数理解析研究所講究録
第 454 巻 1982 年 378-395

整礎集合上の述語の微分について

新潟大学経済学部　西澤輝泰

与えられた正規集合から，それの微分（*derivative*）を次々とっていってその正規集合を受理する有限オートマトンを構成する手法は１つの自動プログラミング手法であり，自動プログラミングの研究にとってこうした微分なる概念を拡張することは有益であると思われる。実際［２］では明確に定式化してはいないけれどもそうした考え方を用いてLISPプログラムの自動合成システムを与えている。微分の拡張は様々な方向があり得ると思われるが，ここでは１つの拡張例を述べる。

§１．１引数の場合の記号列による微分

$\mathbb{W}$を整礎集合，Hを$\mathbb{W}$の部分集合で$\mathbb{W}$の極小元を含まないものとし，$\mathbb{B}=\{B_\sigma\ ;\ \sigma\in\Sigma\}$ を H の有限分割，関数 $f: H \longrightarrow \mathbb{W}$ を，$(\forall x \in H)\ f(x) \lneq x$ をみたすもの

とする。また，PをW上の1引数述語とする。

PがWの部分集合S上で一定値をとるとき，その値を$P(S)$で表す。

<u>定義1</u>　Pが系$(\mathbb{B}, f)$に関して$\sigma \in \Sigma$により微分可能であるとは，任意の$x \in W$に対し，もし$f^{-1}(x) \cap B_\sigma$が空でなければその上でPの値が一定であることをいう。（ただし，$f^{-1}(x) = \{y \in H \,;\, f(y) = x\}$である。）

また，$\Gamma = (\mathbb{B}, f)$に関してPが任意の$\sigma \in \Sigma$により微分可能であるときは，単に，Γに関して微分可能という。

以後$f^{-1}(x) \cap B_\sigma$を$G_\sigma(x)$で表し，系$(\mathbb{B}, f)$をΓで表す。

<u>定義2</u>　PがΓに関して$\sigma \in \Sigma$により微分可能であるとき，Γに関するPの，σによる微分$\partial_\sigma^\Gamma P$を，

$$\partial_\sigma^\Gamma P\ (x) \longleftrightarrow G_\sigma(x) \neq \phi \wedge P(G_\sigma(x))$$

により定める。

<u>命題1</u>　PがΓに関して微分可能であるとき，任意の$x \in H$に対し

$$P(x) \longleftrightarrow \bigvee_{\sigma \in \Sigma} (\, x \in B_\sigma \wedge \partial_\sigma^\Gamma P(f(x))\,)$$

［証明］ $x \in H$ に対し

$$P(x) \wedge x \in B_\sigma \longleftrightarrow P(G_\sigma(f(x))) \longleftrightarrow \partial_\sigma^\Gamma P(f(x))$$

により明らか。

定義３ Γ に関する P の，$u \in \Sigma^*$ による微分可能性と，その微分 $\partial_u^\Gamma P$ とを次のように帰納的に定める。

Γ に関して，

(1) P は ε（空語）により微分可能であり，$\partial_\varepsilon^\Gamma P = P$

(2) P が $u \in \Sigma^*$ により微分可能であるとき，$\sigma \in \Sigma$ に対し $\partial_u^\Gamma P$ が σ により微分可能であれば P は $u\sigma$ により微分可能であって，$\partial_{u\sigma}^\Gamma P = \partial_\sigma^\Gamma(\partial_u^\Gamma P)$ である。

P が Γ に関して任意の $u \in \Sigma^*$ により微分可能であるとき，P は Γ に関して任意に微分可能である，という。

命題２ 各 $\sigma \in \Sigma$ に対し，$f|B_\sigma$ が１対１であれば，任意の P は Γ に関して任意に微分可能である。

定義４ P が Γ－正規述語であるとは，P が Γ に関して任意に微分可能であって，Γ に関する P の微分が有限個しかな

いことをいう。

以後 σ は Σ の元，u, v, w は Σ^* の元を表わすものとする。

<u>定理1</u> P, Q を Γ－正規な述語とすると，$P \wedge Q$，$P \vee Q$ は Γ－正規であり，更にもし任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し $f|B_\sigma$ が onto であれば $\neg P$ も Γ－正規である。

［証明］ θ を $\wedge$ 又は $\vee$ とすると，

$$\partial_\sigma^\Gamma (P \theta Q)(x) \longleftrightarrow G_\sigma(x) \neq \phi \wedge (P \theta Q)(G_\sigma(x))$$

$$\longleftrightarrow (G_\sigma(x) \neq \phi \wedge P(G_\sigma(x))) \theta (G_\sigma(x) \neq \phi \wedge Q(G_\sigma(x)))$$

$$\longleftrightarrow \partial_\sigma^\Gamma P(x) \ \theta \ \partial_\sigma^\Gamma Q(x)$$

$$\therefore \ \partial_\sigma^\Gamma (P \theta Q) = \partial_\sigma^\Gamma P \ \theta \ \partial_\sigma^\Gamma Q$$

よって任意の $u \in \Sigma^*$ に対し $\partial_u^\Gamma (P \theta Q) = \partial_u^\Gamma P \ \theta \ \partial_u^\Gamma Q$ であるから $P \theta Q$ の微分は有限個であり $P \theta Q$ は Γ－正規である。次に，$f|B_\sigma$ が onto であれば，任意の $x \in W$ に対し $G_\sigma(x) \neq \phi$ であるから，$\partial_\sigma^\Gamma P(x) \longleftrightarrow P(G_\sigma(x))$ であり，$\partial_\sigma^\Gamma (\neg P)(x) \longleftrightarrow \neg P(G_\sigma(x)) \longleftrightarrow \neg \partial_\sigma^\Gamma P(x)$ 即ちやはり任意の u に対して $\partial_u^\Gamma (\neg P) = \neg \partial_u^\Gamma P$ であって $\neg P$ の微分は有限個しか無く，$\neg P$ も Γ－正規である。

<u>定義5</u>　PがΓに関して任意に微分可能とする。Σ^*上の同値関係Rが　Γの下でPと整合である．とは，Rが任意のu, $v\in\Sigma^*$に対し，

$$uRv \longrightarrow (\forall x\in\overline{W}-H)\left[\partial_u^\Gamma P(x)\equiv\partial_v^\Gamma P(x)\right]$$

をみたすことをいう。

この定義により直ちに次のようなMyhill-Nerodeの定理の拡張が成りたつ。

<u>定理2</u>　PがΓに関して任意に微分可能であるとき，PがΓ－正規であるための必要十分条件は，Σ^*上の同値関係Rで，Pと整合，有限指数（i.e. 同値類が有限個）かつ右不変（i.e. $uRv \longrightarrow (\forall w\in\Sigma^*)\ uwRvw$　）なものが存在することである。

［証明］　<u>必要性</u>：　PがΓ－正規であるとき，Σ^*上の同値関係Rを，　$uRv \longleftrightarrow \partial_u^\Gamma P=\partial_v^\Gamma P$　で定めれば，Rは所定の要件をみたす。

<u>十分性</u>：　Pと整合，右不変かつ有限指数であるようなΣ^*上の同値関係Rが存在したとする。今，$u, v\in\Sigma^*$がuRvをみたすとし，$x\in\overline{W}$を任意にとる。xに対し

$x \in B_{\sigma_1} \wedge f(x) \in B_{\sigma_2} \wedge \cdots \wedge f^{k-1}(x) \in B_{\sigma_k} \wedge f^k(x) \in \varpi - H$ なる Σ^* の元 $z = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k$ が唯1つ存在する。($x \in \varpi - H$ なら $k=0$, $z=\varepsilon$, $f^k(x)=x$ である。) この z に対し，命題1の反復適用により

$\partial_u^\Gamma P(x) \longleftrightarrow \partial_{uz}^\Gamma(f^k(x))$, $\partial_v^\Gamma P(x) \longleftrightarrow \partial_{vz}^\Gamma(f^k(x))$

が成り立ち，また R の右不変性により $uz\,R\,vz$ である。R が P と整合で，$f^k(x) \in \varpi - H$ であるから，

$\partial_{uz}^\Gamma P(f^k(x)) \longleftrightarrow \partial_{vz}^\Gamma P(f^k(x))$

よって，$\partial_u^\Gamma P(x) \longleftrightarrow \partial_v^\Gamma P(x)$ を得る。即ち，

$uRv \longrightarrow \partial_u^\Gamma P = \partial_v^\Gamma P$ が成り立つ。R は有限指数であるから P の微分は有限個しかなく，P は Γ－正規である。

<u>定義6</u>　P が Γ に関して任意に微分可能であるとき，P に Γ－随伴な Σ 上の言語 $\mathcal{L}_P^\Gamma$ を次により定める。

$\mathcal{L}_P^\Gamma = \{ u \in \Sigma^* ; (\exists x \in \varpi - H)\ \partial_u^\Gamma P(x) \equiv true \}$

この定義により Γ－正規述語と正規集合との対応について次の定理が得られる。

<u>定理3</u>　P が Γ－正規であれば，$\mathcal{L}_P^\Gamma$ は Σ 上の正規集合である。また，P が Γ に関して任意に微分可能で，P の任意の

微分が $\varpi-H$ 上で一定値をとるならば，この逆も成り立つ。

［証明］　P が Γ に関して任意に微分可能とする。Σ^* 上の任意の同値関係 R について，R が P と整合ならば U_P^Γ と整合（i.e. $uRv \longrightarrow (u\in U_P^\Gamma \equiv v\in U_P^\Gamma)$）であり，また Γ に関する P の任意の微分が $\varpi-H$ 上で一定値をとるときは，逆に，R が U_P^Γ と整合ならば P と整合であることを示せばよい。R が P と整合ならば，$u,v\in\Sigma^*$ が uRv とすると，$(\forall x\in\varpi-H)\,[\partial_u^\Gamma P(x)\longleftrightarrow \partial_v^\Gamma P(x)]$，よって，

$$[(\exists x\in\varpi-H)\,\partial_u^\Gamma P(x)\equiv true]\longleftrightarrow[(\exists x\in\varpi-H)\,\partial_v^\Gamma P(x)\equiv true]$$

，即ち $u\in U_P^\Gamma\longleftrightarrow v\in U_P^\Gamma$ が成り立ち R は U_P^Γ と整合である。また，P の任意の微分が $\varpi-H$ 上で一定値をとるときは，R が U_P^Γ と整合ならば，uRv とすると

$$\partial_u^\Gamma P(\varpi-H)\equiv true \longleftrightarrow \partial_v^\Gamma P(\varpi-H)\equiv true$$

により $(\forall x\in\varpi-H)\,[\partial_u^\Gamma P(x)\longleftrightarrow \partial_v^\Gamma P(x)]$ が成り立ち，R は P と整合である。

<u>系</u>　ϖ が最小元 ω をもち，$H=\varpi-\{\omega\}$ であれば，Γ に関して任意に微分可能な P に対し，

$$P \text{ が } \Gamma\text{-正規述語} \longleftrightarrow U_P^\Gamma \text{ が正規集合}.$$

さて，$\mathbb{P}$がΓに関して任意に微分可能とする。$\mathbb{P}$の任意の微分が $\mathbb{W}-H$ 上で一定値をとる，ということが成り立たないとき，$\mathbb{W}-H$ の有限分割 $\mathbb{C}=\{C_\delta ; \delta\in\Delta\}$（ただし，$\Delta\cap\Sigma=\phi$）を仮定し，$\Gamma$に関する任意の微分が各$C_\delta$上で一定値をとる，という条件を考え，これを，$\mathbb{P}$は$(\Gamma,\mathbb{C})$に関して任意に微分可能，ということにし，このとき，$u\in\Sigma^*$，$\delta\in\Delta$ に対し $\partial_u^\Gamma\mathbb{P}(C_\delta)$ を $\partial_{u\delta}^\Gamma\mathbb{P}$ で表す。$\partial_{u\delta}^\Gamma P$は定数である。これにより，

__定理 4__　$\mathbb{P}$が$(\Gamma,\mathbb{C})$に関して任意に微分可能であるとき，$\mathbb{P}$がΓ－正規であるための必要十分条件は

$$V_{\mathbb{P}}^{\Gamma,\mathbb{C}}=\{u\delta ; u\in\Sigma^* \wedge \delta\in\Delta \wedge \partial_{u\delta}^\Gamma P=true\}$$

なる集合が正規集合となることである。

［証明］　$\mathbb{W}$に新たな要素$\perp$を最小元としてつけ加えて $\mathbb{W}'=\mathbb{W}\cup\{\perp\}$ とし，$\mathbb{P}$を$\mathbb{W}'$上の述語$\mathbb{P}'$に，$\mathbb{P}'(\perp)\equiv false$ として拡張する。$H'=\mathbb{W}$，$\mathbb{B}'=\mathbb{B}\cup\mathbb{C}$ とおき，関数$f':H'\to\mathbb{W}'$を，$f'(x)=$ if $x\in H$ then $f(x)$ else $\perp$ として定め，系$\Gamma'=(\mathbb{B}',f')$を考える。定理の条件から $\mathbb{P}'$はΓ'に関して任意に微分可能である。Γ'に関する$\mathbb{P}'$の微分は

$u\in\Sigma^*$，$\delta\in\Delta$，$v\in(\Sigma\cup\Delta)^+$ に対し

$$
\begin{cases}
\partial_u^{\Gamma'} P'(x) \longleftrightarrow \text{if } x\in\overline{W} \text{ then } \partial_u^{\Gamma} P(x) \text{ else false} \\
\partial_{u\delta}^{\Gamma'} P'(x) \longleftrightarrow \text{if } x\in\overline{W} \text{ then false else } \partial_{u\delta}^{\Gamma} P \\
\partial_{u\delta v}^{\Gamma'} P'(x) \longleftrightarrow \text{false}
\end{cases}
$$

となり，Pの微分が有限個であるときかつそのときに限りP'の微分は有限個，即ちP'はΓ'－正規であり，そのための必要十分条件は定理3の系により$U_{P'}^{\Gamma'}$が正規集合となることである。 $w\in U_{P'}^{\Gamma'} \longleftrightarrow \partial_w^{\Gamma'}P'(\perp)\equiv \text{true} \longleftrightarrow w=u\delta \wedge \partial_{u\delta}^{\Gamma}P = \text{true} \longleftrightarrow w\in V_P^{\Gamma,\mathbb{C}}$ により $V_P^{\Gamma,\mathbb{C}} = U_{P'}^{\Gamma'}$ であるから定理が得られる。

Pが$(\Gamma,\mathbb{C})$に関して任意に微分可能でありかつΓ－正規であれば，Pの有限個の微分 $Q_0, Q_1, \cdots, Q_m$ について，

$$
\left.\begin{array}{l} i=0 \\ \\ m \end{array}\right\{ \; Q_i(x) \longleftrightarrow \bigvee_{\sigma\in\Sigma}\left(x\in B_\sigma \wedge \partial_\sigma^{\Gamma} Q_i(f(x))\right) \vee \bigvee_{\delta\in\Delta}\left(x\in C_\delta \wedge \partial_\delta^{\Gamma} Q_i\right)
$$

が成り立ち，$Q_0=P$ とすると，これはPを計算するプログラムである。 $\{Q_0,\cdots,Q_m\}\cup\{\text{true}, \text{false}\}$
を状態集合にとり，Q_0を初期状態，trueを受理状態にとり，状態遷移関数Mを，$M(Q_i,\sigma)=\partial_\sigma^{\Gamma}Q_i \quad (\sigma\in\Sigma)$，
$M(Q_i,\delta)=\partial_\delta^{\Gamma}Q_i \quad (\delta\in\Delta)$，$M(\begin{smallmatrix}\text{true}\\ \text{false}\end{smallmatrix}, \xi) =$
false $(\xi\in\Sigma\cup\Delta)$ として定めれば，この有限オートマ

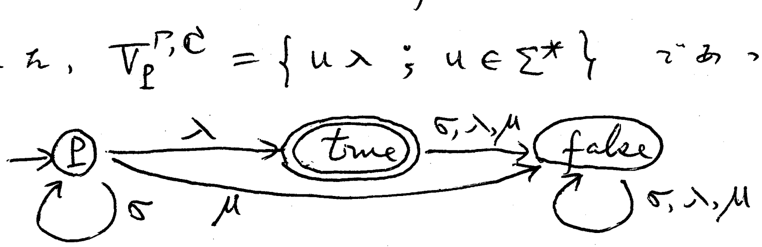
トンは $V_P^{\Gamma,\mathbb{C}}$ を受理する。

例　$W=\{a,b,c\}^*$ において、$x \prec y$ を、「x は y の部分を何ヶ所か（0ヶ所でも可）消去して得られる」ことをもって定め、半順序 $\prec$ の下での整礎集合 W を考える。
$H = WaW \cap WbW \cap WcW$,　$\Sigma=\{\sigma\}$, $B_\sigma = H$,
$\mathbb{C}=\{C_\lambda, C_\mu\}$,　$C_\lambda=\{\varepsilon\}$,　$C_\mu = W-H-\{\varepsilon\}$ とし、
関数 $f:H\to W$ を、$f(x)$ は x における最左の a,b,c をそれぞれ消去したものとして定める。$\Gamma=(\mathbb{B},f)$, $\mathbb{B}=\{B_\sigma\}$ とし、$P(x) \longleftrightarrow [x$ に含まれる a,b,c の個数が同じ$]$ なる述語 P を考える。P は $(\Gamma,\mathbb{C})$ に関して任意に微分可能である。（$\because\ \partial_\sigma^\Gamma P = P$, $\partial_\lambda^\Gamma P = true$, $\partial_\mu^\Gamma P = false$.）

P のプログラムは

$P(x)$ = if $x\in B_\sigma$ then $P(f(x))$ else if $x=\varepsilon$ then true else false

また、$V_P^{\Gamma,\mathbb{C}} = \{u\lambda\ ;\ u\in\Sigma^*\}$ であって、これは、



なるオートマトンで受理される。

§2. 多引数の場合への拡張

$\mathbb{W}$, H, $\mathbb{B}$, Σ, f, $\mathbb{C}$, Δ は前節と同じとする。

<u>定義7</u> $\mathbb{P}$ を $\mathbb{W}$ 上の n 引数述語とする。任意の $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n) \in \mathbb{W}^{n-1}$ に対し,

$$Q_{\vec{a}}^{(k)}(x) \longleftrightarrow \mathbb{P}(a_1, \cdots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \cdots, a_n)$$

なる1引数述語 $Q_{\vec{a}}^{(k)}$ を考え,任意の $\vec{a} \in \mathbb{W}^{n-1}$ に対し $Q_{\vec{a}}^{(k)}$ が $(\Gamma, \mathbb{C})$ に関して任意に微分可能であるとき, $\mathbb{P}(x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n)$ は $(\Gamma, \mathbb{C})$ に関し引数 x_k について任意に微分という。このとき, $u \in \Sigma^*$, $\delta \in \Delta$ に対し $\partial_{u, x_k}^{\Gamma} \mathbb{P}$ と $\partial_{u\delta, x_k}^{\Gamma} \mathbb{P}$ を,

$$\partial_{u, x_k}^{\Gamma} \mathbb{P}(a_1, \cdots, a_k, \cdots a_n) \longleftrightarrow \partial_u^{\Gamma} Q_{\vec{a}}^{(k)}(a_k)$$

$$\partial_{u\delta, x_k}^{\Gamma} \mathbb{P}(a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_n) \longleftrightarrow \partial_{u\delta}^{\Gamma} Q_{\vec{a}}^{(k)}$$

により定める。

$\mathbb{P}$ が任意の引数について $(\Gamma, \mathbb{C})$ に関し任意に微分可能であるときは,単に, $(\Gamma, \mathbb{C})$ に関して任意に微分可能という。

<u>定義8</u> $\mathbb{W}$ 上の述語の系 $\{P_1, \cdots, P_m\}$ が $(\Gamma, \mathbb{C})$ の下で微分に関して閉じている,とは,定数(0引数)でないどの P_i についても, P_i の<u>ある</u>引数 x_k について任意の ξ

$\in \Sigma \cup \Delta$ に対し $\partial^{\Gamma}_{\xi, x_k} P_i \in \{P_1, \cdots, P_m\}$ となることをいう。

定義9　$\mathbb{W}$ 上の述語 $\mathbb{P}$ が $(\Gamma, \mathbb{C})$-有理的であるとは、$\mathbb{P}$を含む述語の系 $\{P_1, \cdots, P_m\}$ が存在して、$(\Gamma, \mathbb{C})$ の下で微分に関して閉じていることをいう。

$(\Gamma, \mathbb{C})$-有理的な述語 $\mathbb{P}$ に関してはそれを計算する次のようなプログラムが得られる。即ち、$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1$ として、

$$
\left\{
\begin{array}{l}
i=1 \\
P_i(x_1, \cdots, x_{n_i}) \longleftrightarrow \bigvee_{\sigma \in \Sigma} \big(x_{k_i} \in B_\sigma \wedge \partial^{\Gamma}_{\sigma, x_{k_i}} P_i (x_1, \cdots, x_{k_i - 1}, \\
\qquad f(x_{k_i}), x_{k_i+1}, \cdots, x_{n_i})\big) \vee \bigvee_{\delta \in \Delta} \big(x_{k_i} \in C_\delta \wedge \\
\qquad \partial^{\Gamma}_{\delta, x_{k_i}} P_i (x_1, \cdots, x_{k_i-1}, x_{k_i+1}, \cdots, x_{n_i})\big) \\
m
\end{array}
\right.
$$

（ただし、$\partial^{\Gamma}_{\sigma, x_{k_i}} P_i$, $\partial^{\Gamma}_{\delta, x_{k_i}} P_i$ もし定数でなければ は $P_1, \cdots, P_m$ のうちのどれかに一致する。）

このプログラムはいわゆる多テープオートマトン［3］に他ならない。即ち $P_1, \cdots, P_m$ を状態とみれば、状態 P_i は k_i 番目のテープを読む状態であり、このとき記号 $\xi \in \Sigma \cup \Delta$ を読むと状態は $\partial^{\Gamma}_{\xi, x_{k_i}} P_i$ に遷移する。$\delta \in \Delta$ はテープの終端記号であり、これを読みこんだあとはこのテープは空になる。　［3］により次の命題が明らかである。

<u>命題3</u>　$(\Gamma, \mathbb{C})$−有理的な述語すべてからなる族は，否定に関しては閉じているが，論理和や論理積に関しては閉じていない。

また，次の命題も明らかである。

<u>命題4</u>　述語 P の $(\Gamma, \mathbb{C})$ に関する有限個の微分 $P_1, \cdots, P_m$ が存在して，$\{P, P_1, \cdots, P_m\}$ が $(\Gamma, \mathbb{C})$ の下で微分に関して閉じているとき，かつそのときに限り P は $(\Gamma, \mathbb{C})$−有理的である。

§3.　述語による微分

$\mathbb{W}$, H, Δ, $\mathbb{C}$ は前節までの通りとする。
$f_1, f_2 : H \longrightarrow \mathbb{W}$ を，$f_i(x) \lneq x$ $(i=1,2)$ なる2つの関数とする。　$F = (f_1, f_2)$ とおく。

<u>定義10</u>　P, Q を $\mathbb{W}$ 上の1引数述語とする。Q が F に関して P により微分可能であるとは，任意の $x \in \mathbb{W}$ に対し集合 $E_P(x) = \{y \in H \,;\, P(f_1(y)) \wedge f_2(y) = x\}$ の上で

Qの値が一定であることをいう。このとき，Fに関するQのPによる微分 $\partial_P^F Q$ を

$$\partial_P^F Q\ (x) \longleftrightarrow E_P(x) \neq \phi \wedge Q(E_P(x))$$

により定める。

命題5　Q, $P_1, \cdots, P_m$ を $\overline{W}$ 上の1引数述語とし，任意の $x \in \overline{W}$ に対し $P_1(x) \vee \cdots \vee P_m(x) \longleftrightarrow true$ であるとする。このとき，Fに関してQが各 P_i により微分可能であれば，任意の $x \in H$ に対し，

$$Q(x) \longleftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \left(P_i(f_i(x)) \wedge \partial_{P_i}^F Q\ (f_i(x)) \right).$$

［証明］　$x \in H$ が $P_i(f_i(x))$ をみたすとする。このとき $x \in E_{P_i}(f_i(x))$ である。従って

$$Q(x) \longleftrightarrow Q(E_{P_i}(f_i(x))) \longleftrightarrow \partial_{P_i}^F Q\ (f_i(x))$$

を得て命題は明らかである。

以上を多引数の場合に拡張すれば次のようになる。

定義11　P, Qを $\overline{W}$ 上のn引数述語とする。QがFに関し引数 x_k についてPにより微分可能であるとは，任意の $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \overline{W}^n$ に対し

集合 $E_P^{(k)}(\vec{x}) = \{(x_1, \cdots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \cdots, x_n) \in \overline{W}^n ;$
$y \in H \wedge P(x_1, \cdots, x_{k-1}, f_1(y), x_{k+1}, \cdots, x_n) \wedge f_2(y) = x_k \}$
の上で Q の値が一定であることをいう。このとき，F に関するQの，x_k についての P による微分 $\partial^F_{P, x_k} Q$ を，

$$\partial^F_{P, x_k} Q\ (\vec{x}) \longleftrightarrow Q(E_P^{(k)}(\vec{x}))$$

により定める。

<u>命題 6</u>　$Q, P_1, \cdots, P_m$ を $\overline{W}$ 上の n 引数述語とし，任意の $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \overline{W}^n$ に対し，~~$x_k \in H$ ならば~~
$P_1(\vec{x}) \vee \cdots \vee P_m(\vec{x})$ が真であるとする。このとき F に関して Q が $P_1, \cdots, P_m$ により引数 x_k について微分可能であれば，任意の $x_k \in H$ に対し

$$\begin{aligned} & Q(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) \\ & \longleftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \Big(P_i(x_1, \cdots, x_{k-1}, f_1(x_k), x_{k+1}, \cdots, x_n) \\ & \qquad\qquad \wedge\ \partial^F_{P_i, x_k} Q(x_1, \cdots, x_{k-1}, f_2(x_k), x_{k+1}, \cdots, x_n)\Big) \end{aligned}$$

<u>定義 12</u>　$\overline{W}$ 上の述語の系 $\{P_1, \cdots, P_m\}$ が $(F, \mathbb{C})$ の下で微分に関して閉じている，とは，定数でないどの $P_i(x_1, \cdots, x_n)$（n 引数）についても，ある引数 x_k について次のことが成立することをいう。

(1)　$P_1, \cdots, P_m$ の中にある n 引数述語の系 $P_{j_1}, \cdots, P_{j_s}$ が

存在して，任意の $\vec{x}\in\overline{W}^n$ に対し $P_{j_1}(\vec{x})\vee\cdots\vee P_{j_s}(\vec{x})$ が真であり，Fに関し P_i が，引数 x_k について $P_{j_1},\cdots,P_{j_s}$ により微分可能で，各 $l=1,\cdots,s$ に対し $\partial^F_{P_{j_l},x_k}P_i\in\{P_1,\cdots,P_m\}$ となっている。

(2) 任意の $\vec{a}=(a_1,\cdots,a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_n)\in\overline{W}^{n-1}$ と任意の $\delta\in\Delta$ に対し，$Q^{(k)}_{\vec{a}}(x)\longleftrightarrow P_i(a_1,\cdots,a_{k-1},x,a_{k+1},\cdots,a_n)$ なる $\overline{W}$ 上の1引数述語 $Q^{(k)}_{\vec{a}}$ の値が C_δ 上で一定であり，(このとき $Q^{(k)}_{\vec{a}}(C_\delta)$ を $\partial^F_{\delta,x_k}P_i(a_1,\cdots,a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_n)$ で表す。) かつそれがある $j\ (1\leqq j\leqq m)$ による $P_j(a_1,\cdots,a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_n)$ に等しい。(即ち，$\partial^F_{\delta,x_k}P_i\in\{P_1,\cdots,P_m\}$.)

<u>定義13</u>　$\overline{W}$ 上の述語 P が $(F,\mathbb{C})$－有理的であるとは，有限個の述語 $P_1,\cdots,P_m$ が存在して，$(F,\mathbb{C})$ の下で $\{P,P_1,\cdots,P_m\}$ が微分に関して閉じていることをいう。

$(F,\mathbb{C})$－有理的な述語 P は，$P=P_0$ として，

$$
i=0,\ldots,m\quad\left\{
\begin{aligned}
P_i(x_1,\cdots,x_{k_i},\cdots,x_{n_i})\longleftrightarrow &\bigvee_{j=1}^{s_j}\Big(Q^{(i)}_j(x_1,\cdots,x_{k_i-1},f_1(x_{k_i}),\cdots,x_{n_i})\\
&\wedge\partial^F_{Q^{(i)}_j,x_{k_i}}P_i(x_1,\cdots,x_{k_i-1},f_2(x_{k_i}),x_{k_i+1},\cdots,x_{n_i})\Big)\vee\\
&\bigvee_{\delta\in\Delta}\big(x_{k_i}\in C_\delta\wedge\partial^F_{\delta,x_{k_i}}P_i(x_1,\cdots,x_{k_i-1},x_{k_i+1},\cdots,x_{n_i})\big)
\end{aligned}
\right.
$$

（ただし $i=0,\cdots,m$ と $j=1,\cdots,p_i$ に対し $Q_j^{(i)}$ と $\partial^F_{Q_j^{(i)},x_{k_i}}P_i$ は $\{P_0,P_1,\cdots,P_m\}$ に属す。）

なるプログラムで計算できる。

さて，$\varphi\in\{f_1,f_2\}^*$ に対し部分関数 $\tilde{\varphi}:\overline{W}\to\overline{W}$ を，

$$\begin{cases}\varphi=\varepsilon \text{ なら } \tilde{\varphi}(x)=x.\\ (f_i\varphi)^\sim(x)=\text{if } \tilde{\varphi}(x)\in H \text{ then } f_i(\tilde{\varphi}(x)) \text{ else undefined}\end{cases}$$

により帰納的に定め，$x\in\overline{W}$ に対し $|x|$ を，

$|x|=\max\{length(\varphi)\,;\,\tilde{\varphi}(x)\in\overline{W}-H\}$ とおく。

（$length(\varphi)$ は φ の語としての長さを表す。）

$\vec{x}\in\overline{W}^n$ に対し $|\vec{x}|=\max\{|x_i|\,;\,i=1,\cdots,n\}$（ただし $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$）と定める。これにより，上記のプログラムから次の命題が明らかである。

命題 7　任意の $x\in\overline{W}$ に対し，$x\in H$？，$x\in C_\delta$（$\delta\in\Delta$）？ の判定と，$f_1(x)$，$f_2(x)$ の計算がいずれも x に依存しない一定時間内で計算できれば，$(\Gamma,\mathbb{C})$-有理財な n 引数述語 P は，$\vec{x}\in\overline{W}^n$ について $P(\vec{x})$ が $2^{a|\vec{x}|+b}$ 時間（a,b は定数）内で計算できる。

この3節は，特に $\overline{W}=\langle$LISPのS式の集合$\rangle$，$f_1=car$，

$f_2 = cdr$, H = 〈アトムでないS式〉 なるモデルを念頭において一般的に述べたものであることをお断りしておく。このモデルの場合については［1］で具体的に述べてある。（ただし微分可能性の条件を考慮に入れ忘れているが。）

参考文献

［1］西澤輝泰：`正規述語について ― プログラム合成のための一概念'，1979～1980年文部省科研費総合研究(A)「知識の表現とそれを利用する情報検索システムの研究」（研究代表者 有川節夫）報告書，1981年3月

［2］M. Nagai & T. Nishizawa : `A System for Automatically Synthesizing Pure LISP Programs', Proceedings of The 6-th IBM Symposium on MFCS (Logical Aspect of Programs), May, 1981

［3］P. C. Fischer & A. L. Rosenberg : `Multitape One-way Nonwriting Automata, JCSS, vol. 2, pp. 88-101, 1968.