

GI/G/1 待ち行列の 系内容数分布について

東北大学大学院工学研究科

能 上 慎 也

1. はじめに

待ち行列理論における様々な解法の中の一つに補助変数法がある^{[1]~[3]}。この解法は、M/G/1, GI/M/1 に対して、非マルコフ的な過程 $\{N(t) | t \geq 0\}$ に補助的な状態変数 $X(t)$ を導入し、これをマルコフ化して解析する方法であり、複数サーバーの場合の例もいくつか報告されている。

この補助変数法を GI/G/1 や GI/G/m の解析に適用できるように拡張して、経過到着時間と経過サービス時間を補助変数にとった場合について述べるが、客の到着過程とサービス過程は相型分布で表わされるものとし、定常状態での系内容数分布について論じることにする。

2. 状態のとり方と基本方程式

次のような記法を用いる。

$A(x)$: 客の到着時間間隔の P.D.F.

$B(x_1)$: 客のサービス時間の P. D. F.

$$a(x_0) \equiv dA(x_0)/dx_0 \quad b(x_1) \equiv dB(x_1)/dx_1$$

$\alpha(x_0) \equiv a(x_0)/(1-A(x_0))$: 経過到着時間が x_0 であるときの瞬時到着率

$\beta(x_1) \equiv b(x_1)/(1-B(x_1))$: 経過サービス時間が x_1 であるときの瞬時サービス率

$$A(s) = \int_0^{\infty} a(x_0) e^{-sx_0} dx_0 \quad B(s) = \int_0^{\infty} b(x_1) e^{-sx_1} dx_1$$

また次の仮定をしておく。

[仮定]

客の到着間隔の系列 $\{X_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ 、サービス時間の系列 $\{X_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ は、それぞれ共通分布 $A(x_0)$ 、 $B(x_1)$ に従う i. i. d. な系列である。更に、 $\{X_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{X_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ とは互いに独立であるものとし、サービス規律は FCFS であるものとする。

ここで系の状態変数を次のようにとる。

$$\mathcal{S}(t) = (N(t), X_0(t), X_1(t)) \quad (t \geq 0)$$

但し

$N(t)$: 時刻 t での系内容数

$X_0(t)$: last arrival から現時点までの経過到着時間

$X_1(t)$: last departure から現時

点までの経過時間、即ち現在サービス中の客の

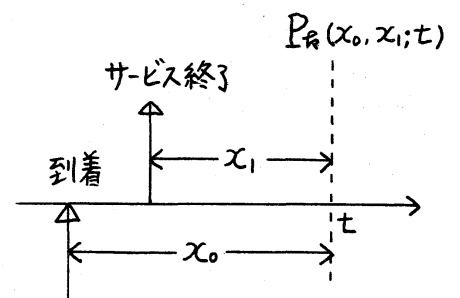


Fig.1 ($t \geq 1, x_0 > x_1$ の場合)

経過サービス時間

また、

$P_k(x_0, x_1; t)$: 時刻 t での状態が $\mathcal{J}(t) = (k, x_0, x_1)$ である状態
確率密度関数 ($k \geq 1, x_0 \geq 0, x_1 \geq 0$)

$$P_k(x_0, x_1; t) dx_0 dx_1 = \Pr[N(t) = k, x_0 \leq X_0(t) < x_0 + dx_0, x_1 \leq X_1(t) < x_1 + dx_1]$$

として可能な状態推移について考えると、次の基本方程式が成立する。

$$\left\{ \begin{aligned} (\partial/\partial x_0 + \partial/\partial x_1 + \partial/\partial t) P_k(x_0, x_1; t) &= -[\alpha(x_0) + \beta(x_1)] P_k(x_0, x_1; t) \\ & \quad (k \geq 1) \end{aligned} \right. \quad (2-1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} P_k(0, x_1; t) &= \int_0^\infty \alpha(x_0) P_{k-1}(x_0, x_1; t) dx_0 \\ & \quad (k \geq 2) \end{aligned} \right. \quad (2-2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} P_k(x_0, 0; t) &= \int_0^\infty \beta(x_1) P_{k+1}(x_0, x_1; t) dx_1 \\ & \quad (k \geq 1) \end{aligned} \right. \quad (2-3)$$

(2-1)式に対する解として条件付確率より次式が成立する。

$$P_k(x_0, x_1; t) = [1 - A(x_0)][1 - B(x_1)] \tilde{P}_k(x_0, x_1; t) \quad (2-4)$$

$$\text{但し} \quad \tilde{P}_k(x_0, x_1; t) \triangleq \frac{P_k(x_0 - x, x_1 - x; t - x)}{[1 - A(x_0 - x)][1 - B(x_1 - x)]} \quad (2-5)$$

(2-4)式を(2-1)式に代入すると次式が得られる。

$$(\partial/\partial x_0 + \partial/\partial x_1 + \partial/\partial t) \tilde{P}_k(x_0, x_1; t) = 0 \quad (2-6)$$

上式は $\tilde{P}_k(x_0, x_1; t)$ において、 x_0, x_1, t に関して同じ shift を施しても値が変わらないことを意味するから、 x を x_0, x_1 という特別な値にとって、次のように2つの場合に分けることができる。

$$\tilde{P}_r(x_0, x_1; t) = \begin{cases} \tilde{P}_r(x_0 - x_1, 0; t - x_1) \cong \hat{P}_r^+(x_0 - x_1; t - x_1) & (x_0 > x_1) \\ \tilde{P}_r(0, x_1 - x_0; t - x_0) \cong \hat{P}_r^-(x_1 - x_0; t - x_0) & (x_1 > x_0) \end{cases} \quad (r \geq 1) \quad (2-7)$$

以下、定常状態において考えると、(2-2), (2-3)式より

$$\hat{P}_r^+(x_0) = \int_0^{x_0} b(x_1) \hat{P}_{r+1}^+(x_0 - x_1) dx_1 + \int_{x_0}^{\infty} b(x_1) \hat{P}_{r+1}^-(x_1 - x_0) dx_1 \quad (r \geq 1) \quad (2-8)$$

$$\hat{P}_r^-(x_1) = \int_0^{x_1} a(x_0) \hat{P}_{r-1}^-(x_1 - x_0) dx_0 + \int_{x_1}^{\infty} a(x_0) \hat{P}_{r-1}^+(x_0 - x_1) dx_0 \quad (r \geq 2) \quad (2-9)$$

となる。ここで定常状態における系の状態遷移をフローグラフで表わすと下図のようになる。

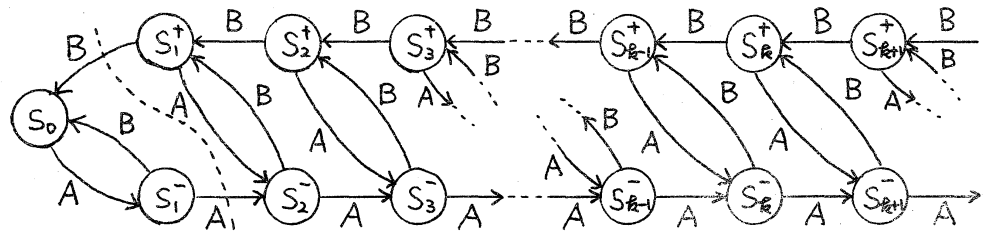


Fig. 2 状態遷移のフローグラフ

図において、例えば S_r^+ は系内容数が r 人であり、 $x_0 > x_1$ 即ち最後に起こった事象がサービス終了(退去)であるという場合をすべて集約した状態である。また A は到着、 B は退去を表わす。図からわかるように点線の左側は特別な状態と考えられ、これに関しては境界条件のところでも述べる。よって点線の右側の部分について $\hat{P}_r^+(x_0), \hat{P}_r^-(x_1)$ の母関数を次のように定義する。

$$\hat{Q}^+(z, x_0) \cong \sum_{r=0}^{\infty} \hat{P}_{r+1}^+(x_0) z^r = \sum_{r=1}^{\infty} \hat{P}_r^+(x_0) z^{r-1} \quad (2-10)$$

$$\hat{Q}^-(z, x_1) \cong \sum_{r=1}^{\infty} \hat{P}_{r+1}^-(x_1) z^r = \sum_{r=2}^{\infty} \hat{P}_r^-(x_1) z^{r-1} \quad (|z| < 1) \quad (2-11)$$

$$\text{但し } \tilde{Q}^-(z, x_1) \cong \tilde{Q}^{*\ast}(z, x_1) + \tilde{P}_1^-(x_1)$$

これらを用いると(2-8), (2-9)式は Convolution(記号 \otimes で表わす)の形で次のように表わせる。

$$z \tilde{Q}^+(z, x_0) = b(x_0) \otimes \tilde{Q}^+(z, x_0) + b(x_0) \otimes \tilde{Q}^{*\ast}(z, -x_0) - b(x_0) \otimes \tilde{P}_1^+(x_0) \quad (2-12)$$

$$z^{-1} \tilde{Q}^{*\ast}(z, x_1) = a(x_1) \otimes \tilde{Q}^{*\ast}(z, x_1) + a(x_1) \otimes \tilde{Q}^+(z, -x_1) + a(x_1) \otimes \tilde{P}_1^-(x_1)$$

ここで $\tilde{P}_R^+(x)$ ($R \geq 2$), $\tilde{P}_R^-(x)$ ($R \geq 1$), $\tilde{Q}^+(z, x)$, $\tilde{Q}^{*\ast}(z, x)$ をラプラス変換したものをそれぞれ $\hat{P}_R^+(s)$, $\hat{P}_R^-(s)$, $\hat{Q}^+(z, s)$, $\hat{Q}^{*\ast}(z, s)$ で表わす(これらはすべて $\text{Re}(s) > \sigma$ で解析的であるとする)と(2-12)式は、

$$[1 - z^{-1} B(s)] \hat{Q}^+(z, s) - z^{-1} B(s) \boxtimes \hat{Q}^{*\ast}(z, -s) = -z^{-1} B(s) \hat{P}_1^+(s) \quad (2-13)$$

$$[1 - z A(s)] \hat{Q}^{*\ast}(z, s) - z A(s) \boxtimes \hat{Q}^+(z, -s) = z A(s) P \quad (2-14)$$

となる。但し $P = \hat{P}_1^-(s)$ は未知定数であり、演算 \boxtimes については後で述べる。

(2-13), (2-14)式が、基本方程式を母関数を用いてラプラス変換表示したものである。ここで次の仮定をする。

[仮定]

$A(s)$, $B(s)$ は有理関数で与えられ、 $A(0) = B(0) = 1$ ($A(0) = B(0) = 0$) であり $\text{Re}(s) \geq 0$ で解析的であるものとする。また $\hat{Q}^+(z, s)$, $\hat{Q}^{*\ast}(z, s)$ も S の有理関数であり、 $\text{Re}(s) > \sigma$ で解析的であるとする。但し、 σ は $\hat{Q}^+(z, s)$ と $\hat{Q}^{*\ast}(z, s)$ の極のうち S 平面において最も右側にある極の real part であるとする。

また $A(s)$, $B(s)$ の極を以下のように規定する。

$$A(s) = \sum_{n=1}^N A_n(s) = \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{a_{n1}}{(s-\hat{\eta}_n)} + \frac{a_{n2}}{(s-\hat{\eta}_n)^2} + \dots + \frac{a_{nW_n}}{(s-\hat{\eta}_n)^{W_n}} \right\} \quad (2-15)$$

$$A_n(s) \text{ の極} : \hat{\eta}_n \text{ (多重度 } W_n) \quad \hat{\eta}_n = \{s \mid \operatorname{Re}(s) < 0\}$$

$$B(s) = \sum_{m=1}^M B_m(s) = \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{b_{m1}}{(s-\hat{\xi}_m)} + \frac{b_{m2}}{(s-\hat{\xi}_m)^2} + \dots + \frac{b_{mW'_m}}{(s-\hat{\xi}_m)^{W'_m}} \right\} \quad (2-16)$$

$$B_m(s) \text{ の極} : \hat{\xi}_m \text{ (多重度 } W'_m) \quad \hat{\xi}_m = \{s \mid \operatorname{Re}(s) < 0\}$$

これらの極はすべて分離可能な孤立特異点であり、 N, M は可算無限個でもよいものとする。

<演算 \boxtimes について>

x の関数 $f(x), g(x)$ は共にラプラス変換可能で、 $x < 0$ では $f(x) = g(x) = 0$ であるものとする。また、次のラプラス変換を導入し、極を規定する。

$$F(s) \triangleq \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx = \sum_{R} F_R(s) = \sum_{R} \left\{ \frac{f_{R1}}{(s-\eta_R)} + \frac{f_{R2}}{(s-\eta_R)^2} + \dots + \frac{f_{RW_R}}{(s-\eta_R)^{W_R}} \right\}$$

$$G(s) \triangleq \int_0^{\infty} g(x) e^{-sx} dx = \sum_{L} G_L(s) = \sum_{L} \left\{ \frac{g_{L1}}{(s-\xi_L)} + \frac{g_{L2}}{(s-\xi_L)^2} + \dots + \frac{g_{LW'_L}}{(s-\xi_L)^{W'_L}} \right\}$$

このとき、演算 \boxtimes を次のように定義し、それぞれ次式で計算することができる。

$$F(s) \boxtimes G(-s) \triangleq \mathcal{L}[f(x) \otimes g(-x)]$$

$$= -\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} dr \frac{[F(s) - F(-r)]}{r+s} G(r)$$

($F(r)$ が $\text{Re}(r) > 0$ で解析的であるならば)

$$= \begin{cases} \sum_k F_k(s) G(-\gamma_k) \\ \sum_l [F(s) - F(-\xi_l)] G_l(-s) \end{cases} \quad (2-17)$$

$$F(s) \boxtimes G(s) \triangleq -\frac{1}{2\pi j} \int_c dr \frac{[F(s) - F(-r)]}{r+s} G(-r)$$

$$= \begin{cases} \sum_k F_k(s) G(\gamma_k) \\ \sum_l [F(s) - F(\xi_l)] G_l(s) \end{cases} \quad (2-18)$$

$$F(-s) \boxtimes G(-s) \triangleq -\frac{1}{2\pi j} \int_c dr \frac{[F(-s) - F(r)]}{r+s} G(r)$$

$$= \begin{cases} \sum_k F_k(-s) G(\gamma_k) \\ \sum_l [F(-s) - F(\xi_l)] G_l(-s) \end{cases} \quad (2-19)$$

また次式が成立する。

$$F(s) G(s) = F(s) \boxtimes G(s) + G(s) \boxtimes F(s) \quad (2-20)$$

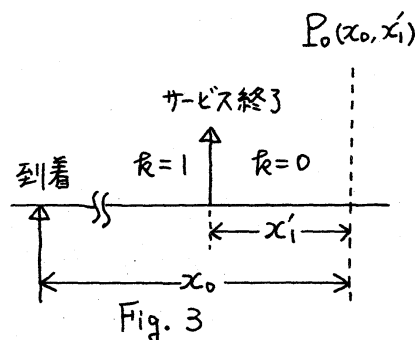
$$F(-s) G(-s) = F(-s) \boxtimes G(-s) + G(-s) \boxtimes F(-s)$$

3. 境界条件

Fig. 2 において点線の左側、及び境界において成立する条件についてみる。

i) $k=0$ のとき

フローグラフにおいて、 $k=1$ のときにサービスが終了すると状態 S_0 に流入し、その瞬間に経過サ



サービス時間 x_1 は 0 になり、次の到着があるまでこの 0 は保持されたままであるが、Fig. 3 のように、系が idle 状態になってからどれくらい経過したかを示す仮りサービス時間 x'_1 を導入する。このとき次式は状態遷移方程式を満たしている。

$$P_0(x_0, x'_1) = [1 - A(x_0)] \tilde{P}_0(x_0, x'_1) \quad (3-1)$$

条件付確率より

$$\tilde{P}_0(x_0, x'_1) = \tilde{P}_0(x_0 - x'_1, 0) \triangleq \tilde{P}_0(x_0 - x'_1) = \frac{P_0(x_0 - x'_1, 0)}{1 - A(x_0 - x'_1)} \quad (3-2)$$

ii) $n=1$ のとき

idle 状態であるときに到着があると状態 S_1 に流入するが、この瞬間、 x_0, x_1 は共に 0 になり同じ値をとりながら増加してゆく。従って $P_1(x_0, x_1)$ は $x_0 \geq x_1$ のときに限り非零の値をもつ。

$$\tilde{P}_1(x_0, x_1) = \begin{cases} \hat{P}_1^+(x_0 - x_1) & (x_0 > x_1) \\ \tilde{P}_1^-(x_1 - x_0) = P \delta(x_1 - x_0) & (x_0 \leq x_1) \end{cases} \quad (3-3)$$

$$P_1(x_0, x_1) = \begin{cases} [1 - A(x_0)][1 - B(x_1)] \hat{P}_1^+(x_0 - x_1) & (x_0 > x_1) \\ [1 - A(x_0)][1 - B(x_1)] P \delta(x_1 - x_0) & (x_0 \leq x_1) \end{cases} \quad (3-4)$$

$$\text{但し } P_1(0, 0) = \tilde{P}_1^-(0) \triangleq P (= \tilde{P}_1^-(s))$$

ここで $(1, x_0, x_1) \rightarrow (0, x_0, 0)$ の状態推移より

$$\tilde{P}_0(s) = B(s) \hat{P}_1^+(s) + B(s) P \quad (3-5)$$

また $(0, x_0, x'_1) \rightarrow (1, 0, 0)$ の状態推移より

$$P = \sum_n A_n(0) \tilde{P}_0(-\hat{\lambda}_n) \quad (3-6)$$

次の(3-7)式が成立すれば、それは常に(3-6)式を満たしている。

$$\tilde{P}_0(-\hat{\eta}_n) = P \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (3-7)$$

(3-5)式において $s \rightarrow -\hat{\eta}_n$ とすると

$$\tilde{P}_1^+(-\hat{\eta}_n) = \left[\frac{1 - B(-\hat{\eta}_n)}{B(-\hat{\eta}_n)} \right] P \quad (3-8)$$

(3-5)式において $s \rightarrow \hat{\xi}_m$ としたとき $\tilde{P}_0(\hat{\xi}_m)$ が有限値をとる為には次式が成立しなければならない。

$$\tilde{P}_1^+(\hat{\xi}_m) = -P \quad (3-9)$$

以上の(3-5)~(3-9)式が境界条件から導出された式で、後に母関数の解を求めてからそれと結びつけて真の母関数を求めるための式である。

4. マトリックス表示

母関数を用いた基本方程式をラプラス変換表示した式は、(2-13)、(2-14)式で表わされていたが、次のようなマトリックスを用いると $\tilde{Q}^+(z, s)$, $\tilde{Q}^*(z, s)$ は(4-1)、(4-2)式のように表現することができる。

$$A(s) = [A_1(s) \ A_2(s) \ \dots \ A_N(s)]$$

$$B(s) = [B_1(s) \ B_2(s) \ \dots \ B_M(s)]$$

$$\tilde{Q}^+(z, -\hat{\eta}) = [\tilde{Q}^+(z, -\hat{\eta}_1) \ \tilde{Q}^+(z, -\hat{\eta}_2) \ \dots \ \tilde{Q}^+(z, -\hat{\eta}_N)]$$

$$\tilde{Q}^*(z, -\hat{\xi}) = [\tilde{Q}^*(z, -\hat{\xi}_1) \ \tilde{Q}^*(z, -\hat{\xi}_2) \ \dots \ \tilde{Q}^*(z, -\hat{\xi}_M)]$$

$$\hat{\mathbf{P}}_1^+(-\hat{\gamma}) = [\hat{\mathbf{P}}_1^+(-\hat{\gamma}_1) \hat{\mathbf{P}}_1^+(-\hat{\gamma}_2) \cdots \hat{\mathbf{P}}_1^+(-\hat{\gamma}_N)] = \left[\frac{1-B(-\hat{\gamma}_1)}{B(-\hat{\gamma}_1)} P \cdots \frac{1-B(-\hat{\gamma}_N)}{B(-\hat{\gamma}_N)} P \right]$$

$$\mathbf{P} = [P \ P \ \cdots \ P] \quad (1 \times M) \text{ 行列}$$

$$\|\tilde{\mathbf{A}}(-\hat{\xi})\| = \begin{bmatrix} \frac{A_1(-\hat{\xi}_1)}{1-zA(-\hat{\xi}_1)} & \cdots & \frac{A_N(-\hat{\xi}_1)}{1-zA(-\hat{\xi}_1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_1(-\hat{\xi}_M)}{1-zA(-\hat{\xi}_M)} & \cdots & \frac{A_N(-\hat{\xi}_M)}{1-zA(-\hat{\xi}_M)} \end{bmatrix}$$

$$\|\tilde{\mathbf{B}}(-\hat{\gamma})\| = \begin{bmatrix} \frac{B_1(-\hat{\gamma}_1)}{1-z^{-1}B(-\hat{\gamma}_1)} & \cdots & \frac{B_M(-\hat{\gamma}_1)}{1-z^{-1}B(-\hat{\gamma}_1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{B_1(-\hat{\gamma}_N)}{1-z^{-1}B(-\hat{\gamma}_N)} & \cdots & \frac{B_M(-\hat{\gamma}_N)}{1-z^{-1}B(-\hat{\gamma}_N)} \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}(-\hat{\xi})\| = \begin{bmatrix} \frac{A(-\hat{\xi}_1)}{1-zA(-\hat{\xi}_1)} & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & \frac{A(-\hat{\xi}_M)}{1-zA(-\hat{\xi}_M)} \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{B}(-\hat{\gamma})\| = \begin{bmatrix} \frac{B(-\hat{\gamma}_1)}{1-z^{-1}B(-\hat{\gamma}_1)} & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & \frac{B(-\hat{\gamma}_N)}{1-z^{-1}B(-\hat{\gamma}_N)} \end{bmatrix}$$

$\|\mathbf{1}_M\|$: $(M \times M)$ の要素 1 の行列

$\|\mathbf{1}_N\|$: $(N \times N)$ の要素 1 の行列

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^+(z, s) &= \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}B(s)} B(s) \left[\|\mathbf{1}_M\| - \|\tilde{A}(-\frac{z}{s})\| \|\tilde{B}(-\hat{\eta})\| \right]^{-1} \\ &\quad \cdot \left[-\|\tilde{A}(-\frac{z}{s})\| \|\tilde{B}(-\hat{\eta})\| \tilde{P}_1^{+T}(-\hat{\eta}) + z \|A(-\frac{z}{s})\| P^T \right] \\ &\quad - \frac{z^{-1}B(s)}{1 - z^{-1}B(s)} \tilde{P}_1^+(s) \end{aligned} \quad (4-1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{*+}(z, s) &= \frac{z}{1 - zA(s)} A(s) \left[\|\mathbf{1}_N\| - \|\tilde{B}(-\hat{\eta})\| \|\tilde{A}(-\frac{z}{s})\| \right]^{-1} \\ &\quad \cdot \left[\|\tilde{B}(-\hat{\eta})\| \|A(-\frac{z}{s})\| P^T - z^{-1} \|\tilde{B}(-\hat{\eta})\| \tilde{P}_1^{+T}(-\hat{\eta}) \right] \\ &\quad + \frac{zA(s)}{1 - zA(s)} P \end{aligned} \quad (4-2)$$

但し、 T は転置を表わす。

ここで(4-1)式において、ルーシエの定理を適用すると、右辺の分母は、単位円内($|z| < 1$)に唯一個の零点 $z = B(s)$ をもつことが示され得る。また、 $|z| < 1$, $\text{Re}(s) > 0$ の領域では、 $\tilde{Q}^+(z, s)$ は解析的であるから、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1^+(s) &= \frac{1}{B(s)} B(s) \left[\|\mathbf{1}_M\| - \|\tilde{A}^+(-\frac{z}{s})\| \|\tilde{B}^+(-\hat{\eta})\| \right]^{-1} \\ &\quad \cdot \left[-\|\tilde{A}^+(-\frac{z}{s})\| \|\tilde{B}^+(-\hat{\eta})\| \tilde{P}_1^{+T}(-\hat{\eta}) + B(s) \|A^+(-\frac{z}{s})\| P^T \right] \end{aligned} \quad (4-3)$$

但し

$\|\tilde{A}^+(-\frac{z}{s})\|$, $\|\tilde{B}^+(-\hat{\eta})\|$, $\|A^+(-\frac{z}{s})\|$, $\|B^+(-\hat{\eta})\|$ はそれぞれ
 $\|\tilde{A}(-\frac{z}{s})\|$, $\|\tilde{B}(-\hat{\eta})\|$, $\|A(-\frac{z}{s})\|$, $\|B(-\hat{\eta})\|$ において z の代わりに
 $B(s)$ とおいたものである。

(4-3)式によって、 $\tilde{P}_1^+(s)$ も定数 P を用いて表わされる。従って $A(s)$, $B(s)$ が与えられると(4-1), (4-2)式によって $\tilde{Q}^+(z, s)$,

$\tilde{Q}^{\pm}(z, s)$ が P で表わされることになるが、この P は次の手順によって求められた $Q(z)$ を用いて、正規化条件 $Q(1) = 1 - P_0 = \rho$ により決定することになる。

$$\tilde{Q}^{\pm}(z, s) \xrightarrow{\textcircled{1}} \tilde{Q}^{\pm}(z, x) \xrightarrow{\textcircled{2}} Q^{\pm}(z, x_0, x_1), Q^{\pm}(z, x_0, x_1) \xrightarrow{\textcircled{3}} Q^{\pm}(z) \xrightarrow{\textcircled{4}} Q(z) = Q^+(z) + Q^-(z)$$

①ラプラス逆変換 ② $[1-A(x_0)][1-B(x_1)]$ を乗じる ③ x_0, x_1 について積分 ④加算

5. $\tilde{P}_1^+(s)$ と母関数について

マトリックスを用いて $\tilde{Q}^+(z, s), \tilde{Q}^{\pm}(z, s)$ は (4-1), (4-2) 式のように表現できたが、演算 \boxtimes によってさらにその形を簡略化して表わす。(4-1) 式右辺第 1 項において極として考えられるのは $1 - z^{-1}B(s) = 0$ の根である。これの s に関する根を $\tilde{z}(z)$ とすると $B(\tilde{z}(z)) = z$ が成立する。このとき (4-1) 式は次式のように書き表わせる。

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^+(z, s) = & \frac{z^{-1}B(s)}{1-z^{-1}B(s)} \cdot \frac{B(s)}{B(s)} \left[\|\mathbf{1}\| - \|\tilde{A}^{\circ}(-\tilde{z})\| \|\tilde{B}^{\circ}(-\hat{\eta})\| \right]^{-1} \\ & \cdot \left[-\|\tilde{A}^{\circ}(-\tilde{z})\| \|\tilde{B}^{\circ}(-\hat{\eta})\| \tilde{P}_1^T(-\hat{\eta}) + B(\tilde{z}(z)) \|\tilde{A}^{\circ}(-\tilde{z})\| \mathbf{P}^T \right] \\ & - \frac{z^{-1}B(s)}{1-z^{-1}B(s)} \tilde{P}_1^+(s) \end{aligned}$$

但し $\|\tilde{A}^{\circ}(-\tilde{z})\|, \|\tilde{B}^{\circ}(-\hat{\eta})\|, \|\tilde{A}^{\circ}(-\tilde{z})\|, \|\tilde{B}^{\circ}(-\hat{\eta})\|$ はそれぞれ

$\|\tilde{A}^{\circ}(-\tilde{z})\|, \|\tilde{B}^{\circ}(-\hat{\eta})\|, \|\tilde{A}^{\circ}(-\tilde{z})\|, \|\tilde{B}^{\circ}(-\hat{\eta})\|$ において z の代わりに $B(\tilde{z}(z))$ とおいたものである。

(2-18)式を用いると上式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\tilde{Q}^+(z, s) &= \left[\frac{z^{-1}B(s)}{1-z^{-1}B(s)} \right] \boxtimes \tilde{P}_1^+(s) - \frac{z^{-1}B(s)}{1-z^{-1}B(s)} \tilde{P}_1^+(s) \\ &= -\tilde{P}_1^+(s) \boxtimes \left[\frac{z^{-1}B(s)}{1-z^{-1}B(s)} \right]\end{aligned}\quad (5-1)$$

上式を(2-14)式に代入して

$$\tilde{Q}^{\pm}(z, s) = -\frac{z}{1-zA(s)} A(s) \boxtimes \left\{ \tilde{P}_1^+(s) \boxtimes \left[\frac{z^{-1}B(s)}{1-z^{-1}B(s)} \right] \right\} + \frac{zA(s)}{1-zA(s)} P \quad (5-2)$$

演算 \boxtimes の性質を考慮して上式をみると、 s の極として存在するのは $\tilde{Q}^+(z, s)$ では $\tilde{P}_1^+(s)$ の極、 $\tilde{Q}^{\pm}(z, s)$ では $1-zA(s)=0$ の根であることがわかる。ここで(2-13)式においてルーシェの定理を適用し、また $\tilde{Q}^+(z, s)$ の解析性を考慮し、さらに(3-8)、(3-9)式の条件を考えながら演算 \boxtimes を計算すると結局次式が得られる。

$$\tilde{P}_1^+(s) = \frac{[B(s)-1]A(-s)}{1-B(s)A(-s)} P \quad (5-3)$$

上式を用いると(5-1)、(5-2)式より

$$\tilde{Q}^+(z, s) = -\left[\frac{[B(s)-1]A(-s)}{1-B(s)A(-s)} \right] \boxtimes \left[\frac{z^{-1}B(s)}{1-z^{-1}B(s)} \right] P \quad (5-4)$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}^{\pm}(z, s) &= -\frac{z}{1-zA(s)} A(s) \boxtimes \left\{ \left[\frac{[B(s)-1]A(s)}{1-B(s)A(s)} \right] \boxtimes \left[\frac{z^{-1}B(s)}{1-z^{-1}B(s)} \right] \right\} P \\ &\quad + \frac{zA(s)}{1-zA(s)} P\end{aligned}\quad (5-5)$$

(5-3)~(5-5)式を用いて $GI/G/1$ の母関数の形を求める。

$\tilde{Q}^+(z, s)$ の s に関する極、即ち $1 - B(s)A(-s) = 0$ の根を ϕ_ν ,
 $\tilde{Q}^*(z, s)$ の s に関する極、即ち $1 - zA(s) = 0$ の根を $\eta_i(z)$ とす
 ると、一般に、 $A(s), B(s)$ が s の有理関数で与えられたときに
 これらはそれぞれ複數個存在する。また $\tilde{Q}^+(z, s), \tilde{Q}^*(z, s)$ の z
 に関する極を z_ν とすると、(5-4), (5-5)式より、 z_ν は、

$1 - z_\nu^{-1}B(\phi_\nu) = 0, 1 - z_\nu A(-\phi_\nu) = 0$ を満足する。(5-4), (5-5)式
 より s に関する極について陽表現し、留数を考えると次式が
 得られる。

$$\tilde{Q}^+(z, s) = \sum_{\nu} \frac{z^{-1}[B(\phi_\nu) - 1]}{(s - \phi_\nu)[1 - z^{-1}B(\phi_\nu)]G(\phi_\nu)} P \quad (5-6)$$

$$\tilde{Q}^*(z, s) = \sum_i \frac{z^{-1}}{(s - \eta_i(z))A''(\eta_i(z))} \left\{ \sum_{\nu} \frac{[A(\eta_i(z)) - A(-\phi_\nu)][B(\phi_\nu) - 1]}{[\eta_i(z) + \phi_\nu][1 - z^{-1}B(\phi_\nu)]G(\phi_\nu)} - 1 \right\} P \quad (5-7)$$

但し $\lim_{s \rightarrow \phi_\nu} \frac{1 - B(s)A(-s)}{s - \phi_\nu} = -B''(\phi_\nu)A(-\phi_\nu) + B(\phi_\nu)A''(-\phi_\nu) \triangleq -G(\phi_\nu)$

(5-6), (5-7)式をラプラス逆変換し、 $[1 - A(x_0)][1 - B(x_1)]$ をかけて、
 x_0, x_1 について積分すると次式が得られる。

$$Q(z) = \sum_{\nu} \frac{B(\phi_\nu) - 1}{[z - B(\phi_\nu)]G(\phi_\nu)} \left\{ I^+(\phi_\nu) - \sum_i \frac{A(\eta_i(z)) - A(-\phi_\nu)}{A''(\eta_i(z))[\eta_i(z) + \phi_\nu]} I^+(-\eta_i(z)) \right\} P \\
- \sum_i \frac{1}{A''(\eta_i(z))} \left\{ \sum_{\nu} \frac{[A(\eta_i(z)) - A(-\phi_\nu)][B(\phi_\nu) - 1]}{[z - B(\phi_\nu)][\eta_i(z) + \phi_\nu]G(\phi_\nu)} - z^{-1} \right\} \hat{I}(\eta_i(z)) P \\
+ \left\{ \sum_i \frac{z^{-1}}{A''(\eta_i(z))} I^+(-\eta_i(z)) + I_0 \right\} P \quad (5-8)$$

$$\begin{aligned} \text{但し } I^+(\Phi_\nu) &= - \sum_n \frac{A_n(-\Phi_\nu)}{\eta_n(0)} \cdot \frac{B(-\eta_n(0)) - 1}{\eta_n(0)} \\ \hat{I}(\eta_i(z)) &= \sum_n \frac{A_n(\eta_i(z))}{\eta_n(0)} \cdot \frac{B(-\eta_i(z)) - 1}{\eta_i(z)} \\ I_0 &= \sum_n A_n(0) \frac{B(-\eta_n(0)) - 1}{\eta_n(0)} \end{aligned}$$

(5-8)式で、 z の極として考えられるのは $z = z_\nu$ であるが、第3項はこの極をもたないから留数計算により0になる。また、 $E_2/M/1$ の例では明らかであるが、一般に、

$$\lim_{z \rightarrow z_\nu} \eta_i(z) = -\Phi_\nu$$

が成立するようなら各 i に対して唯一個のみ存在し、 i と ν は1対1に対応するであろうということが推定される。ここで ν に対応する i を i_ν と表わすことにすると、上式第1項において $i = i_\nu$ のとき

$$\lim_{z \rightarrow z_\nu} \frac{A(\eta_i(z)) - A(-\Phi_\nu)}{A''(\eta_i(z))[\eta_i(z) + \Phi_\nu]} I^+(-\eta_i(z)) = I^+(\Phi_\nu)$$

となり、カッコ内では $i = i_\nu$ である項が残るが、この項の総和は0であると仮定する。(E₂/M/1の例では成立)このとき、残った第2項を整理して積形式で表わすと次式が得られる。

$$Q(z) = \frac{(1-z)[1-B(-\eta(z))]}{[z-B(-\eta(z))]\eta(z)} P \quad (5-9)$$

ここで $Q(1) = P$ より $P = \frac{1}{\bar{X}_0} (1-P)$ と求まる。但し \bar{X}_0 は平均到着時間間隔。従って真の母関数 $G_0(z)$ は次のようになる。

$$G_0(z) = zQ(z) + P_0$$

$$= (1-\rho) \left\{ \frac{z(1-z)[1-B(-\eta(z))]}{\bar{X}_0 \eta(z)[z-B(-\eta(z))]} + 1 \right\} \quad (5-10)$$

上式のように GI/G/1 の母関数が求まるが、M/M/1 では、

$$G_0(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

また M/G/1 では

$$G_0(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)B(\lambda-\lambda z)}{B(\lambda-\lambda z)-z} \quad (\text{Pollaczek-Khinchin 変換式})$$

という既知の結果が導かれる。

6. おわりに

GI/G/1 において、経過到着時間、経過サービス時間を補助変数にとり、客の到着過程、サービス過程を相型分布で与えたときの定常状態での系内容数分布の母関数表現を求めた。4節ではマトリックス表現で母関数を与えている。5節では演算図及びその性質を用いて方程式を簡略化して表わし、母関数表現を導いた。その結果、M/M/1、M/G/1 では既知の結果に一致することがわかる。演算図を用いることによって、方程式からの解の導出を、複素積分中の極の取り扱いの問題に転化させたわけであるが、この意味からも、サーバー数が複数の場合でも取り扱える可能性があるように思われる。但し、母関数導出の際に、 $z=1$ であるときの項の総和が 0 にな

るという仮定や、 $\eta(z)$, $\eta''(z)$ がどのような性質の関数であるかなどはさらに調べる必要性がある。また GI/M/1 の母関数導出の際に極の取り扱いに問題点があり、これについては検討中である。

＜参考文献＞

- [1] Cox, D.R. : "The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables," Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 51 (1955), pp. 433-441.
- [2] Henderson, W. : "Alternative Approaches to the Analysis of the M/G/1 Queues," J. Operations Research Soc. of Japan, Vol. 15 (1972), pp. 92-101.
- [3] Hokstad, P. : "A Supplementary Variable Technique Applied to the M/G/1 Queue," Scand. J. Statist., Vol. 2 (1975), pp. 95-98.
- [4] _____ : "Approximations for the M/G/m Queue," Operations Research, Vol. 26 (1978), pp. 510-523.
- [5] _____ : "On the steady-state solution of the M/G/2 queue," Adv. Appl. Prob., Vol. 11 (1979), pp. 240-255.
- [6] Kleinrock, L. : Queueing Systems, Vol. 1 Theory, Wiley Interscience (1974).
- [7] Keilson, J. and Kooharian, A. : "On the general time dependent queue with a single server," Ann. Math. Statist., Vol. 33 (1962), pp. 767-791.
- [8] 能上慎也 : "状態変数を用いた待ち行列理論," 東北大学

工学部 修士論文 (昭56-02).

[9] 能上, 菰田, 星子: "補助変数法による M/G/1 の解析,"
信学技報 SE 81-3 (昭56-04).

[10] _____: "補助変数法による GI/M/1 の解析,"
信学技報 SE 81-4 (昭56-05).