数理解析研究所講究録
第 451 巻 1982 年 187-206

Dirichlet algebra の周辺

茨城大 理　　荷見 守助

1. 序. Fourier解析の複素解析的方法と函数環論の関聯を示す興味深い研究として，Varopoulos による Garnett-Jones の定理の精密化の仕事を紹介する．これは確率論的手法の有効性を示してゐる点で独立の興味もある．

2. Martingale と BMO. 準備として確率論からいくつかの結果を引用する．$(\Omega_n, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ を n 次元 Brown 運動の空間とする．Ω_n は $\mathbb{R}^1$ 上の 0 から出発する連続な path $b_1(t), \cdots, b_n(t)$, $t \geq 0$, の組 $b(t) = (b_1(t), \cdots, b_n(t))$ の全体で，Ω_n のすべての筒集合から生成された σ-加法族を $\mathcal{E}$, $b_1, \cdots, b_n$ が独立になる様な $\mathcal{E}$ 上の Gauss 型の確率測度を $\mathbb{P}$ とする．但し $b_1, \cdots, b_n$ は平均 0，分散 1 を持つものとしておく．$t \geq 0$ に対し $\mathcal{E}_t$ により $b_j(s)$ $(s \leqq t;\ j = 1, \cdots, n)$ から生成された σ-加法族を表はせば，$\mathcal{E} = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{E}_t$ となる．そして我々は $\mathbb{B}_n =$

$(\Omega_n; \mathcal{E}; \mathcal{E}_t\ (t \geqq 0); \mathbb{P})$と書いて$n$次元Brown運動と呼ぶ.

確率空間$(\Omega_n, \mathcal{E}, \mathbb{P})$上の確率過程$X = (X_t)_{t\geqq 0}$が二条件(i) X_tはΩ_n上の$\mathcal{E}_t$-可測な可積分函数,(ii)任意の$0 \leqq s < t$に対し$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{E}_s] = X_s$ a.e. を満たす時$\mathbb{B}_n$-martingaleと呼ぶ.但し$\mathbb{E}[\ \mid \mathcal{E}_t]$は$\sigma$-加法族$\mathcal{E}_t$に関する条件付期待値を表はす。更にこの$X$が$\sup_t \mathbb{E}[|X_t|^2] < +\infty$を満たす時,$L^2$有界であると云ふ.この場合基本的なのは次の表現定理である.

定理 2.1. (i) $X = (X_t)$をL^2有界な$\mathbb{B}_n$-martingaleとすれば$X_\infty \in L^2(\Omega_n)\ (= L^2(\Omega_n, \mathcal{E}, \mathbb{P}))$が存在して

$$X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t \quad \text{a.e.},$$

$$\sup_t \mathbb{E}[|X_t|^2] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[|X_t|^2] = \mathbb{E}[|X_\infty|^2],$$

$$X_t = \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{E}_t] \quad \text{a.e.}$$

が成立つ.しかも,$\mathrm{L} \mapsto X_\infty$は$L^2$有界な$\mathbb{B}_n$-martingaleから$L^2(\Omega)$の上への一対一対応である.

(ii) $X = (X_t)$がL^2有界な$\mathbb{B}_n$-martingaleならば,複素数値のnonanticipatingなBrown汎函数$\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t)$が一意に存在し

$$(1) \qquad X_t = X_0 + \sum_{j=1}^n \int_0^t \lambda_j(t)\, db_j(t).$$

且つ

$$(2) \qquad \mathbb{E}\left[\int_0^\infty |\lambda_j(t)|^2 dt\right] < +\infty, \qquad j = 1, \cdots, n$$

が成立つ.(1)の右辺は伊藤の意味の確率積分である.逆に,(1),(2)で定義される確率過程(X_t)はL^2有界な$\mathbb{B}_n$-martingale

である。

L^2有界な$\mathcal{B}_n$-martingale $X=(X_t)_{t\geq 0}$に対し，X_∞の代りにXと書くこともある。さて(1)で表はされるmartingale Xに対し$S(X)^2=\sum_{j=1}^n\int_0^\infty|\lambda_j(t)|^2dt$とおく。この時

$$(3)\qquad \mathbb{E}[|X-X_0|^2]=\sup_t \mathbb{E}[|X_t-X_0|^2]=\mathbb{E}[S(X)^2].$$

定義 2.2. $X\in L^2(\Omega_n)$が$BMO(\Omega_n)$であるとは，

$$(4)\qquad \|X\|_{BMO}^2:=\sup_t\|\mathbb{E}[|X-X_t|^2|\mathcal{E}_t]\|_\infty<+\infty$$

なる事を云ふ。但し$X_t=\mathbb{E}[X|\mathcal{E}_t]$とする。

この時，John-Nirenbergの補題に相当する次の結果がある。

定理 2.3. $X\in BMO(\Omega_n)$ならば，$\alpha>0$が存在して

$$(5)\qquad \sup_t\|\mathbb{E}[e^{\alpha|X-X_t|}|\mathcal{E}_t]\|_\infty<+\infty.$$

次に$W\in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega_n)$，$W\geq 0$，を考へる。この$W$が$(A_p)$条件（但し$1<p<\infty$）を満足するとは

$$(A_p)\qquad \sup_t\|\mathbb{E}[W|\mathcal{E}_t](\mathbb{E}[W^{-1/(p-1)}|\mathcal{E}_t])^{p-1}\|_\infty<+\infty$$

が成立つ事を云ふ。特に(A_2)は上の(5)と密接な関聯がある。

補題 2.4. $W\in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega_n)$，$W\geq 0$，に対し$W=e^f$（$f$は実数値函数）とおく。この時，$W$が$(A_2)$を満たす為の必要充分条件は，$f\in L^1(\Omega_n)$で且つ

$$\sup_t\|\mathbb{E}[e^{|f-f_t|}|\mathcal{E}_t]\|_\infty<+\infty$$

となる事である。但し$f_t=\mathbb{E}[f|\mathcal{E}_t]$.

条件(A_2)を満たす重みWについては次が成立つ。

定理 2.5. $W \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega_n)$, $W \geqq 0$, が (A_2) を満たせば，定数 C, $c > 0$ が存在して，すべての $X \in L^2(\Omega_n)$, $\mathbb{E}[X] = 0$, に対して

$$c\,\mathbb{E}[|X|^2 W] \leqq \mathbb{E}[S(X)^2 W] \leqq C\,\mathbb{E}[|X|^2 W].$$

3. 正則な Martingale と $H^p(\Omega_{2m})$. こゝでは $2m$ 次元の $\mathbb{B}_{2m}$-martingale を考へる．記号上の便宜から

$$x_j(t) = b_{2j-1}(t), \quad y_j(t) = b_{2j}(t) \qquad j = 1, \cdots, m$$

$$z_j(t) = x_j(t) + i y_j(t), \quad \bar{z}_j(t) = x_j(t) - i y_j(t)$$

と書く．また

$$dz_j = dx_j + i\,dy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - i\,dy_j$$

とおく．これらの右辺は確率微分の意味である．

定義 3.1. $1 \leqq p \leqq \infty$ に対し，$f \in L^p(\Omega_{2m})$ が正則であるとは，f から定義された $\mathbb{B}_{2m}$-martingale $f_t = \mathbb{E}[f \mid \mathcal{E}_t]$ が

(6) $$f_t = f_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j\, dz_j$$

なる確率積分表示を持つ事を云ふ．正則な $f \in L^p(\Omega_{2m})$ の全体を $H^p(\Omega_{2m})$ と書く．

定理 3.2. $H^\infty(\Omega_{2m})$ は $L^\infty(\Omega_{2m})$ の汎弱閉部分環であり，次の意味で strongly logmodular である．即ち，任意の $\Phi \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega_{2m})$ に対し $\varphi \in H^\infty(\Omega_{2m})$ が存在して $\varphi^{-1} \in H^\infty(\Omega_{2m})$ 且つ $\Phi = \log|\varphi|$.

これを示す為には多少の準備を要する．先づ

定理 3.3. $f \in L^2(\Omega_{2m})$ が正則なる為の必要充分条件はすべての $g \in H^2_0(\Omega_{2m})$ $(= \{h \in H^2(\Omega_{2m}) : \mathbb{E}[h] = 0\}$ に対して $\mathbb{E}[fg] = 0$ を満たす事である。従って $H^2(\Omega_{2m})$ と $H^2_0(\Omega_{2m})$ は $L^2(\Omega_{2m})$ の閉部分空間で，$L^2(\Omega_{2m}) = H^2(\Omega_{2m}) \oplus \overline{H^2_0(\Omega_{2m})}$ (直交分解).

証明. $f \in L^2(\Omega_{2m})$ と $g \in H^2_0(\Omega_{2m})$ を任意に取り，確率積分表示をする：

$$f_t = f_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j\, dz_j + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j'\, d\bar{z}_j$$
$$g_t = \sum_{j=1}^m \int_0^t \beta_j\, dz_j.$$

この時，$h_t := f_t \cdot g_t$ は伊藤の補題により確率積分であり，対応する微分は $dh = g \cdot df + f \cdot dg + df \cdot dg$ で与へられる。こゝで

$$df \cdot dg = \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j\, dz_j + \sum_{j=1}^m \alpha_j'\, d\bar{z}_j\right)\left(\sum_{j=1}^m \beta_j\, dz_j\right)$$
$$= 2\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j' \beta_j\right) dt.$$

$h_0 = f_0 \cdot g_0 = 0$ であるから，

$$\mathbb{E}[fg] = \mathbb{E}[h] = \lim_t \mathbb{E}[h_t] = \lim_t \mathbb{E}\left[\int_0^t dh\right]$$
$$= \lim_t \mathbb{E}\left[\int_0^t g\,df + f\,dg + df \cdot dg\right]$$
$$= \lim_t \mathbb{E}\left[2\int_0^t \sum_{j=1}^m \alpha_j' \beta_j\, dt\right]$$
$$= 2\,\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \sum_{j=1}^m \alpha_j' \beta_j\, dt\right]$$

従って，もし $f \in H^2(\Omega_{2m})$ ならば $\alpha_j' = 0$ であるから $\mathbb{E}[fg] = 0$. 亦逆にすべての $g \in H^2_0(\Omega_{2m})$ に対して $\mathbb{E}[fg] = 0$ ならば，$\beta_j = \bar{\alpha}_j'$ とおくことにより $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \sum_{j=1}^m |\alpha_j|^2 dt\right] = 0$ とな

り $\int_0^\infty |\alpha_j'|^2 dt = 0$ a.e. 故に $f_t = f_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j dz_j$ で、f が正則である事が分かった。(終)

<u>定理 3.4.</u> $H^\infty(\Omega_{2m}) = H^2(\Omega_{2m}) \cap L^\infty(\Omega_{2m})$. 従って $H^\infty(\Omega_{2m})$ は $L^\infty(\Omega_{2m})$ で汎弱閉である。

証明. 前定理から直ちに得られる。

<u>定義 3.5.</u> $L^2(\Omega_{2m})$ 上の共軛作用素（或は Hilbert 変換）H を次式で定義する： $u \in L^2(\Omega_{2m})$ を

$$u_t = u_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j dx_j + \sum_{j=1}^m \int_0^t \beta_j dy_j$$

と表はす時, $v = Hu$ を

$$v_t = -\sum_{j=1}^m \int_0^t \beta_j dx_j + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j dy_j$$

で定める。

この時は, $\mathbb{E}[Hu] = 0$ 且つ

$$\|Hu\|_2^2 = \mathbb{E}[|Hu|^2] = \mathbb{E}[\sum_{j=1}^m \int_0^\infty (|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2) dt]$$

$$= \mathbb{E}[|u - u_0|^2] = \|u - u_0\|_2^2 .$$

更に, 直接の計算により次も分かる。

(7) $\qquad u \in L^2(\Omega_{2m}) \implies u + iHu \in H^2(\Omega_{2m}).$

<u>補題 3.6.</u> D を平面 $\mathbb{C}$ の開部分集合とし, $f \in H^2(\Omega_{2m})$ は殆んどすべての $\omega \in \Omega_{2m}$ に対し

$$f_t(\omega) \in D, \quad 0 \leq t < +\infty,$$

を満たすものと仮定する。亦 $F(\zeta)$ は $\mathbb{C}$ 上で C^2級であり且つ D 上では正則なものとする。この時, 或 p $(1 \leq p \leq \infty)$ に対

し $F\circ f\in L^p(\Omega_{2m})$ ならば，$F\circ f\in H^p(\Omega_{2m})$ であって，すべての $t\geqq 0$ に対して $\mathbb{E}[F\circ f\mid \mathcal{E}_t]=F(f_t)$ a.e. が成立つ.

証明は積分表示による.

<u>定理 3.2 の証明.</u> $H^\infty(\Omega_{2m})$ が $L^\infty(\Omega_{2m})$ の汎弱閉部分空間なる事は既に示した。次に $f,g\in H^\infty(\Omega_{2m})$ に対し

$$df=\alpha\,dz\,,\quad dg=\beta\,dz$$

なる nonanticipating な汎函数 α,β が存在するから，伊藤の補題により

$$d(fg)=f\,dg+g\cdot df+df\cdot dg=(f\beta+g\alpha)\,dz$$

を得るので，fg も正則であることが分った。従って $fg\in H^\infty(\Omega_{2m})$. 一方 $\Phi\in L^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega_{2m})$ を任意に取ると，$\Phi\in L^2_{\mathbb{R}}(\Omega_{2m})$ でもあるから (7) により $\Phi+iH\Phi\in H^2(\Omega_{2m})$. そこで $F(\zeta)=\exp\zeta$ として補題 3.6 を適用すると，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し $F(t(\Phi+iH\Phi))\in L^\infty(\Omega_{2m})$ より，$F(t(\Phi+iH\Phi))\in H^\infty(\Omega_{2m})$. 従って $\varphi=F(\Phi+iH\Phi)$ とおけば，$\varphi\in H^\infty(\Omega_{2m})$ 且つ $\varphi^{-1}=F(-(\Phi+iH\Phi))\in H^\infty(\Omega_{2m})$. 更に定義から $\Phi=\log|\varphi|$ となり. 定理 3.2 が証明された.

4. 確率論的 Helson-Szegö 定理と Garnett-Jones 定理. M を compact 空間とし，M 上の複素数値連続函数全体の成す Banach 環とする. norm は普通の sup-norm とする. さて，

$C(M)$ の閉部分環 A が M の点を分離し且つすべての定数函数を含む時，A を M 上の函数環と呼ぶ。更にもし $\{\log|f| : f, f^{-1}\in A\}$ が $C_{\mathbb{R}}(M)$ で稠密ならば，A を logmodular 環と呼ぶ。以下ではこれも仮定する。

先づ，M 上の確率測度 μ で

$$\int_M f\cdot g\, d\mu = \int_M f\, d\mu \cdot \int_M g\, d\mu\,, \qquad \forall f, g\in A$$

を満たすもの（即ち A の表現測度）を一つ固定する．そして

$$H^2(\mu) = A \text{ の } L^2(\mu) \text{ での閉包},$$
$$H^2_0(\mu) = \{f\in H^2(\mu) : \int_M f\, d\mu = 0\}$$

とおくと，

$$L^2(\mu) = H^2(\mu) \oplus \overline{H^2_0(\mu)}\ ;$$
$$\mathrm{Re}\, H^2(\mu) = L^2_{\mathbb{R}}(\mu)\ ;$$
$$H^\infty(\mu) = H^1_0(\mu)^\perp = H^2(\mu)\cap L^\infty(\mu)$$

等が成立つ．特に，任意の $u\in L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$ に対し $f\in H^2(\mu)$ を

$$u = \mathrm{Re}\, f \quad \text{且つ} \quad \int_M u\, d\mu = \int_M f\, d\mu$$

なる様に一意に取る事が出来る．この f を用みて u の共軛 ${}^*u$ を ${}^*u = \mathrm{Im}\, f$ と定義する．従って任意の $u\in L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$ に対し

$${}^*u \in L^2_{\mathbb{R}}(\mu),\quad \int_M {}^*u\, d\mu = 0,\quad u + i\,{}^*u \in H^2(\mu).$$

この共軛作用素 $u \longmapsto {}^*u$ の連続性に関する次の定理は，古典的な Helson－Szegö 定理の抽象化で，本質的には大野［3］による（具体的な証明は［4］参照）．

定理 4.1. A を compact 空間 M 上の logmodular 環とし，μ を A の表現測度とする．亦 ν を M 上の正測度とし，その μ に関する Lebesgue 分解を

$$d\nu = W\,d\mu + d\nu_s$$

とする．こゝで $W \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$，$W \geq 0$，であり，$\nu_s$ は μ に関して特異な正測度である．この時次の命題は同値である：

(i) 定数 $C > 0$ が存在して

$$\int_M |{}^*u|^2 d\mu \leqq C \int_M |u|^2 d\mu, \qquad \forall u = \mathrm{Re} f,\ f \in A.$$

(ii) $\nu_s = 0$ 且つ $W = e^{v + {}^*w}$，但し $v, w \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mu)$ で $\|w\|_\infty < \pi/2$.

この結果を $H^\infty(\Omega_{2m})$ の場合に翻訳する．先づ $L^\infty(\Omega_{2m})$ に Gelfand 変換を施すと，或 compact 空間 $\mathfrak{M}$ 上の Banach 環 $C(\mathfrak{M})$ に等距離同型になることに注意する．この変換による $H^\infty(\Omega_{2m})$ の像を $\mathfrak{A}$ とすれば，これは空間 $\mathfrak{M}$ 上の函数環になる事が容易に分かる．即ち

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(\Omega_{2m}) & \longrightarrow & C(\mathfrak{M}) \\ \cup & & \cup \\ H^\infty(\Omega_{2m}) & \longrightarrow & \mathfrak{A} \end{array}$$

更に確率測度 $\mathbb{P}$ をこの対応で $\mathfrak{M}$ 上に移し μ とおくと，これは $\mathfrak{A}$ の表現測度となる．しかも定理 3.2 を $\mathfrak{M}$ 上へ移して考へれば，$\mathfrak{A}$ が logmodular（実は strongly logmodular）である事が分かる．従って定理 4.1 から次の結果が導かれる．

定理 4.2. $W = e^f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega_{2m})$ （但し f は実数値函数）とする時，次は同値である：

(i) W は条件 (A_2) を満たす；

(ii) $f = \varphi + H\psi$，但し $\phi, \psi \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega_{2m})$ で $\|\psi\|_\infty < \pi/2$；

(iii) 正数 $C > 0$ が存在して

$$\mathbb{E}[|Hg|^2 W] \leqq C\,\mathbb{E}[|g|^2 W], \qquad \forall g \in L^\infty(\Omega_{2m}).$$

証明. Gelfand 変換により共軛変換 H は Q 上の共軛変換* に転換されるから，(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) は定理 4.1 から直ぐ分かる．

(i) $\Rightarrow$ (iii). W が条件 (A_2) を満たせば定理 2.5 により，

$$c_1\,\mathbb{E}[|X|^2 W] \leqq \mathbb{E}[S(X)^2 W] \leqq c_2\,\mathbb{E}[|X|^2 W] \tag{8}$$

がすべての $X \in L^2(\Omega_{2m})$，$\mathbb{E}[X] = 0$，に対して成立つ様な正数 $c_1, c_2 > 0$ が存在することが分かる．さて，$g \in L^\infty(\Omega_{2m})$ に対し

$$g_t = g_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j\,dx_j + \sum_{j=1}^m \int_0^t \beta_j\,dy_j$$

と表はす時．

$$S(Hg)^2 = \int_0^\infty \sum_{j=1}^m (|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2)\,dt = S(g)^2$$

であるから，(8) より

$$\mathbb{E}[|Hg|^2 W] \leqq c_1^{-1}\,\mathbb{E}[S(Hg)^2 W] = c_1^{-1}\,\mathbb{E}[S(g)^2 W] \leqq c_1^{-1} c_2\,\mathbb{E}[|g$$
$$\leqq c_1^{-1} c_2\,\mathbb{E}[|g|^2 W]$$

となり，(iii) が成立つ事が分かる．

(ii) $\Rightarrow$ (i). 補題 2.4 を見れば，$f = H\psi$，$\|\psi\|_\infty < \pi/2$ に対

して $\sup_t \|\mathbb{E}[e^{|f-f_t|} \mid \mathcal{E}_t]\|_\infty < +\infty$ を示せば充分であることが分かる．さて $0 \leqq \alpha < \pi/2$ として函数

$$F(\xi) = 2 - e^{i\alpha\xi} - e^{-i\alpha\xi}$$

を考へると，簡単な図形上の考察から

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{Re}\, F(z) \leqq 2 - e^{\alpha|y|}\cos\alpha, \qquad -1 < \mathrm{Re}\, z < 1$$

$$F(x) \geqq 0, \qquad -1 < x < 1.$$

そこで $t \geqq 0$ を固定して，$g = (\psi - \psi_t + \psi_0) + i(f - f_t)$ とおけば，$g \in H^2(\Omega_{2m})$ 且つ $\mathbb{E}[g \mid \mathcal{E}_t] = \psi_0$．従って $\|\psi\|_\infty < \alpha < \pi/2$ に対して $\alpha^{-1} g$ を考へれば，Gamelin [5，定理 7.9] より $\mathbb{E}[e^{|f-f_t|}] \leqq 2/\cos\alpha$ が得られる．依って $F(\alpha^{-1}g) \in L^1(\Omega_{2m})$ となり，補題 3.6 により $F(\alpha^{-1}g) \in H^1(\Omega_{2m})$ 且つ

$$\text{(10)} \qquad \mathbb{E}[F(\alpha^{-1}g) \mid \mathcal{E}_t] = F(\alpha^{-1}\mathbb{E}[g \mid \mathcal{E}_t]) = F(\alpha^{-1}\psi_0) \geqq 0 \quad \text{a.e.}$$

一方 (9) より

$$2 - e^{|f-f_t|} \geqq \mathrm{Re}\,(F(\alpha^{-1}g))$$

だから，(10) を使って $\mathbb{E}[e^{|f-f_t|} \mid \mathcal{E}_t] \leqq 2/\cos\alpha$.　(終)

次に $f \in \mathrm{BMO}(\Omega_{2m})$ を考へる．定理 2.3 により

$$\sup_{t \geqq 0} \|\mathbb{E}[e^{\alpha|f-f_t|} \mid \mathcal{E}_t]\|_\infty < \infty$$

なる $\alpha > 0$ が存在する．補題 2.4 によれば，この α に対し函数 αf は (A_2) 条件を満たす事が分かる．従って前定理の (ii) により $\alpha f = \varphi + H\psi$ なる $\varphi, \psi \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega_{2m})$，$\|\psi\|_\infty < \pi/2$，が存在する．これから

$$\|f-\alpha^{-1}\varphi\|_{BMO}=\alpha^{-1}\|H\psi\|_{BMO}\leqq\alpha^{-1}\|\psi\|_{BMO}\leqq\alpha^{-1}\|\psi\|_\infty<\pi/2\alpha.$$

こゝで $\mathbb{E}[(\psi-\psi_t)^2|\mathcal{E}_t]=\mathbb{E}[\psi^2|\mathcal{E}_t]-\psi_t^2\leqq\mathbb{E}[\psi^2|\mathcal{E}_t]\leqq\|\psi\|_\infty^2$ a.e. を用ゐた．依って次の定理を得る．

<u>定理 4.4.</u> $f\in BMO(\Omega_n)$ に対し (5) を満たす α の上限を α_0 とすれば，

$$\inf_{\varphi\in L^\infty(\Omega_n)}\|f-\varphi\|_{BMO}\leqq\pi/2\alpha_0.$$

証明．$n=2m$ の場合は既に示した．しかもこの場合 α_0 は最良である．$n=2m+1$ の時は $BMO(\Omega_{2m+1})$ を $BMO(\Omega_{2m+2})$ の中へ自然に埋め込み，$2m+2$ 次元の結果を適用すればよい。

5．実解析への応用 —— Garnett-Jones 定理の精密化．記述を多少簡単にする為に，1次元で考へる．$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ が $BMO(\mathbb{R})$ に属するとは

$$\|f\|_*=\sup_I\frac{1}{|I|}\int_I|f-f_I|\,dx<+\infty$$

が成立つ事を云ふ。但し，I は $\mathbb{R}$ 上の有限区間で，$|I|$ はその長さを表は，f_I は f の I 上に於ける平均である．一方 $\mathbb{T}$ を単位円周とする時，$f\in L^1(\mathbb{T})\ (=L^1(\mathbb{T},\frac{1}{2\pi}d\theta))$ が $BMO(\mathbb{T})$ に属するとは，

$$\|f\|_*=\sup_J\frac{1}{|J|}\int_J|f-f_J|\,d\theta<+\infty$$

なる事を云ふ。こゝで J は $\mathbb{T}$ 上の区間，$|J|$ はその長さ，f_J は J 上に於ける f の平均を表はす．$BMO(\mathbb{R})$ と $BMO(\mathbb{T})$ は夫々

$\|f\|_*$ 及び $\|f\|_* + \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$ を norm として Banach 空間をなすことが知られる。一般に $\mathbb{R}^n$ 及び n 次元超球面 Σ_n についても同様の定義が出来る。これらについては常に

$$L^\infty \subset \mathrm{BMO}$$

であるが，等号は成立しない。標記の Garnett - Jones 定理は任意の $f \in \mathrm{BMO}$ から L^∞ への BMO-距離の評価を与えるものである。

定理 5.1. $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\sup_I \frac{1}{|I|}\int_I e^{\alpha|f-f_I|}\,dx < +\infty$$

を満たす $\alpha > 0$ の上限を $\alpha_0 = \alpha_0(f)$ とすれば

$$\frac{C_2}{\alpha_0} \leqq \inf_{g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f-g\|_* \leqq \frac{C_1}{\alpha_0}.$$

但し，C_1，$C_2 > 0$ は次元 n にのみ依る定数である。

問題はこの定数 C_1，C_2 の最良値を求めることである。この為に，$\mathbb{R}^n$ 及び Σ_n を夫々半空間 $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x_1, \cdots, x_n, y) : y > 0\}$ 及び $n+1$ 次元超球 $\mathbb{B}_{n+1} = \{(\xi_1, \cdots, \xi_{n+1}) : \xi_1^2 + \cdots + \xi_{n+1}^2 < 1\}$ の境界とみなす。この時，$\mathbb{R}^{n+1}_+$ と $\mathbb{B}_{n+1}$ は等角写像

$$\xi_j = \frac{2x_j}{x_1^2+\cdots+x_n^2+(y+1)^2}, \quad j=1, \cdots, n,$$

$$\xi_{n+1} = \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2+y^2-1}{x_1^2+\cdots+x_n^2+(y+1)^2}$$

で互に写され，$\mathbb{R}^n$ 及び Σ_n 上の BMO は夫々 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 及び $\mathbb{B}_{n+1}$ への調和な拡大（Poisson 積分）で特徴づけられる事と，調和性

は等角写像で保存される事を注意すると，$BMO(\mathbb{R}^n)$ と $BMO(\Sigma_n)$ が同型になる事が分かる．従って，5.1を証明するには Σ_n の上でのみ考察を行へばよい．しかし，最良の定数を出すには BMO の norm として何を採用すれば都合がよいかを考へる必要もある．

再び $n=1$ として話を進める．Σ_n 上の BMO と martingale 式の BMO を結びつける為に平面 $\mathbb{C}$ 上の Brown 運動を考へる．各 $a \in \mathbb{C}$ に対し a を始点とする $\mathbb{C}$ 内の連続な path の全体を Ω^a とし，$\tilde{\Omega} = \bigcup_a \Omega^a$ とおく．特に Ω^0 は第2節で定義した Ω_2 と同じものである．従って Ω_2 上の σ-加法族 $\mathcal{E}$ と確率測度 $\mathbb{P}$ をそのまゝ Ω^0 に移して $\mathcal{E}^0$, $\mathbb{P}^0$ と書く．更に $\mathcal{E}_t$ の代りに $\mathcal{E}_t^0$ と書く．次に任意の $a \in \mathbb{C}$ $(a \neq 0)$ については path $\omega \in \Omega^a$ の始点を原点へ平行移動する事により，Ω^a と Ω^0 を対応づけ，これによって Ω^a 上に σ-加法族 $\mathcal{E}^a$ と確率測度 $\mathbb{P}^a$ を導入する．更に形式上 $\tilde{\mathcal{E}} = \bigvee_a \mathcal{E}^a$ とおき，$\mathbb{P}^a$ は $\tilde{\mathcal{E}} \setminus \mathcal{E}^a$ では 0 であるとする．

さて，$t \geqq 0$ に対し，対応 $\theta_t : \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}$ を $[\theta_t(\omega)]_s = \omega_{t+s}$ で定義する．但し，ω_s は path $\omega \in \tilde{\Omega}$ の時刻 s に於ける位置を表はす．更に第3節の記法により

$$z(t) = z_t(\omega) = b_1(t) + i b_2(t), \quad \omega = (b_1, b_2) \in \Omega^0$$

と定義する．この時，$\tilde{\Omega}$ 上の有界な Borel 可測函数 G に対し

(10) $$\mathbb{E}^0[G(\theta_t(\omega))\,|\,\mathcal{E}_t^0] = \mathbb{E}^a[G(\omega)]\ ,\quad a = z_t\ ,\ \mathbb{P}^0\text{-a.e.}$$

が成立つ．

尚，集合 $\{\zeta\in\mathbb{C} : |\zeta|\geqq 1\}$ の hitting time を T と書く．即ち

$$T(\omega) = \inf\{t>0 : |\omega_t|\geqq 1\}.$$

この時 $\{T\geqq t\}$ 上で

(11) $$t + T(\theta_t(\omega)) = T(\omega)$$

が成立つ．さて作用素 $M : C(\mathbb{T}) \to L^\infty(\Omega_2, \mathbb{P})$，$N : L^1(\Omega_2)\to L^1(\mathbb{T})$ を定義しよう．先づ

$$Mf = X\ ;\quad X(\omega) = f(z_{T(\omega)}(\omega))\ ,\qquad \forall f\in C(\mathbb{T})$$

とおく．角谷の定理により，写像 $\omega\longrightarrow z_{T(\omega)}(\omega)$ は Ω_2 上の測度 $\mathbb{P}=\mathbb{P}^0$ を $\mathbb{T}$ 上の測度 $\frac{1}{2\pi}d\theta$ に写すから，$\|Mf\|_{L^p(\Omega_2)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ $(f\in C(\mathbb{T}))$ を得る．次に，u を単位閉円板 $\mathbb{D}$ 上で連続，$\mathbb{D}^\circ$ 上で調和な函数として

$$X = M(u|_{\mathbb{T}})$$

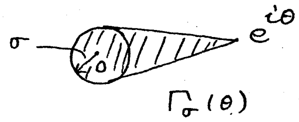
とおく．この時は，角谷の定理により $\{u(z(T\wedge t))\}_{t\geqq 0}$ が $\mathcal{B}_2$-martingale になる事から，

$$X_t = \mathbb{E}[X\,|\,\mathcal{E}_t^0] = u(z(T\wedge t))\ ,\quad t\geqq 0\ ,$$

が得られる．更にこの u と X に対して

(12) $$\|\sup_{t\geqq 0}|X_t|\|_{L^1(\Omega_2)} \leqq C_\sigma \|N_\sigma(u)(e^{i\theta})\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

但し，$0<\sigma<1$ で，$\Gamma_\sigma(\theta)$ を右の図の様な Stolz 領域として



$\Gamma_\sigma(\theta)$

$$N_\sigma(u)(e^{i\theta}) = \sup\{|u(\xi)| : \xi \in \Gamma_\sigma(\theta)\}$$

とする. (12) は Burkholder-Gundy-Silverstein による. 更に

補題 5.2. (a) $\|X\|_{BMO(\Omega_2)} \leq C \sup_{z\in\mathring{D}} P_z[|u(\theta)-u(z)|]$,

(b) $$\sup_{t\geq 0} \|E[e^{\alpha|X-X_t|} \mid \mathcal{E}_t]\|_\infty \leq \sup_{z\in\mathring{D}} P_z[e^{\alpha|u(\theta)-u(z)|}]$$

右辺の P_z は Poisson 積分を表はす.

証明. Φ を $\mathbb{C}$ 上の非負連続函数とする. 卉 $\tilde{\Omega}$ 上の函数 G を

$$G(\omega) = \Phi[u(\omega_{\mathcal{T}(\omega)}) - u(\omega_0)]$$

で定義する. これは u を $\mathbb{C}$ 全体に連続に拡張しておけば常に意味を持つ. さて

$$E[\Phi[u(z(\mathcal{T})) - u(z(\mathcal{T}\wedge t))] \mid \mathcal{E}_t^\circ]$$

$$= E[\Phi\cdot 1_{\{\mathcal{T}\geq t\}} \mid \mathcal{E}_t^\circ] + \Phi(0)\, 1_{\{\mathcal{T}<t\}} = (\#)$$

(11) によれば $G[\theta_t(\omega)] = \Phi[u((\theta_t(\omega))_{\mathcal{T}(\theta_t\omega)} - u((\theta_t(\omega))_0)]$

$= \Phi[u(\omega_{\mathcal{T}(\omega)}) - u(\omega_t)] = \Phi[u(z(\mathcal{T})) - u(z(\mathcal{T}\wedge t))]$ P°-a.e. on $\{\mathcal{T}\geq t\}$. 従って,

$$(\#) \leq \max\{\Phi(0),\ E[G(\theta_t(\omega)) \mid \mathcal{E}_t^\circ]\}.$$

こゝで (10) を使へば

$$\sup_{t\geq 0} E[G(\theta_t(\omega)) \mid \mathcal{E}_t^\circ] = \sup_a E^a[G(\omega)]$$

を得るが, 再び Brown 運動と調和測度に関する角谷の定理により

$$E^a[G] = P_a[\Phi[u(\theta) - u(a)]], \qquad a \in \mathring{D}$$

$$= \Phi(0) \qquad a \notin \mathring{D}$$

故に,

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[\Phi[u(z(T))-u(z(T\wedge t))]\,|\,\mathcal{E}_t^0]$$
$$\leqq \max\{\Phi(0),\ \sup_{a\in D} P_a[\Phi[u(0)-u(a)]]\}.$$

ここで $\Phi(\xi)=|\xi|$, $=e^{\alpha|\xi|}$ とおけば (a) 及び (b) が出る。

(a) の右辺に定数 C があるのは, 我々の $BMO(\Omega_2)$ norm は (4) で定義した為 $\sup_t \mathbb{E}[|X-X_t|\,|\,\mathcal{E}_t^0]$ と (同値ではあるが) 差が出るからである。(終)

次に N を

$$NF=f\ ;\quad f(\theta)=\mathbb{E}[F\,|\,z_T=\theta]\ ,\quad F\in L^2(\Omega_2)$$

で定義する。この時 $1\leqq p\leqq\infty$ に対して

$$\|NF\|_{L^p(\mathbb{T})}^p=\int_{\mathbb{T}}|\mathbb{E}[F\,|\,z_T=\theta]|^p\,d\theta/2\pi$$
$$\leqq \mathbb{E}[|F|^p]=\|F\|_{L^p(\Omega_2)}^p.$$

更に,

補題 5.3. 定数 $C'>0$ が存在して

$$\|NF\|_{BMO(\mathbb{T})}\leqq C'\|F\|_{BMO(\Omega_2)},\qquad \forall F\in BMO(\Omega_2).$$

これは Mauray によるもので, 証明は BMO と H^1 の双対性を用いる。([2, p. 217~218])

<u>$BMO(\mathbb{T})$ に対する定理5.1の証明.</u> 先ず $f\in BMO(\mathbb{T})$ を実数値と仮定してよい事に注意する。$\alpha>0$ を

(13) $$\sup_I \frac{1}{|I|}\int_I e^{\alpha|f-f_I|}\,d\theta<\infty$$

となる様に選ぶ。この時, $X=Mf$ に対し (5.2)(b) より

$$\sup_{t\geq 0} \| \mathbb{E}[e^{\beta|X-X_t|} | \mathcal{E}_t^\circ]\|_\infty \leqq C \sup_{z\in \mathring{\mathbb{D}}} P_z[e^{\beta|u(\theta)-u(z)|}]$$

を得るが，条件 (13) から右辺がすべての $\beta<\alpha$ に対して有限である事が分かる．従って定理4.4から

$$\inf_{\in L^\infty(\Omega_2)} \|X-Y\|_{BMO} \leqq \pi/2\alpha .$$

即ち，$Y\in L^\infty(\Omega_2)$ と $Z\in BMO(\Omega_2)$ で

$$X = Y+Z \quad \text{且つ} \quad \|Z\|_{BMO} \leqq \pi/2\alpha$$

なるものが存在する．この時，$\varphi = NY$，$\psi \in NZ$ として，

$$f = NX = NY + NZ = \varphi + \psi,$$

$$\|\varphi\|_\infty \leqq \|Y\|_\infty \quad \text{且つ} \quad \|\psi\|_{BMO(\mathbb{T})} \leqq C'\|Z\|_{BMO(\Omega_2)}.$$

従って，

$$\|f-\varphi\|_{BMO(\mathbb{T})} \leqq \frac{\pi C'}{2\alpha}.$$

こゝで別の BMO-norm を考へる．即ち，

<u>補題 5.4</u>．任意の $F\in BMO(\Omega_n)$ に対し $\Phi, \Psi \in L^\infty(\Omega_n)$ が存在して $F = \Phi + H\Psi$．

証明．定理2.3，補題2.4及び定理4.2から直ぐ分かる．

さて，これを利用して $F\in BMO(\Omega_n)$ に対し

$$\|F\|_{**} = \inf_{\Phi,\Psi\in L^\infty(\Omega_n)} \{\|\Phi\|_\infty + \|\Psi\|_\infty : F-\Phi-H\Psi = \text{定数}\}$$

とおく．そして

$$\|f\|_{**} = \inf\{\|F\|_{**} : F\in BMO(\Omega_2),\ NF=f\},\quad f\in BMO(\mathbb{T}),$$

と定義すれば，$\|\ \|_{**}$ は $\|\ \|_{BMO}$ と同値であり上の考察と併せて次の結果を得る．

定理 5.5. $f \in BMO(\Sigma_n)$ に対し

(14) $$\sup_{z \in \mathbb{B}_{n+1}} P_z[e^{\alpha|f - P_z f|}] < +\infty$$

なる $\alpha > 0$ の上限を α_0 とおくならば,

(15) $$\inf_{\varphi \in L^\infty(\Sigma_n)} \|f - \varphi\|_{**} \leq \frac{\pi}{2\alpha_0}$$

であり, n が奇数の時は $\pi/2$ は最良である.

証明. $n = 1$ として考へる. (14) を満たす $\alpha > 0$ を取れば補題 5.2 (b) と定理 4.2 により

$$\alpha X = \Phi + H\Psi, \quad \Phi, \Psi \in L^\infty(\Omega_2), \quad \|\Psi\|_\infty < \pi/2$$

なる分解が出来る. $\varphi = N\Phi$, $\psi = N(H\Psi)$ とおけば $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, $\psi \in BMO(\mathbb{T})$ で, $\|\psi\|_{**} \leq \|H\Psi\|_{**} \leq \|\Psi\|_\infty < \pi/2$ より

$$\|f - \alpha^{-1}\varphi\|_{**} = \alpha^{-1}\|\psi\|_{**} < \pi/2\alpha.$$

故に (15) が得られた.

$\pi/2$ の最良性は, $f = \log|z-1|$, $|z| \leq 1$, を考へれば分かる. この場合 $\alpha_0 = 1$ で, $\inf\{\|f - \varphi\|_{**} : \varphi \in L^\infty(\mathbb{T})\} = \pi/2$. 後者は直感的には $\log|z-1|$ が $-\arg(z-1)$ の共軛函数であり $\|-\arg(z-1)\|_\infty = \pi/2$ であることから知られる. (終)

文 献

[1] N. Th. Varopoulos, The Helson-Szegö Theorem and A_p-Functions for Brownian Motion and Several Variables 39 (1980), 85–121.

[2] N. Th. Varopoulos, A probabilistic Proof of the Garnett-Jones Theorem on BMO, Pacific J. Math. 90 (1980), 201–221.

[3] 大野芳希, Remarks on Helson-Szegö Problems, Tōhoku Math. J. 18 (1966).

[4] I. Hirshman, R. Rochberg, Conjugate Function Theory in Weak* Dirichlet Algebras, J. Functional Anal. 16 (1974), 359–371.

[5] T. Gamelin, Uniform Algebras and Jensen Measures, Cambridge U.P., London / New York.