数理解析研究所講究録
第452巻 1982年 60-74

最近の待ち行列網理論の結果と整理

防衛大学校　　川島　武

§1．はじめに

計算機網の評価という要請から、近年待ち行列網の研究がさかんに行なわれている。その中で、特に、解析的に厳密解が得られているネットワーク、現状では積形式（プロダクトフォーム）を持つシステムに限られるが、これらについて、知られている結果をここでは整理しまとめてみたい。

積形式はネットワーク内の各窓口（ノード）の列の長さの平衡分布を表すわけであるが、これはいわゆる連続時間に関して定常な測度のもとでの分布である。定常と呼ばれる測度としては他に、到着時間列に関して定常な測度などもあり、待ち行列網について知られている性質が、どの測度のもとで成り立つ性質なのか明確にする必要がある。ここでは、このような観点から整理したい。従って§2では、まず、このような測度について、簡単に言及する。§3で、積形式を持つネットワークの研究についての簡単な紹介を行い、以下§4,

5，6で興味ある性質をまとめる。

§2．定常測度と平衡分布

定常状態にあるM/M/Sでは，任意の時刻tに対し，列の長さ$Q(t)$がkである確率は次のように表わされる。

$$P_T(Q(t)=k)=p_k \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

P_Tは待ち行列（M/M/Sに限らずG/G/Sでも同じになる）の挙動を記述する可測空間（Ω，$\mathcal{F}$）上の一つの測度であり，p_k（$k=0,1,2,\cdots$）はP_Tのもとでの$Q(t)$が持つ分布で，tによらないので平衡分布と呼ばれる。p_kの表現式はよく知られている。さて，可測空間（Ω，$\mathcal{F}$）上の測度はP_Tのみならず無数にある。M/M/Sに限っても，例えば時刻0で列の長さが0という初期条件を持つ測度も考えられ，この測度のもとでは$Q(t)$の分布は時刻tに依存し，$t\to\infty$のときの極限分布が平衡分布p_k（$k=0,1,2,\cdots$）になっている。また過去から引き続いて稼働してきた場合でも，任意の客の到着時点を時刻0と定めたときにはP_Tとは異なる測度P_aが導びかれる。P_aのもとでは$Q(t)$の分布はtに依存するが，n番目に到着する客の挙動，例えば待ち時間などはnによらない。くわしく云えば，到着時点列に関して定常ということである。一般に，P_Tのも

とで定常な点過程に対し、それに関して定常な測度が導かれ、パルム測度と呼ばれている。待ち行列では、到着時点列の他に退去時点列があり、これも P_T のもとでは定常になるから、パルム測度 P_d が得られる。P_d は任意の客の退去時点列を時刻 0 としたものと考えられ、P_d のもとでは、n 番目に退去する客の挙動は n によらず一定となる。但し、一般に n 番目に到着する客が n 番目に退去するとは限らず、P_a のもとでの n 番目に到着する客の待ち時間 W_n の分布と、P_d のもとでの n 番目に退去する客の待ち時間 W_n' の分布が一致することは容易に予想されるが、証明が必要であろう。(Kawashima [11])。待ち行列網では各ノード毎に到着、退去があるので、それぞれから導かれるパルム測度には、ノードのインデックス i をつけて P_{ia}, P_{id} etc と記す。

P_T, P_a, P_d を混同したり、区別していない論文もある。

2.1　Little [17] では、一つの確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で

a.　$P(W_n \leq x) = P(W_1 \leq x)$　for all n,

b.　$P(Q(t) = k) = P(Q(0) = k)$　for all t

の二つが成立すると仮定した。a, b はそれぞれ P_a, P_T のもとで成立するものであり、a、b 共に成立つような場合はまずあり得ないであろう。

2.2　Finch [6] にある"定理5"では

$$\lim_{n\to\infty} P(Q(a_n+W_n+0)=k \mid Q(0)=0,\ a_1=0) = P_d(Q(0+)=k)$$

を主張しているが、ここで証明しているのは

$$\lim_{n\to\infty} P(Q(d_n+0)=k \mid Q(0)=0,\ a_1=0) = P_d(Q(0+)=k)$$

ということである。（ $a_1, a_2, \cdots$ は到着時点列，d_1，$d_2, \cdots$ は退去時点列） これは n 番目に到着する客と n 番目に退去する客は必ずしも一致するわけでなく、上記二つの極限が存在するとしても一致することは必ずしも明らかではない。

2．3　M／M／S では

$$P_T(Q(t)=i,\ Q(t')=j) = P_T(Q(t')=i,\ Q(t)=j)$$

が任意の t，t'，i，j に対して成立している。すなわち、P_T のもとでは $\{Q(t);-\infty<t<\infty\}$ と $\{Q(-t);-\infty<t<\infty\}$ は確率的には同一の挙動し、この性質を reversibility と呼ぶ。（Reich［20］） 然し同じ $Q(t)$ でも P_a，P_d のもとでは reversible ではない。例えば P_a のもとでは時刻 0 に客が到着するわけであるから，必ず $Q(0+)-Q(0-)=1$ が成立し、$Q(0+)$ と $Q(0-)$ が同じ分布を持つことは有得ないからである。但し，P_d のもとでの $Q(-t)$ と P_a のもとでの $Q(t)$ は同一の分布を持つ。1 人増加する現象を、時間軸を負の方向にして見れば、1 人減小することになるからである。

2．4　Burke［4］は 2 段 Tandem Queue（$M\to M/S_1\to M/S_2$）に対し、1 段目の退去時点列のパルム測度 P_d のもとで、各客

の1段目と2段目の系待ち時間は互いに独立であることを示した。これから P_{1a} のもとでも互いに独立であることが導びかれるが（Kawashima [11]）、一般に待ち時間などを考えるときには、P_a、すなわち P_{1a} のもとで考えることが多く、P_{1d} より、P_a での性質がより実用的である。

§3．積形式を持つネットワーク

待ち行列網を対象として積形式を導いた研究は Jackson を始めとして有名な論文ばかりであり、簡単にまとめる。各々以下の条件のもとで積形式となる平衡分布を explicit に求めている。

3．1　Jackson [7], [8]　客のタイプは1種類、指数サービス、窓口間の移動は Markov 連鎖型の routing、規律は FIFO.

3．2　Kelly [12]　Jackson 型より拡張された点は客は多種類、規律が一般化された。すなわち、客のタイプ毎に routing の推移マトリックスが与えられるが、サービス時間のパラメーターはどの種類に対しても同一。規律は、各ノード j について、サービス能力の配分率 $\gamma_j(l, n_j)$，列内の position l へ、到着した客が飛び込む確率 $\delta_j(l, n_j+1)$（n_j は列の長さ，$l=1, 2, \cdots, n_j$）で表現されるもの。扱者が2でFIFOならば

例えば　$n_j = 3$ として

$$\gamma_j(1,3) = \gamma_j(2,3) = 1/2 \quad , \quad \gamma_j(3,3) = 0,$$

$$\delta_j(1,3) = \delta_j(2,3) = 0 \quad , \quad \delta_j(3,3) = 1$$

と表現される。

3.3　B.C.M.P.〔1〕　Phase型のサービス時間分布、多タイプ。ノード間の移動とタイプ間の移動が同時に行なえ、ノードとタイプの組み合せで、Markov連鎖型のrouting. 規律は4種類（Time Sharing型，無限サーバー型，割り込付LCFS，指数サービスでFIFO）である。なお、最初の3つは $\gamma_j = \delta_j$ が成立する特別な場合である。

3.4　Kelly〔13〕　Γ一分布のサービス時間、多タイプ，$\gamma_j(l, n_j) = \delta_j(l, n_j)$ を満たす規律.

3.5　Barbour〔2〕　Kelly〔13〕の結果を連続性を用いて、一般のサービス時間を持つシステムに拡張した。但し、G/G/S のように単純な型でないため、分布間の距離づけが明確でないため、連続性そのものも明確でない。

3.6　Chang, Howard, Towsley〔5〕　Kelly の規律（$\gamma_j = \delta_j$）とB.C.M.P. のrouting. 絶対連続な一般分布で積形式を導く。同様な結果に Noetzel〔19〕がある。

§4. Reversible と Quasi-Reversal

積形式を導く過程で、副産物として色々な性質が知られた。その一つに Quasi-Reversal（Q. R と略す）がある。

4.1　M/M/S の queueing process $Q(t)$ は reversible であるが、このタイプの窓口からなる Jackson 型ネットワーク（Tandem 型も含む）の queueing process $C(t)=(Q_1(t), Q_2(t), \cdots, Q_M(t))$ は reversible ではない。例えば M→M/1→M/1 では $(Q_1, Q_2, Q_3) = (1, 0, 0)$ から $(0, 1, 0)$ という推移はあり得るが、$C(-t)$ では $(1, 0, 0)$ から $(0, 1, 0)$ となる推移は起らない。

4.2　Kelly[12] のモデルについては $C(-t)$ を考えたとき、これは別の Kelly[12] のモデルの queueing process として表現できる。$C'(t)=C(-t)$ の到着時点列は $C(t)$ では退去時点列であり、従って任意の t に対し、$C(t)$ と t 以前の退去時点列との関係は $C'(t)$ とその t 以後の到着時点列との確率的な関係は同じになり、互いに独立となる。t 以前の退去時点列と $C(t)$ が独立であることを Kelly は Quasi-Reversible と定義した。

4.3　Warland, Varaiya[25] は待ち行列ネットワークを含む、もっと一般なマルコフモデルを構成し、それが Q. R となるための必要十分条件、及び Q. R であるマルコフモデルをいくつか結合させ、Q. R となるような結合法を求めた。以下それを説明する。

4.4 Warlan, Varaiya のモデル　離散的な状態空間 X を持つマルコフ過程 X_t は次のような要素から構成されるモデル M で定義される。

$$M = \{ X, I, E_i, T_i, N^i, \lambda^i \ (i \in I) \}$$

ここで X は状態空間、I はポアソン過程 N^i の index の集合である。各 $i \in I$ に対して、パラメーターが λ^i のポアソン過程 N^i_t が存在し、N^i_t の点が発生した時点で X_t の状態 x が $E_i \subset X$ に含まれるならば X_t の状態は x から $T_i(x)$ に（確率 1 で）推移する。すなわち N^i_t の点が X_t に影響を及ぼすのは X_t の状態が E_i の時のみである。また X_t はこのような原因以外には状態を変えない。E_i は互いに排反である必要はない。T_i は E_i から X への写像ともいえる。さて、N^i_t の点のうちで、X_t に影響を与えた点の列を i の counting process Y^i_t と呼び、次のようにも定義される。

$$dY^i_t = 1\{X_t \in E_i\} dN^i_t \qquad (dN^i_t = 1 \text{ or } 0)$$

また I の部分集合 J に対し、

$$Y^J_t = \Sigma_{i \in J} Y^i_t$$

を J の counting Process と呼ぶ。

4.5 このモデルで X_t と $\{ Y^J_s ; s \leqq t \}$ が互いに独立ならば X_t は J に関して Q.R であると言う。さてこれについて Warland, Varaiya は次の結果を導いた。

X_tがJに関してQ.Rであるための必要十分条件は次が成立することである。

(4.5.1) $\quad p(x)\sum_{j\in J}\lambda^j p(E_j) = \sum_{j\in J}\lambda^j p(T_j^{-1}x)$ for all x.

ここで $p(x)$, $p(E_j)$ は $P_T(X_t=x)$, $P_T(X_t\in E_j)$ etc を表わす。

X_tはマルコフプロセスであり、平衡方程式は次のようになる。

(4.5.2) $\quad p(x)\sum_{j\in I}\lambda^j 1\{x\in E_j\} = \sum_{j\in I}\lambda^j P\{T_j^{-1}x\}$ for all x

(4.5.2)と較べれば(4.5.1)は一種の局所平衡方程式となっている。また(4.5.1)が成り立つと、Y_t^jは必然的にポアソン過程になる。(Warland, Varaiya [27])

§5. Insensitivity (または Invariance)

Insensitivityとは指数分布を他の分布(期待値は同じ)と置き換えても平衡分布は不変であることを意味し、Insensitivity理論はこれが成立する条件を求めることである。歴史的にはErlangのLoss公式の一般化から始まっている。(Matthes [18])

5.1 待ち行列モデルそのものでなく、一般的なSemi Markovモデルを構成し、そこでのInsensitivityを検討する。

Jansen, König [9]によるモデルの構成は次のようになっている。J個からなるObjectがあり、各object $j\in J$のとる状態i_jの組み合せ$g=(\Pi_{j\in J}\ i_j)$の集合がSemi Markov Processの状態

空間Gとなる。object j が他の状態から i_j に推移したとき、他とは独立に分布 $F_{i_j}(x)$（期待値 ρ_{i_j}）に従う確率変数 ξ_{i_j} を発生する。ξ_{i_j} は時間に比例して減少し、0になった時点で、また別の状態に移る。比例係数は全体の状態に依存し、c_{jg} と表わす。状態が g' であり、object s の ξ_{js} が 0 になった時、確率 $p(g', s, g)$ で g に推移する。ξ_{i_j} の残り時間が正である j を"生きている"と呼ぶが、g' から g に移った場合、生きている object はすべてそのまま継続される。さて、F_{i_j} の集合を指数分布であるもの I と非指数分布であるもの U の二つに分ける。U の分布がすべて指数分布に置き換えられたとき、マルコフとなるから、平衡方程式が得られ、次のようになる。

(5.1.1) $$p_g\left(\sum_{I_g \cup U_g} c_{jg}\, \rho_{i_j j}\right) = \sum_{g'} \sum_{s} c_{sg'}\, p(g' s g)\, p_{g'} \quad \text{for } g \in G.$$

（I_g, U_g は状態 g で生きている、それぞれ I, U に属する object の集合） もし、これが次の局所平衡方程式と同値ならば U の分布について Insensitivity が成立することが導びかれる。

(5.1.2) $$p_g\left(\sum_{I_g} c_{jg}\, \rho_{i_j j}\right) = \sum_{g'} \sum_{s \in I_{g'}} c_{sg'}\, \rho_{i_s s}\, p(g', s, g)\, p_{g'}$$

$$p_g\, c_{ug}\, \rho_{i_u u} = \sum_{g'} c_{ug'}\, \rho_{i_u u}\, p(g', u, g)\, p_{g'} + \sum c_{sg'}\, \rho_{i_s s}\, p(g', s, g)\, p_{g'}$$

（uを除いてgと一致するg'について）

$(u \in U_g)$

この証明はJansen, König[9]にも与えられているが、Schassberger[22]による証明の方が理解しやすい。

（十分性）　Insensitive ならばUの各F_{ij}を簡単なフェイズ分布　$\pi_1 E_{\lambda_1} + \pi_2 E_{\lambda_2} * E_{\lambda_3}$（$\pi_1+\pi_2=1$, E_λは指数分布）と置きかえても平衡分布p_gは不変であるから、これから代数計算により、（5.1.2）を導く。

（必要性）　（5.1.2）を満たすp_gが存在するものとして、

$p_g \prod_{j \in U_g} \rho_{x_j j} \int_0^{x_j} (1-F_{ij}(t))\,dt$　が　セミマルコフ過程の平衡解であることを示す。

§6 ネットワーク内のフローについて

今迄の結果は平衡分布の性質であり、任意時点での状態のみ対象としている。しかし、例えば客の挙動を見ようとするときなどには、一時点だけの状態を知るだけでは不充分で、ある時間々隔内の変化も必要となってくる。この方向では、Jackson Type のネットワークについてある程度考察されている。究極の目標は待ち時間の分布などを明らかにすることと思えるが、Tandem 以外ではまだ不充分であろう。取りあえずフロー，すなわち、あるパスを一定時間内に流れる客の数の分布を追求する研究が始まったといえよう。

6．1 Beutler, Melamed〔3〕では　nodeの部分集合Vが，Vから V以外のnodeへ移動した客は決してVのどのnodeにも戻れないような構成になっているとき，Vをexit setと呼んで定義した。このときVの状態はVの各ノードからV^cへの流れに関してQ.Rであること（P_Tのもとで）が示された。この流れは互いに独立でポアソンになる。

6．2 Labetoulle, Pujole, Soula〔14〕　任意のノードiを固定し，そこへの到着時点列（インプット点列）と退去時点列（アウトプット点列）を考察し（インプット，アウトプットと名づけたのは，iのサービス終了と同時にまたでにフィードバックしたような点列も含めることを強調している），P_dのもとでのアウトプットの間隔と，P_aのもとでのInputの間隔の分布が等しいことを証明した。但し，P_d, P_aを明確には用いていない。直接のfeed Backを無視した点列についても同様なことがいえると思えるが，〔14〕では言及していない。

6．3 Reich〔21〕の一般化　$M/M/1 \to M/1 \to \cdots \to M/1$ で1人の客の各段での滞在時間（列待ち時間）は独立であるということであるが，Reichの証明ではP_{id}（$P_{i+1\ a}$）のもとで，W_iと（$W_{i+1}, \cdots, W_M$）が独立であることを証明した所で本質的には終っている。P_aのもとで$W_1, W_2, \cdots, W_M$が互いに独立であることを証明するには，別の理論が必要である。(〔17〕)

Lemoine[16] は M/M/1 の P_a の下で、時間々隔 $(0, W_1)$ の退去間隔は他と独立で input と同じポアソン過程になることを示し、これにより平衡状態についた客の1段目のサービスが終了した時点での系の状態も平衡であることを証明した。これから Reich の結果が Tree Type Queu にも拡張される。

Warlund, Varaiya [26] 客 C が node 1, 2, 3, 4 と続けて進むならば、各 1, 2, 3, 4 に C の後に到着した客は 1, 2, 3, 4 のどこでも C を追いこせないような構造になっているならば、P_{a2} で W_1 と (W_2, W_3, W_4) は独立となっている。([26] の記述では P_T で W_1 と W_2, W_3, W_4 は互いに独立となっている。)

6.4 フローの性質には直接関係ないが、Jackson 型、BCMP 型の $P_a(C(0))$, $P_d(C(0))$ etc についての研究がある。いずれも、離散時点では、その発生の原因となった客を $C(t)$ に勘定しないことで、closed の場合には、系内人数が1人だけ少ないシステムの P_T と一致することを示している。オープンの場合は $P_a(C(0)) = P_T(C(0))$ etc となっている。Jackson 型については Kuwashima[6]、BCMP 型については Lavenberg, Reiser [7], Sevic, Mitrani [8] の研究がある。

参考文献

[1] Baskett,F., Chandy,K.M., Muntz,R.R., and Palacios, F.G. J. Assoc. Comput. Mach. Vol. 22(1975), pp.248-260.

[2] Barbour, A. D. Adv. Appl. Prob., Vol.8 (1976) pp.584-591.

[3] Beutler, F.J., Melamed, B. Opn. Res. Vol. 26 (1978) pp.1059-1072.

[4] Burke,P. J. Ann. Math. Stat.. Vol. 39 (1968) pp.1144 -1152.

[5] Chandy, K.M., Howard Jr, J.H., Towsley, D. F. J. Assoc. Mach. Vol. 24 (1977) pp.250-263.

[6] Finch, P.D. Acta. Math. Hung. Vol. 10 (1958) pp.327-336.

[7] Jackson, J. R. Opn. Res. Vol. 5 (1957) pp.518-521.

[8] Jackson, J. R. Manag. Sci. Vol. 10 (1963) pp.131-143.

[9] Jansen, U. D., Konig, D. Math. Operation. Statis. Vol. 4 (1976) pp.497-522.

[10] Kawashima, T. J.O.R. Japan Vol. 21 (1978) pp.477-485.

[11] Kawashima, T. J. O.R. Japan Vol.25 (1982) (in printing)

[12] Kelly, F. P. J. Appl. Prob. Vol. 12 (1975) pp.542-554.

[13] Kelly, F. P. Adv. Appl. Prob Vol. 8 (1976) pp.416-432.

[14] Labetoulle, J., Pujolle, G., Soula, C. Math. O.R. Vol. 6 (1981) pp.173-185.

[15] Lavenberg, S.S., Reiser, M. J. Appl. Prob. Vol. 17 (1980) pp.1048-1061.

[16] Lemoine, A.J. Tech. Rep. 79-020-1, (1979) Systems Control.

[17] Little, J.D.C. Opn Res. Vol. 9 (1961) pp.383-387.

[18] Matthes, K. Trans. 3rd Prague Conf. (1962) pp.513-528.

[19] Noetzel, A.S. J. Assoc. Comput. Mach. Vol. 26 (1979) pp.779-793.

[20] Reich, E. Ann. Math. Stat. Vol.28 (1959) pp.768-773.

[21] Reich, E. Ann. Math. Stat. Vol.34 (1963) pp.338-341.

[22] Schassberger, R. Ann. Prob. Vol.5 (1977) pp.87-99.

[23] Schassberger, R. Ann. Prob. Vol.6 (1978) pp.85-93.

[24] Sevdik, K. C., Mitrani, I. J. Assoc. Comput. Mach. Vol. 28 (1981) pp.358-371.

[25] Warland, J., Varaiya, P. Stoch. Proc. Appl. Vol.10 (1980) pp.209-219.

[26] Warland, J., Varaiya, P. Adv. Appl. Prob. Vol. 12 (1980) pp.1000-1018.

[27] Warland, J., Varaiya, P. Math. O.R. Vol.6 (1981) pp.387-404.