成している。彼は Poisson 核や Gauss 核を使っているのであるが、われわれの見地からすると、この場合も Poisson 核や Gauss 核は、多少の便利さはあるにしても、特別の意義はないのである。

§ 6. 積分核の性質.

この項では積分核が定理4の条件をみたすための十分条件を与える。

<u>定理 7.</u>

$K(t, x, x')$ が $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の t について可測, x と x' について連続的微分可能な函数で, $\theta > 0$ として,

$$(1) \quad \left| \frac{\partial K}{\partial x_j}(t, x, x') \right| \leqq \frac{\varphi(t)}{t^{n+1}} \left(1 + \frac{|x - x'|}{t}\right)^{-n-\theta}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(2) \quad \left| \frac{\partial K}{\partial x'_j}(t, x, x') \right| \leqq \frac{\varphi(t)}{t^{n+1}} \left(1 + \frac{|x - x'|}{t}\right)^{-n-\theta}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

しかも φ は有界とする. さらに,

$$\begin{aligned}(3) \quad K(t, x, x') &= t \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial K_j}{\partial x_j}(t, x, x') \right\} + K_0(t, x, x') \\ &= t \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{K}_j}{\partial x'_j}(t, x, x') \right\} + \widetilde{K}_0(t, x, x'),\end{aligned}$$

と表現され，K_j，$\tilde{K}_j$ は (x, x') について有界連続で，

(4) $\displaystyle \operatorname*{ess.sup}_{t\in\mathbb{R}_+,\, x\in\mathbb{R}^n} \int |K_j(t,x,x')|\,dx' < \infty \quad (j=1,2,\cdots,n)$

(5) $\displaystyle \operatorname*{ess.sup}_{t\in\mathbb{R}_+,\, x'\in\mathbb{R}^n} \int |K_j(t,x,x')|\,dx < \infty \quad (\;\text{〃}\;)$

(6) $\displaystyle \operatorname*{ess.sup}_{t\in\mathbb{R}_+,\, x\in\mathbb{R}^n} \int |\tilde{K}_j(t,x,x')|\,dx' < \infty \quad (\;\text{〃}\;)$

(7) $\displaystyle \operatorname*{ess.sup}_{t\in\mathbb{R}_+,\, x'\in\mathbb{R}^n} \int |\tilde{K}_j(t,x,x')|\,dx' < \infty \quad (\;\text{〃}\;)$

(8) $\displaystyle \int_0^\infty \Big\{ \operatorname*{ess.sup}_{x} \int |K_0(t,x,x')|\,dx' \Big\}^2 \frac{dt}{t} < \infty,$

(9) $\displaystyle \int_0^\infty \Big\{ \operatorname*{ess.sup}_{x'} \int |K_0(t,x,x')|\,dx \Big\}^2 \frac{dt}{t} < \infty,$

(10) $\displaystyle \int_0^\infty \Big\{ \operatorname*{ess.sup}_{x} \int |\tilde{K}_0(t,x,x')|\,dx' \Big\}^2 \frac{dt}{t} < \infty,$

(11) $\displaystyle \int_0^\infty \Big\{ \operatorname*{ess.sup}_{x'} \int |\tilde{K}_0(t,x,x')|\,dx \Big\}^2 \frac{dt}{t} < \infty$

とする．このとき $K(t,x,x')$ は定理4の条件をみたし，したがって定理4の結論が成立する．

証明．条件 (1) と (2) から条件 (4.7) と (4.8) が導かれることは簡単な計算によりわかる．

L_2 有界性をまず．$f\in L_2(\mathbb{R}^n)$ に対して，定理9の表示（§7でます）をとる．それを代入すると，

$\int K(t,x,x')f(x')\,dx' = V(t,x) + W(t,x)$

ただし，

$$V(t,x)=\int_t^{\infty}\frac{ds}{s}\int K(t,x,x')\,u(s,x')\,dx',$$

$$W(t,x)=\int_0^{t}\frac{ds}{s}\int K(t,x,x')\,u(s,x')\,dx'.$$

定理9の後の注意で述べるように，$u(t,x)$ は x について連続で $|x|\to\infty$ で値が 0 に収束するから部分積分し，

$$V(t,x)=\int_t^{\infty}\frac{ds}{s}\int\Big\{t\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\tilde{K}_j}{\partial x'_j}(t,x,x')+\tilde{K}_0(t,x,x')\Big\}u(s,x')\,dx'$$

$$=-\int_t^{\infty}\frac{t}{s}\frac{ds}{s}\int\tilde{K}_j(t,x,x')\,s\,u^{(j)}(s,x')\,dx'$$

$$+\int_t^{\infty}\frac{ds}{s}\int\tilde{K}_0(t,x,x')\,u(s,x')\,dx'.$$

$$\Big(u^{(j)}=\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)$$

また，u の作り方から $\int_t^{\infty}u(s,x')\frac{ds}{s}=U_m(t,x')$.

$\tilde{K}_j(t,x,x')$ を核とする作用素を $\tilde{A}_j(t)$ で示すと，(6)，(7)，(10)，(11) により，$\|\tilde{A}_j(t)\|\leq C_j<\infty\ (j=1,\cdots,n)$，$\int\|\tilde{A}_0(t)\|^2\frac{dt}{t}\leq C_0<\infty$ である．ゆえに，

$$\|V(t,x)\|_{L_2}\leq C\Big\{\sum_{j=1}^{n}\int_t^{\infty}\frac{t}{s}\|s\,u^{(j)}(s,x)\|_{L_2}\frac{ds}{s}+\|\tilde{A}_0(t)\|\,\|f\|_{L_2}\Big\}$$

$$\in L_2^{*}.$$

ただし，$\|A\|$ は A の L_2 の作用素としてのノルムである．

同様に，条件 (2) と部分積分により

$$W(t,x)=-\sum_{j=1}^{n}\int_0^{t}\frac{s}{t}\frac{ds}{s}\int t\frac{\partial K}{\partial x_j}(t,x')\,u_j(s,x')\,dx'$$

は $L_2^*(\mathbb{R}_+ ; L_2(\mathbb{R}^n))$ に属することがわかる.

作用素

$$u(t,x) \longmapsto \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int K(t,x,x') u(t,x') dx'$$

が $L_2(\mathbb{R}^n ; L_2^*)$ から $L_2(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素になることは, $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ をとると, Fubini の定理により

$$\int \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int K(t,x,x') u(t,x') dx' \right\} \overline{g(x)} dx$$

$$= \int \frac{dt}{t} \int dx' \left\{ u(t,x') \overline{\int \overline{K(t,x,x')} g(x) dx} \right\}$$

となること, および, (1), (3), (4), (6) により $\overline{K(t,x',x)}$ が $K(t,x,x')$ と同様な性質をもつことから導き得られた結果により,

$$\left\| \int \overline{K(t,x,x')} g(x) dx \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n_{x'} ; L_2^*(\mathbb{R}_+))} \leqq C \|g\|_{L_2}$$

が成立することからわかる. [証明終]

<u>注意</u> 上の証明からわかるように, 条件 (4), (5), (6), (7) は, "K_j, $\tilde{K}_j$ $(j=1, \cdots, n)$ が L_2 から L_2 への有界な積分作用素を定める" とおきかえてよい.

§5 の $t^{-n} L^{(\alpha-\gamma,\gamma)}(x, (x-x')/t)$, $t^{-n} L_\beta(x, (x-x')/t)$, $t^{-n} M_\alpha(x, (x-x')/t)$, $t^{-n} M^{(0,\beta)}(x, (x-x')/t)$ がこの定理の条件をみたすことは容易にわかる. ただし, $a < \infty$ とし, $t \geqq a$ でこれらの核は 0 とする. たとえば, (5.7)

により，$M_\beta(x,z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j}\{M_{\beta,j}(x,z)\}$ の形であるから，

$$t^{-n} M_\beta\left(x, \frac{x-x'}{t}\right) = t\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{t^{-n} M_{\beta j}\left(x, \frac{x-x'}{t}\right)\right\} + t^{-n} M_{\beta 0}\left(x, \frac{x-x'}{t}\right)\right\}$$

ただし，$M_{\beta 0}(x,z) = -\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} M_{\beta j}(x,z)$.

u^α や u_β を定める核（(5.11) と (5.12) の核）については次の定理を使えばよい．

<u>定理 8.</u> $K(t,x,x')$ が定理 4 の条件を満たし，$\phi(t,s)$ が $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ 上の可測函数で

(12) $$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}_+} \int_0^\infty |\phi(t,s)| \frac{ds}{s} < \infty$$

(13) $$\operatorname*{ess.sup}_{s\in\mathbb{R}_+} \int_0^\infty |\phi(t,s)| \frac{dt}{t} < \infty$$

とする．このとき

(14) $$H(t,x,x') = \int_0^\infty \phi(t,s) K(s,x,x') \frac{ds}{s}$$

は定理 4 の条件をみたす．

証明．核 $\phi(t,s)$ の積分作用素が L_2^* の有界作用素であるから，$x \neq x'$ のとき

$$\| \operatorname{grad}_x H(t,x,x') \|_{L_2^*} \leqq C \,\| \operatorname{grad}_x K(t,x,x') \|_{L^2_*}$$

となり条件（4.7）を得る．条件（4.8）も同様．L_2有界性も明らかである．（証明終）

§7 $\mathbb{R}^n$の場合の積分表示．

$\mathbb{R}^n$の場合には $\Psi(x)=0$ にとればよい．また $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_n > 0\}$ のときは $\Psi(x)=(0,0,\cdots,1)$ にとればよい．このような場合に積分表示がかなり簡単になる．特に$\mathbb{R}^n$の場合について述べ，定理7の証明に使った事実の証明を与えておく．

$\Psi(x)=0$ であるから，ω_m, M などはzだけの函数である（5.7）に代入すると，$|\beta|=k$ のとき，

$$(1)\quad M_\beta(z) = \sum_{|\gamma|=m-k} \frac{k!\,(m-k)!}{(m-1)!\,\beta!\,\gamma!}\,\partial_z^\gamma\{z^{\beta+\gamma}\omega_1(z)\}$$

であり，$|\beta|<k$ のとき $M_\beta(z)=0$ となる．したがって（5.8）は $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ について

$$(2)\quad f(x) = \sum_{|\beta|=k}\partial_x^\beta \int_0^a \left\langle t^{-n} M_\beta\left(\frac{x-y}{t}\right), f(y)\right\rangle_y t^k \frac{dt}{t} + U_m(a,x),$$

$$(3)\quad U_m(t,x) = \left\langle t^{-n}\omega_m\left(\frac{x-y}{t}\right), f(y)\right\rangle_y$$

となる．また（5.9）は

$$(4)\quad U^\alpha(s,x) = \left\langle s^{-n} L^{(\alpha)}\left(\frac{x-y}{s}\right), f(y)\right\rangle_y$$

となる．ただし，$L^{(\alpha)}(z)=\partial_z^\alpha L(z)$．(5.14) は

$$(5)\quad f(x)=F_1(x)+F_2(x)+F_3(x)+F_4(x)$$

$$F_1(x)=\sum_{|\alpha|=k}\int_0^a\langle t^{-n}M_\alpha\left(\frac{x-y}{t}\right),u^\alpha(t,y)+t^k f_\infty^{(\alpha)}(y)\rangle_y\frac{dt}{t}$$

$$F_2(x)=\sum_{|\beta|=h}\int_0^a\langle t^{-n}M^{(\beta)}\left(\frac{x-y}{t}\right),u_\beta(t,y)\rangle_y\frac{dt}{t}$$

$$F_3(x)=\sum_{|\beta|=h}\langle a^{-n}\omega_m^{(\beta)}\left(\frac{x-y}{a}\right),u_\beta(a,y)\rangle_y$$

$$F_4(x)=\langle a^{-n}\omega_m\left(\frac{x-y}{a}\right),f_\infty(y)\rangle_y,$$

となる．

特に，$f\in W_p^{-m}(\mathbb{R}^n)$ (m：正整数)，$1\leq p<\infty$ とする．$f=\sum_{|\alpha|\leq m}\partial_x^\alpha f_\alpha$，$f_\alpha\in L_p$ と表わされるから，Hölder の不等式により

$$|U_m(t,x)|\leq\sum_{|\alpha|\leq m}t^{-n-|\alpha|}\left\{\int\left|\omega_m^{(\alpha)}\left(\frac{x-y}{t}\right)\right|^{p'}dy\right\}^{1/p'}\|f_\alpha\|_{L_p}$$

$$=\sum_{|\alpha|\leq m}C_\alpha\, t^{-|\alpha|-n/p}\|f_\alpha\|_{L_p}$$

$$\left(\frac{1}{p'}=1-\frac{1}{p}\right)$$

したがって $t\to\infty$ のとき $U_m(t,x)\longrightarrow 0$．ゆえに，積分表示で $a=\infty$，$U(\infty,x)=0$ にできる．(5) で f_∞ を省き，F_3，F_4 をとってよい．すなわち，(2.10) と同じ形になる．

われわれは出発点となる函数として，台が単位球に含まれる C^∞ 関数 ω をとったが，上の計算からわかるように，$f \in W_p^{-m}(\mathbb{R}^n)$ を表現するためには適当な階数までの導函数が $|x| \to \infty$ のときある速さで 0 に近づく函数を ω に選んでもよいことがわかる．

$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$，$1 \leqq p < \infty$ のとき (2) において，$k=0$，$a=+\infty$ にとると，

$$(6) \qquad f(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int t^{-n} M\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)\, dy$$

を得る．t についての積分は $\mathcal{D}'$ の位相で考えていたが，実は L_p の位相で収束する．まず，

$$\| U_m(t,x) - f(x) \|_{L_p}$$
$$= \left\| \int t^{-n} \omega_m\left(\frac{x-y}{t}\right) \{ f(y) - f(x) \} dy \right\|_{L_p}$$
$$\leqq \int |\omega_m(y)| \, \| f(x+ty) - f(x) \|_{L_p(\mathbb{R}^n_x)} \, dy,$$

ω_m の台が B に含まれ，$t \to 0$ のとき $y \in B$ について一様に，$\| f(x+ty) - f(x) \|_{L_p} \to 0$（$f$ の L_p-連続性）となるから，"L_p の位相で $t \to 0$ のとき $U_m(t,x) \to f(x)$" がわかる．

次に $F(x)$ で f の maximal function，すなわち，

$$F(x) = \operatorname*{ess\,sup}_{t>0} \frac{1}{t^n \operatorname{meas} B} \int_{tB} |f(x+y)|\,dy$$

とおくと，よく知られているように $F \in L_p(\mathbb{R}^n)$，しかも，

$$|U_m(t,x)| \leqq \int |t^{-n} \omega_m(\tfrac{y}{t}) f(x-y)|\,dy$$
$$\leqq C\,F(x),$$

既に示したように，各点で $t \to \infty$ のとき $U_m(t,x) \to 0$ であるから，Lebesgue の収束定理により，$t \to \infty$ のとき L_p の位相で $U_m(t,x) \to 0$ となることがわかる．すなわち (6) が L_p の位相の意味で成立する．

さて，$f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ とする．$m=2$ にとる．

$\omega_{jk}(z) = \omega(z)\cdot z_j\, z_k$，　$M_j(z) = \sum_{k=1}^n \partial_{z_k} \omega_{jk}(z)$

とおくと，$M(z) = \sum_{j=1}^n \partial_{z_j} M_j(z)$ となる．Fourier 変換を $\wedge$ をつけて表わすと，

$$\hat{M}(\xi) = \sum_{j=1}^n i\xi_j\, \hat{M}_j(\xi),$$
$$\hat{M}_j(\xi) = \sum_{k=1}^n i\xi_k\, \hat{\omega}_{jk}(\xi)$$

であって，$\hat{M}_j$，$\hat{\omega}_{jk}$ は共に $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$（急減少 C^∞ 関数）に属する．ゆえに Parseval の等式により

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \left| \int t^{-n} M\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)\, dy \right|^2 dx \frac{dt}{t}$$

$$\leqq \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \left| (\sqrt{2\pi})^n \hat{M}(t\xi)\, \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \frac{dt}{t} \leqq C^2 \|f\|_{L_2}^2$$

ただし，

$$\left(\int |\hat{M}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \leqq \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int |t\xi_j|^2 \cdot |\hat{M}_j(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}$$

$$\leqq C_1 \left\{ \int \left[t|\xi| (1+t|\xi|)^{-2} \right]^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}$$

$$= C_2$$

を用いた．同様に，

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \left| t \frac{\partial}{\partial x_j} \int t^{-n} M\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)\, dy \right|^2 dx \frac{dt}{t}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \left| (\sqrt{2\pi})^n\, i t\xi_j\, M(t\xi)\, \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \frac{dt}{t}$$

$$\leqq C^2 \|f\|^2.$$

また，

$$\int t^{-n} M\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)\, dy = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ t \int t^{-n} M_j\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)\, dy \right\}$$

であって，上と同じ計算により

$$\left\| \int t^{-n} M_j\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)\, dy \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n;\, L_2^*)} \leqq C \|f\|_{L_2}$$

以上により 次の定理を得る.

定理9. $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ のとき

(7) $f(x) = \int_0^\infty u(t, x) \frac{dt}{t}$ (L_2 の位相で),

(8) $t \frac{\partial u}{\partial x_j}(t, x) \in L_2(\mathbb{R}^n; L_2^*(\mathbb{R}_+))$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$

(9) $u(t, x) \in L_2(\mathbb{R}^n; L_2^*(\mathbb{R}_+))$

(10) $u(t, x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} u_j(t, x)$,

(11) $t^{-1} u_j(t, x) \in L_2(\mathbb{R}^n; L_2^*(\mathbb{R}_+))$

と表示できる. しかも各函数の $L_2(\mathbb{R}^n; L_2^*)$ ノルムは $C\|f\|_{L_2}$ で評価される.

注意. 上に構成した u, u_j などは実は (t, x) の C^∞ 級函数, しかも t を固定したとき, $|x| \to \infty$ とすると 0 に近づく.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $R > 0$ を

$$\int_{|x|>R} |f(x)|^2 dx < \varepsilon$$

にとれる. $|x| > R + t$ にとれば $x + tB$ は半径 R の球の外にあるから Schwarz の不等式により

$$\left|\int t^{-n} M\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)\, dy\right|$$
$$\leq \left(\int |t^{-n} M(\tfrac{y}{t})|^{p'} dy\right)^{1/p'} \left(\int_{tB} |f(x-y)|^p dy\right)^{1/p} \leq C t^{-n/p} \varepsilon,$$

$C = \| M(z) \|_{L_{p'}}$ となるからである．

また，作り方から

$$\int_t^\infty u(s, x) \frac{ds}{s} = U_m(t, x), \quad \| U_m(t, x) \|_{L_2} \leq C \| f \|_{L_2}$$

となっている． $C = \| W_m(z) \|_{L_1}$ である．

文献

[1]. Hardy, G. H. and Littlewood, J. E.: Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions: Quart. J. of Math (Oxford). 12 (1942). 221 – 256.

[2] Littlewood, J. E. and Paley, R. E. A. C.; Theorems on Fourier series and power series (II). Proc. London Math. Soc. (2) 42 (1937), 52 – 89.

[3] Muramatu, T.; On Besov spaces of functions defined in general regions: Publ. RIMS., Kyoto Univ., 6 (1970) 515 – 543.

[4] Muramatu, T.; On Besov spaces and Sobolev spaces of generalized functions defined on a general region: Publ. RIMS., Kyoto Univ., 9 (1974). 325 – 396.

[5]. Stein, E. M.: Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press. Princeton, New Jersey. 1970.

[6]. Taibleson, M. H.; On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space.
(I). J. Math. Mech. 13 (1964), 407～480.
(II) (") 14 (1965), 821-840:
(III) (") 15 (1966), 974-981.