

集団到着および集団サービス待ち行列の数値解法について

東京工業大学大学院(理) 馬場 裕

1. はじめに

本稿では集団到着待ち行列モデル $PHX/PH/1$, $MX/PH/S$ と集団サービス待ち行列モデル $PH/PH\gamma/1$ についての数値解法を論じる。Lucantoni [5], Neuts [8], [20] は、無限個の状態をもつマルコフ連鎖のある重要なクラスについて定常分布やモーメントをアルゴリズム的な解法で求めた。本稿で述べるモデルは状態の取り方によって [5], [8], [20] で解析されたモデルに帰着させることができる。本稿ではこれらの手法を応用、拡張して定常分布やモーメントの数値計算を行った。また種々の重要な特性量、例えば、平均待ち時間や待ち率の数値例を示す。また $PHX/PH/1$, $MX/PH/S$ については今までに提案されている近似式の検討を行う。

2. 準備

2.1. Phase type distribution

phase type distribution は Neuts [6], [7] で導入された、状態数有限、時間パラメータ連続の吸収的マルコフ連鎖における吸収時間分布として表わしうる $(0, \infty)$ 上の確率分布であり、その表現は

初期確率ベクトル $(0, \alpha) = (0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$

infinitesimal generator $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & T \end{pmatrix}$

ただし $T\mathbf{e} + I = 0$, $T: m \times m$ 行列、と表され、分布関数は $F(x) = 1 - \alpha \exp(Tx)\mathbf{e}$, 原点に関するモーメントは $M'_k = (-1)^k k! \alpha T^{-k}\mathbf{e}$ for $k \geq 1$ となる。Phase type distribution は指数分布、アーラン分布、超指数分布などを含み、 $(0, \infty)$ 上のすべての確率分布のクラスの中で稠密である。

2.2. 定常分布が求められる待ち行列のタイプ

Lucantoni [15], Neuts [18], [20] により、次のような待ち行列がマルコフ連鎖に帰着でき、またその推移確率行列が次のような特殊なブロック構造をもち、定常分布を計算するアルゴリズムが存在することがわかっている。

(1) GI/PH/S タイプ

$$P = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ B_{10} & B_{11} & A_0 & 0 & 0 & \dots \\ B_{20} & B_{21} & A_1 & A_0 & 0 & \dots \\ B_{30} & B_{31} & A_2 & A_1 & A_0 & \dots \\ B_{40} & B_{41} & A_3 & A_2 & A_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(2) PH/PH/S タイプ

$$P = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & & & & \\ B_{10} & B_{11} & A_0 & & & \circ \\ & B_{21} & A_1 & A_0 & & \\ & & A_2 & A_1 & A_0 & \\ \circ & & & A_2 & A_1 & \dots \\ & & & & & \dots \end{pmatrix}$$

(3) PH/G/I タイプ

$$P = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \dots \\ C_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \dots \\ & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \dots \\ & & A_0 & A_1 & A_2 & \dots \\ \circ & & & A_0 & A_1 & \dots \\ & & & & & \dots \end{pmatrix}$$

本稿で論じる集団到着待ち行列モデル PH^x/PH/I, M^x/PH/S は PH/G/I タイプ (ただし到着 batch size の最大値 $k < \infty$ ならば、状態の取り方を変えることによって PH/PH/S モデルに帰着させることもできる) である。また集団サービス待ち行列モデル PH/PH^x/I は GI/PH/S タイプである。GI/PH/S および PH/PH/S モデルの定常分布は行列幾何的 (matrix geometric form, [8], [20] 参照) になるので解析がやさしい。

3. PH^x/PH/1 の解法

到着間隔分布を (α, T) の phase type

サービス時間分布を (β, S) の phase type

batch size 分布を $\{g_i\}_{i=1}^K$, $g = \sum_{i=1}^K i g_i$

とすると、任意時点での系の推移を表す連続時間マルコフ連鎖の infinitesimal generator は

$$(3.1) \quad Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} \tilde{C}_0 & g_1 \tilde{D}_0 & g_2 \tilde{D}_0 & \dots & g_k \tilde{D}_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \tilde{B}_0 & \tilde{C} & g_1 \tilde{D} & \dots & g_{k-1} \tilde{D} & g_k \tilde{D} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \hat{B} & \tilde{C} & \dots & g_{k-2} \tilde{D} & g_{k-1} \tilde{D} & g_k \tilde{D} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ただし $\tilde{B}_0 = \Sigma^\circ \otimes I$, $\hat{B} = S^\circ \Sigma^\circ \otimes I$, $\tilde{C}_0 = T$, $\tilde{C} = T \otimes I + I \otimes S$,

$\tilde{D}_0 = \underline{\beta} \otimes T^\circ A^\circ$, $\tilde{D} = I \otimes T^\circ A^\circ$, $\underline{I}^\circ = -T \underline{e}$, $T^\circ = (T^\circ, \dots, T^\circ)$,

$A^\circ = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_M)$, $\Sigma^\circ = -S \underline{e}$, $S^\circ = (S^\circ, \dots, S^\circ)$,

$\Sigma^\circ = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_N)$

と表わされる。すなわち系の状態として

$\underline{0} = \{(0, r), 1 \leq r \leq M\}$ r : 到着 phase

$\underline{i} = \{(i, j, r), i \geq 1, 1 \leq j \leq N, 1 \leq r \leq M\}$ i : 系内人数,

j : サービス phase

を用いて推移を表したものである。ここで

$$(3.2) \quad \tau = \max \left[\max_{1 \leq i \leq M} \{-(\tilde{C}_0)_{ii}\}, \max_{1 \leq i \leq MN} \{-(\tilde{C})_{ii}\} \right] > 0$$

とすれば、離散時間マルコフ連鎖

$$(3.3) \quad P = \begin{matrix} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & \dots & \underline{k} & \underline{k+1} & \underline{k+2} & \underline{k+3} & \dots \\ \underline{0} & \left[\begin{array}{cccccccc} C_0 & g_1 D_0 & g_2 D_0 & \dots & g_k D_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ B_0 & C & g_1 D & \dots & g_{k-1} D & g_k D & 0 & 0 & \dots \\ 0 & B & C & \dots & g_{k-2} D & g_{k-1} D & g_k D & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right] \end{matrix}$$

の定常分布 $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots)$ は Q の定常分布と一致する。

ただし、 $C_0 = I + \tau^{-1} \hat{C}_0$, $C = I + \tau^{-1} \hat{C}$, $B_0 = \tau^{-1} \hat{B}_0$, $B = \tau^{-1} \hat{B}$,

$D_0 = \tau^{-1} \hat{D}_0$, $D = \tau^{-1} \hat{D}$.

P をブロック三重対角にするために、

$$(3.4) \quad \underline{y}_0 = \underline{x}_0, \quad \underline{y}_i = (x_{(i-1)k+1}, \dots, x_{ik}) \quad (i \geq 1)$$

$$F_0 = C_0, \quad G_0 = (g_1 D_0, \dots, g_k D_0), \quad E_0 = \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & B \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} C & g_1 D & \dots & g_k D \\ B & C & & \\ & 0 & \dots & B & g_1 D \\ & & & & C \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g_k D & & & \\ g_{k-1} D & g_k D & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ g_1 D & \dots & \dots & g_1 D \end{pmatrix}$$

とすると、 P は

$$(3.5) \quad P = \begin{pmatrix} F_0 & G_0 & & & \\ E_0 & F & G & & 0 \\ & E & F & G & \\ & & E & F & G \\ 0 & & & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

に変換される。

Neuts [18], [20] は $\text{sp}(R) < 1$, $R = G + RF + R^2 E$ の minimal solution が

$$(3.6) \quad \underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i R \quad (i \geq 1) \quad (\text{matrix-geometric form})$$

を示した。(SP(R)は正行列 R の Perron Frobenius 根)
定常方程式

$$(3.7) \quad \begin{cases} y_0 = y_0 F_0 + y_1 E_0 \\ y_1 = y_0 G_0 + y_1 (F + RE) \\ y_0 + y_1 (I - R)^{-1} \underline{e} = 1 \end{cases}$$

より y_0, y_1 が求まり、(3.6)により定常分布が計算できる。

モーメントの計算

ベクトル母関数 $X(z) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i$ を解析することによって

$$(3.8) \quad X^{(1)}(1) \underline{e} = -X(1) U^{(1)}(1) + \frac{1}{2(1 - \delta^{(1)}(1))} [\delta^{(2)}(1) X(1) \underline{e} + x_0 D_0 \sum_{i=1}^k (i+1) i g_i \underline{e} + 2x_0 D_0 \sum_{i=1}^k (i+1) g_i U^{(1)}(1) + x_0 D_0 U^{(2)}(1) - 2x_1 B U^{(1)}(1) - x_1 B U^{(2)}(1)]$$

$$\begin{aligned} X^{(2)}(1) \underline{e} &= -X(1) U^{(2)}(1) - 2X^{(1)}(1) U^{(1)}(1) + \frac{1}{3(1 - \delta^{(1)}(1))} \\ & \quad [3X^{(1)}(1) \underline{e} \delta^{(2)}(1) + 3X(1) U^{(1)} \delta^{(2)}(1) + X(1) \underline{e} \delta^{(3)}(1) \\ & \quad + \sum_{i=1}^k (i+1) i (i-1) g_i x_0 D_0 \underline{e} + 3 \sum_{i=1}^k (i+1) i g_i x_0 D_0 U^{(1)}(1) \\ & \quad + 3 \sum_{i=1}^k (i+1) g_i x_0 D_0 U^{(2)}(1) + x_0 D_0 U^{(3)}(1) \\ & \quad - 3x_1 B U^{(2)}(1) - x_1 B U^{(3)}(1)] \end{aligned}$$

ただし、 $\delta(z)$ は $A(z) = B + zC + \sum_{i=1}^k g_i z^{i+1} D$ の固有値

$\underline{u}(z)$, $\underline{v}(z)$ は $A(z)$ のそれぞれ、右、左固ベクトルであり、
 $\underline{v}(z)\underline{u}(z) = \underline{v}(z)\underline{e} = 1$ を満たす。またそれぞれの微分係数 $\delta^{(j)}(1)$, $\underline{u}^{(j)}(1)$, $\underline{v}^{(j)}(1)$, $j \geq 0$ は次の再帰式により計算できる。

$$\delta^{(0)}(1), \underline{u}^{(0)}(1) = \underline{e}, \quad \underline{v}^{(0)}(1) = \underline{\pi}$$

$$(3.9) \quad \delta^{(j)}(1) = \underline{\pi} A^{(j)}(1) \underline{e}, \quad \underline{u}^{(j)}(1) = [I - A(1) + \Pi]^{-1} [A^{(j)}(1) - \delta^{(j)}(1) I] \underline{e}$$

$$\underline{v}^{(j)}(1) = \underline{\pi} [A^{(j)}(1) - \delta^{(j)}(1) I] [I - A(1) + \Pi]^{-1}$$

for $j \geq 2$

$$\delta^{(j)}(1) = \sum_{\lambda=1}^j \binom{j}{\lambda} \underline{\pi} A^{(\lambda)}(1) \underline{u}^{(j-\lambda)}(1) - \sum_{\lambda=1}^{j-1} \binom{j}{\lambda} \underline{\pi} \underline{u}^{(j-\lambda)}(1) \delta^{(\lambda)}(1)$$

$$\underline{u}^{(j)}(1) = [I - A(1) + \Pi]^{-1} \sum_{\lambda=1}^j \binom{j}{\lambda} [A^{(\lambda)}(1) - \delta^{(\lambda)}(1) I] \underline{u}^{(j-\lambda)}(1)$$

$$- \left[\sum_{\lambda=1}^{j-1} \binom{j}{\lambda} \underline{v}^{(\lambda)}(1) \underline{u}^{(j-\lambda)}(1) \right] \underline{e}$$

$$\underline{v}^{(j)}(1) = \sum_{\lambda=0}^{j-1} \binom{j}{\lambda} \underline{v}^{(\lambda)}(1) [A^{(j-\lambda)}(1) - \delta^{(j-\lambda)}(1) I] [I - A(1) + \Pi]^{-1}$$

ただし、 $\underline{\pi}$ は確率行列 $A(1)$ の定常ベクトル、 Π はすべての行が $\underline{\pi}$ の正方行列。

待ち率の計算

W_1 を batch の先頭の待ち時間

W を arbitrary customer の待ち時間

とすると、

$$(3.10) \quad P(W_1 > 0) = 1 - \frac{\alpha_0 I^0}{\alpha I^0}, \quad P(W > 0) = 1 - \frac{\alpha_0 I^0}{\alpha I^0 g}$$

を示すことができる。(ただし α は infinitesimal generator $Q^* = T + T A^0$ の定常ベクトル)

4. $M^x/PH/S$ の解法

到着間隔分布を rate λ の指数分布

サービス分布を (β, S) の phase type ($S: N \times N$)

batch size 分布を $\{g_i\}_{i=1}^K$, $g = \sum_{i=1}^K \lambda_i g_i$

とする。系の状態を

$(i; j_1, \dots, j_N) : i (i \geq 0)$ 系内数

j_r r -phase でサービス中のサーバー数 ($1 \leq r \leq N$)

という $(N+1)$ -次元ベクトルで表し、

$$\underline{i} = \{ (i; j_1, \dots, j_N) \mid i \geq 0, \sum_{r=1}^N j_r = \min(S, i) \}$$

と定義すると、 \underline{i} の状態数は

$$\binom{\min(i, S) + N - 1}{\min(i, S)}$$

となる。任意時点での系の推移を表す連続時間マルコフ連鎖の infinitesimal generator は

$$(4.1) \quad Q = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ s-1 \\ s \\ s+1 \\ \vdots \end{array} \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & s-1 & s & s+1 & \dots & s+k-1 & s+k & s+k+1 & \dots \\ C_0 & D_0 & D_0 & \dots & & & & & & & & \\ B_1 & C_1 & D_1 & \dots & & & & & & & & \\ 0 & B_2 & C_2 & \dots & & & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & & & & & \\ C_{s-1} & D_{s-1} & D_{s-1} & \dots & D_{s-1,k} & 0 & 0 & \dots & & & & \\ B_s & C & g_1 D & \dots & g_{k-1} D & g_k D & 0 & \dots & & & & \\ 0 & B & C & \dots & g_{k-2} D & g_{k-1} D & g_k D & \dots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \end{array} \right]$$

となる。Q の定常分布を $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$

$$y_0 = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}), \quad y_i = (\alpha_{s+i-k}, \alpha_{s+i-k+1}, \dots, \alpha_{s+i-1})$$

($i \geq 1$) とすれば、PH \times /PH/1 モデルと同様の解析を行うことによって、定常分布 α を求めることができる。

(詳細は紙面の都合により省略)

モーメントの計算

ベクトル母関数

$$(4.2) \quad X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^{i-s}$$

とおくと、3節と同様な方法により、 $X^{(1)}(1)e$, $X^{(2)}(1)e$ が求まる。(式は省略)

待ち率の計算

$$(4.3) \quad r_n = \frac{1}{g} \sum_{i=n}^k g_i \quad (1 \leq n \leq k)$$

とすると、 r_n は arbitrary の客が batch の n 番目である確率を表す。また

$$(4.4) \quad \hat{p}_j = \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i \in r_{j-i}$$

は random に選ばれた客が到着直後に j 番目にいる確率を表す。

W_1 を batch の先頭の待ち時間

W を arbitrary な客の待ち時間

とすると、(4.3), (4.4) を用いて

$$(4.5) \quad P(W_1 > 0) = 1 - \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i \in$$

$$P(W > 0) = 1 - \sum_{j=1}^s \hat{p}_j$$

を導くことができる。

5. PH/PH^Y/1 の解法

集団サービスモデルにはいろいろのサービス形式があるが、本稿では、サービス終了時において、待ち行列長が K 以上ならば K 人サービスに入り、待ち行列長が K 未満ならば全部一緒にサービスするモデルを考える。

到着間隔分布を (α, T) の phase type ($T: M \times M$)

サービス分布を (β, S) の phase type ($S: N \times N$)

とし、状態として、

$$Q = \{(0, r), 1 \leq r \leq M\}$$

$$i^* = \{(i, j, r), i \geq 0, 1 \leq j \leq N, 1 \leq r \leq M\}$$

をとると、状態 Q はサーバーが idle であり、 i^* はサービス中で、待ち人数が i である状態を表す。この状態の系の推移が作る連続時間マルコフ連鎖の infinitesimal generator は

$$(5.1) \quad Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} Q & Q^* & 1^* & 2^* & \dots & (k-1)^* & k^* & (k+1)^* & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} Q \\ Q^* \\ 1^* \\ \vdots \\ (k-1)^* \\ k^* \\ (k+1)^* \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} \tilde{C}_0 & \tilde{D}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \tilde{B}_0 & \tilde{c} & \tilde{D} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \tilde{B} & \tilde{c} & \tilde{D} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \tilde{B} & 0 & 0 & \dots & \tilde{c} & \tilde{D} & 0 & \dots \\ 0 & \tilde{B} & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{c} & \tilde{D} & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{B} & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{c} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ただし、 $\tilde{B}_0, \tilde{C}_0, \tilde{D}_0, \tilde{B}, \tilde{c}, \tilde{D}$ は (3.1) と同じ行列である。

$$\varphi(R) < 1, R = D + RC + R^{k+1}B$$

を満たす minimal solution R に対して

$$(5.2) \quad \alpha_{i+1}^* = \alpha_i^* R \quad (i \geq 0)$$

が成り立つ。

α_0, α_0^* は定常方程式

$$(5.3) \quad \begin{cases} x_0 = x_0 C_0 + x_0^* B_0 \\ x_0^* = x_0 D_0 + x_0^* (C + \sum_{i=1}^K R^i B) \\ x_0 e + x_0^* (I - R)^{-1} e = 1 \end{cases}$$

より計算でき、(5.2) より定常分布が求まる。

モーメントの計算

ベクトル母関数

$$(5.4) \quad X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^* z^i = \sum_{i=0}^{\infty} x_0^* R^i z^i = x_0^* (I - Rz)^{-1}$$

を導入すると、

$$(5.5) \quad \begin{aligned} X^{(1)}(1) e &= x_0^* (I - R)^{-1} R (I - R)^{-1} e \\ X^{(2)}(1) e &= 2x_0^* [(I - R)^{-1} R]^2 (I - R)^{-1} e \end{aligned}$$

が得られる。

待ち率の計算

3節と同様に考えて、 W を *arbitrary customer* の待ち時間とすると

$$(5.6) \quad P(W > 0) = 1 - \frac{x_0 I^0}{\underline{\sigma} I^0}$$

が得られる。(ただし $\underline{\sigma}$ は *infinitesimal generator* $Q^* = T + T^0 A^0$ の定常ベクトル)

6. $GI^x/G/1$ と $M^x/G/s$ の近似式

$GI^x/G/1$ については、Krämer and Lagenbach-Belz [23] と Chiamsiri and Leonard [7] が近似式を提案している。[23]では $GI/G/1$ について彼等が与えた近似式を拡張して、 $GI^x/G/1$ の平均待ち時間、待ち率などの近似式を導出した。また [7]では拡散近似により待ち行列長の平均、分散の近似式を導いた。これらの論文ではシミュレーションの結果と誤差を比較しているが、筆者は本稿の $PH^x/PH/1$ の厳密解を用いてこれらの近似式の精度を検討している。

$M^x/G/s$ については、Cosmetatos [8] がヒューリスティックな考えで、Kimura and Ohnoe [14] が拡散近似によって、それぞれ近似式を導いている。これらの精度については、本稿の $M^x/PH/s$ の厳密解を用いて [14] において検討が行なわれている。

7. 結論と今後の課題

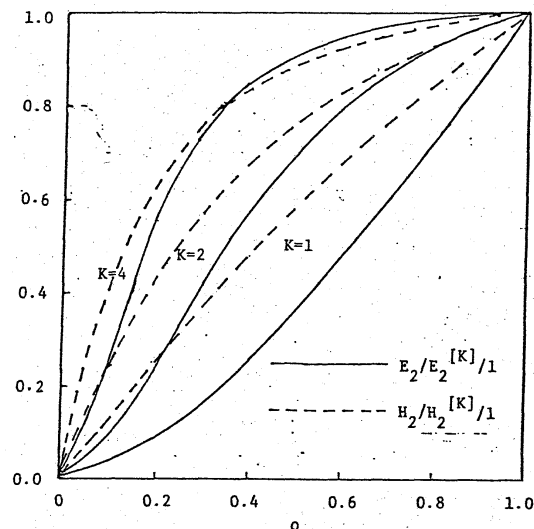
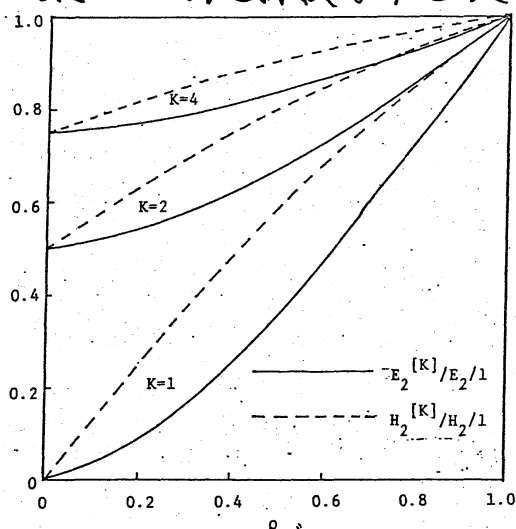
本稿では $PH^x/PH/1$, $M^x/PH/s$ を定常ベクトルが行列幾何的 (*matrix-geometric form*) になるように変形して解いたが、最大 batch size K が大きくなると行列のサイズが非常に大きくなり、計算機のメモリや計算時間の制限のため計算不可能になる。また $K = \infty$ のときが扱えない。この点

を克服するために、筆者は Lucantoni [15], Ramaswami [21] 等で論じられている PH/G/1 型の解法を改良した解法を考えた。この方法によると batch size 分布が discrete phase type (正整数に finite support をもつ確率分布、幾何分布、負の二項分布等を含む) の場合まで計算できる。(discrete phase type distribution については Neuts [16], [20] 参照)

また $PH^X/PH/1$, $PH/PH^Y/1$ について待ち時間分布の計算ができる可能性があると思われるのでやってみたい。

8. 数値例

$PH^X/PH/1$, $M^X/PH/s$, $PH/PH^Y/1$ の平均待ち時間、待ち率をそれぞれグラフで示す。ただし H_2 は変動係数の 2 乗が 2 の超指数分布を表す。



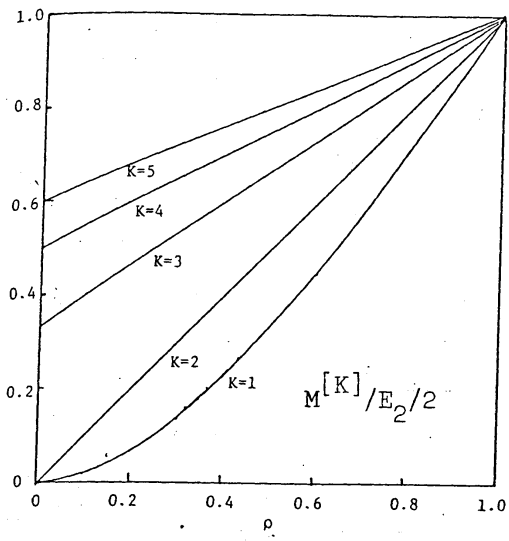
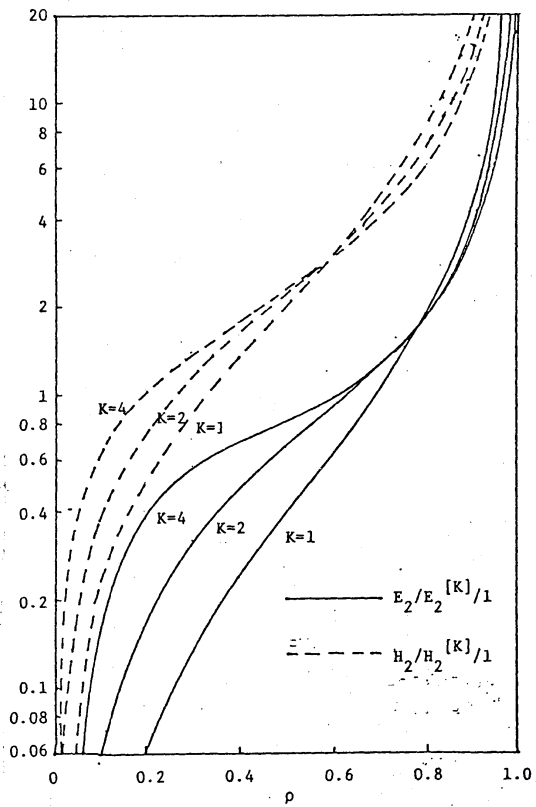
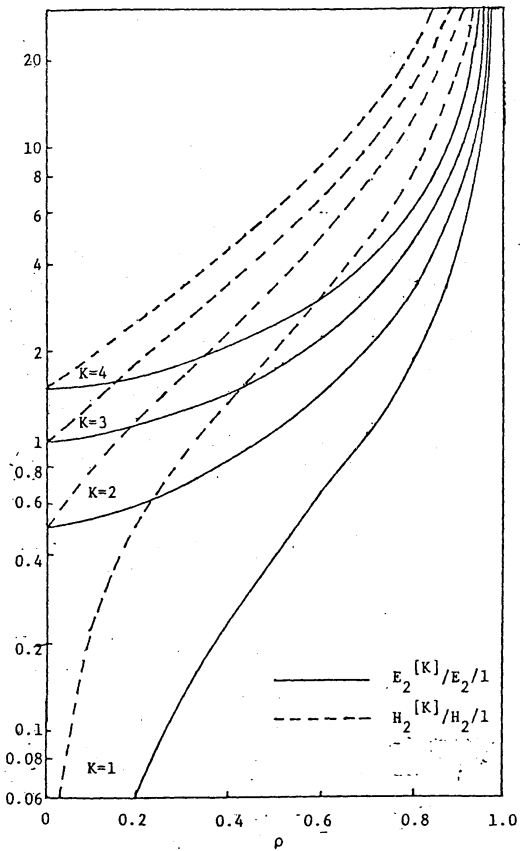


Fig. 8.1. の3つのグラフは、
待ち率 $P(W > 0)$ を表す。

Fig. 8.1



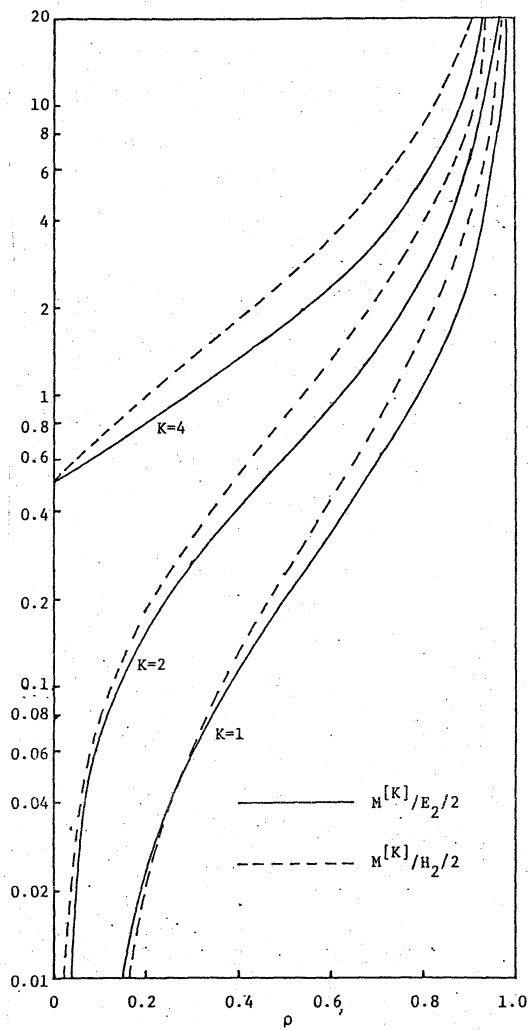


Fig. 8.2. の3つのグラフは
平均待ち時間を表す。

Fig. 8.2

References

- [1] Baba, Y. (1981) Algorithmic Methods for PH/PH/1 Queues with Batch Arrivals or Batch Services. Res. Rep. on Inf. Sci. B-104, Department of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology. (Submitted to JORSJ)
- [2] Baba, Y. (1982) An algorithmic Solution to the $M^X/PH/c$ Queue. (In Preparation)
- [3] Baily, D.E. and Neuts, M.F. (1981) Algorithmic Methods for Multi Server Queues with Group Arrivals and Exponential Servers. European Journal of Operations Research, 8, 184-196.
- [4] Bailey, N.T.J. (1954) On Queueing Processes with Bulk Service. J. Roy. Stat. Soc. Ser. B, 16, 80-87.
- [5] Bellman, R. (1960) Introduction to Matrix Analysis, MacGraw-Hill, New York.
- [6] Burke, P.J. (1975) Delays in Single Server Queues with Batch Input. Opns. Res. 23, 830-833.
- [7] Chiamsiri, S. and Leonard, M.L. (1981) A Diffusion Approximation for Bulk Queues. Management Science, 27, 1188-1199.
- [8] Cosmetatos, G.P. (1978) Some Practical Considerations on Multi-Server Queues with Multiple Poisson Arrivals. (1978) Omega, 6, 443-448.
- [9] Cromie, M.V., Chaudhry, M.L., and Grassman, W.K. (1979) Further Results for the Queueing System $M^X/M/c$. Journal of Operational Research Society, 30, 755-763.
- [10] Gross, D., and Harris, C.M. (1974) Fundamentals of Queueing Theory. New York; John Wiley and Sons.
- [11] Hollman, D.F., Grassman, W.K., and Chaudhry, M.L. (1980) Some Results of the Queueing System $E_k^X/M/c$. Nav. Res. Log. Quart. 27, 217-222.

- [12] Kabak, I.W. (1968) Blocking and Delays in $M^{(n)}/M/c$ Bulk Queueing Systems. Opns. Res. 16, 830-840.
- [13] Kabak, I.W. (1970) Blocking and Delays in $M^{(x)}/M/c$ Bulk Arrival Queueing Systems. Management Science. 17, 112-115.
- [14] Kimura, T. and Ohson, T. (1982) Diffusion Approximation for an $M^x/G/c$ Queue. (In Preparation)
- [15] Lucantoni, D. (1978) Numerical Methods for a Class of Markov Chains Arising in Queueing Theory. M.S.Thesis, Dept. of Statistics and Computing Sciences. University of Delaware.
- [16] Neuts, M.F. (1975) Probability Distributions of Phase Type. In Liber Amicorum Professor Emeritus H. Florin, Department of Mathematics, University of Louvain, 173-206.
- [17] Neuts, M.F. (1978) Renewal Processes of Phase Type. Nav. Res. Log. Quart. 25, 445-454.
- [18] Neuts, M.F. (1978) Markov Chains with Applications in Queueing Theory, Which Have a Matrix-Geometric Invariant Vector. Adv. Appl. Prob. 10, 185-212.
- [19] Neuts, M.F. (1979) Some Algorithms for Queues with Group Arrivals or Group Services. Proc. of 10th Annual Pittsburgh Conference. Modelling and Simulation, Vol. 10, pt.2. 311-314.
- [20] Neuts, M.F. (1981) Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models - An Algorithmic Approach. John Hopkins University Press.
- [21] Ramaswami, V. (1980) $N/G/1$ Queue and Detailed Analysis. Adv. Appl. Prob. 17, 222-261.
- [22] Takahashi, Y., and Takami, Y. (1976) A Numerical Method for the Steady State Probabilities of a $GI/G/c$ Queueing System in a General Class. J. Opr. Res. Soc. Japan, 19, 147-157.

- [23] Krämer W., and Langenbach-Belz, M. (1978) Approximate Formulae for General Single Server Queues with Single and Batch Arrivals. Angew. Inf., 20, s. 396-402.