数理解析研究所講究録
第455巻 1982年 1-21

特殊な四値論理を用いてWajsbergの三値論理公理系の改良

明大・工　後藤以紀
明大・工　加王森治
明大・計算センター　二宮智子

I 概説　多値論理の公理系が与えられたとき，それを連立論理方程式とみなし，その中の無定義演算記号を未知論理関数とみなして，特殊な四値論理を利用して計算機によって一挙に解くことにより，無定義演算記号の真理値表の一般解を求める方法に関してM.Wajsbergの三値論理公理系を例にとつて報告し(1),(2)，その解に従う関数の標準形を求めること及び真理値の最適な個数を求めることについても報告した(3)。次に逆に，恒真式が存在しないとも書かれているS. C. Kleeneの三値論理(4)に対応する公理系(5)及びD. A. Bochvar(6)の夫を同様な方法により計算機を用いて求め(7)ると共に夫々の公理の独立性を証明した。

表1.1はWajsbergの公理系より求めた真理値表(3)の一般解である。Pは解の番号であり，P＝1～5においては，1，

表1.1

	X＝Y	X⊃Y	¬X	
X	1 1 1 2 2 2 3 3 3	1 1 1 2 2 2 3 3 3	1 2 3	(旧
Y	1 2 3 1 2 3 1 2 3	1 2 3 1 2 3 1 2 3		P)
		1 2 2 1 1 1 1 1 1	2 1 1	1
		1 2 2 1 1 1 1 1 1	3 1 1	2
		1 2 3 1 1 1 1 1 1	2 1 1	3
		1 2 3 1 1 1 1 1 1	3 1 1	4
(新P) 1	1 3 3 3 1 3 3 3 1	1 2 3 1 1 2 1 1 1	3 2 1	**5**
		1 2 3 1 1 1 1 3 1	2 1 3	**6**
		1 3 2 1 1 1 1 1 1	2 1 1	7
		1 3 2 1 1 1 1 1 1	3 1 1	8
		1 3 3 1 1 1 1 1 1	2 1 1	9
		1 3 3 1 1 1 1 1 1	3 1 1	10

2，3は夫々，真，不確定，偽に相当し，P＝6～10では1，3，2がそれに相当している。そのうちP＝5が通常使われている解（P＝6も同じであるが2と3との意味が入れ換っている）である。その他は同じ公理系に従う変種である。本報告では演算子⊃，¬の他に＝を補足して，一般解を一つの組P＝5のみに限るようにした。それにより，強い意味の完全性を与えることができた。

Ⅱ　真理値と記号　　真理値を1,2,3,…, N_0で表わし，公理は$A \supset B$又は$A=B$なる形を持ち，A及びBは論理式で，任意の変項Ⅹ, Y, Z等を無定義二項演算記号⊃又は＝と，無定義単項演算記号7と括弧（　）との有限個で結合されたものとする。！，!!，!!!により仮定又は定義，主要結果，公理を夫々表わす。A，B及びⅩ，Y，Z等は夫々任意の一つの真理値を持つものとし，真理値1は真を表わす。⊃，＝，7は二値論理の含意→，対等↔，否定～に相当する三値演算子を表わす筈であるが，補助演算記号として二値論理の論理和∨，論理積・に相当して夫々（2.1）の∪，∩を定義する。

$$A \cup B \equiv (A \supset B) \supset B,\ A \cap B \equiv 7(7A \cup 7B). \quad (2.1)!$$

ここに≡は恒等（両辺の各命題Ⅹ，Y，Z等が任意の値を採っても両辺の真理値は等しくなる）を表わす。演算順序は（　），7，∩，∪，⊃，＝とする。≡は＝と同等とする。

命題Ⅹが真理値xを採ることを簡略に

$$X = x \quad (2.2)!$$

とも書けるが，＝の意味が確定するまではX^xで表わすことにし，二値命題とする。これにより無定義演算子は（2.3）で表わされる。I^l_{mn}, E^l_{mn}, N^l_mは0又は1として

$$\left.\begin{array}{l}[A \supset B]^l \equiv IMP(A,B)^l \equiv \bigvee_{m=1}^{N_0} \bigvee_{n=1}^{N_0} I^l_{mn} \cdot A^m \cdot B^n, \\ [A = B]^l \equiv EQU(A,B)^l \equiv \bigvee_{m=1}^{N_0} \bigvee_{n=1}^{N_0} E^l_{mn} \cdot A^m \cdot B^n,\end{array}\right\} (2.3)!$$

$[\neg A]^{\ell} \equiv NEG(A)^{\ell} \equiv \bigvee_{m=1}^{No} N_m^{\ell} \cdot A^{m}.$)

Ⅲ 基本的恒真式　Wajsbergの三値論理公理系(3.5)〜(3.8)の他に基本的恒真式(3.1)〜(3.4)及び分離法則(3.0)を使用し，それを満足する無定義演算子⊃，=，¬の意味の一般解を求める。

$A^1 \cdot [A \supset B]^1 \rightarrow B^1.$ (3.0)!

$[X = X]^1.$ (3.1)!!

$[X = \neg\neg X]^1.$ (3.2)!!!

$[\neg(X = X) = 3]^1.$ (3.3)!!!

$[(X = Y) \supset ((Y = Z) \supset (Z = X))]^1.$ (3.4)!!

$[X \supset (Y \supset X)]^1.$ (3.5)!!!

$[(X \supset Y) \supset ((Y \supset Z) \supset (X \supset Z))]^1.$ (3.6)!!

$[(\neg Y \supset \neg X) \supset (X \supset Y)]^1.$ (3.7)!!!

$[((X \supset \neg X) \supset X) \supset X]^1.$ (3.8)!!!

上記の公理（!!!印）は表7.1により定められる。次に(3.0)〜(3.8)の各項に(2.3)を代入して任意のX，Y，Zの値について常に成立する為にはそれの係数I^{ℓ}_{mn}，E^{ℓ}_{mn}，N^{ℓ}_{m}の二値論理式(4.0)〜(4.8)が1になることが必要充分条件となる。例えば(3.7)の[ ]内の式で

$(\overset{\ell}{\neg} Y \overset{j}{\supset} \overset{m}{\neg} X) \overset{1}{\supset} (X \overset{k}{\supset} Y)$ (3.7)

のように，記号⊃，⊃，⊃，¬，¬で結ばれる項の値を夫々

1, j, k, l, m と書添えれば，これに(2.3)の3回を代入すると[(3.7″)〜(4.8)の論理積記号を省略]

$$(3.7') \equiv \bigwedge_{x,y=1}^{3} \bigvee_{j,k,l,m=1}^{3} I^1_{jk} I^j_{lm} N^l_y N^m_x I^k_{xy} X^x Y^y$$

$$\equiv \bigwedge_{x,y=1}^{3} \bigvee_{j,k,l,m=1}^{3} I^1_{jk} I^j_{lm} N^l_y N^m_x I^k_{xy}$$

$$\equiv 1, \qquad (3.7'')$$

は論理計算を要せずに書き下せる。他も同様で(4.1)〜(4.8)となる。(3.0)は $\overline{}$ で否定を表わすと

$$\overline{A^1} \vee \overline{\mathrm{IMP}(A, B)^1} \vee B^1 = 1 \qquad (3.0')$$

即ち左辺の2項はA=1, B≠1でも1となるべきで(4.0).

Ⅳ 基本的恒真式の解法

$$\overline{I^1_{12}} \cdot \overline{I^1_{13}} = 1 \therefore I^1_{12} = I^1_{13} = 0 \qquad (4.0)!!$$

$$\bigwedge_{x=1}^{3} E^1_{xx} = 1. \qquad (4.1)!!$$

$$\bigwedge_{x=1}^{3} \bigvee_{j,k=1}^{3} E^1_{xj} N^j_k N^k_x = 1. \qquad (4.2)!!$$

$$\bigwedge_{x=1}^{3} \bigvee_{j,k=1}^{3} E^1_{j3} N^j_k E^k_{xx} = 1. \qquad (4.3)!!$$

$$\bigwedge_{x,y,z=1}^{3} \bigvee_{j,k,l,m=1}^{3} I^1_{jk} E^j_{xy} I^k_{lm} E^l_{yz} E^m_{zx} = 1. \qquad (4.4)!!$$

$$\bigwedge_{x,y=1}^{3} \bigvee_{j=1}^{3} I^1_{xj} I^j_{yx} = 1. \qquad (4.5)!!$$

$$\bigwedge_{x,y,z=1}^{3} \bigvee_{j,k,l,m=1}^{3} I^1_{jk} I^j_{xy} I^k_{lm} I^l_{yz} I^m_{xz} = 1. \qquad (4.6)!!$$

$$\bigwedge_{x,y=1}^{3} \bigvee_{j,k,l,m=1}^{3} I^1_{jk} I^j_{lm} N^l_y N^m_x I^k_{xy} = 1. \qquad (4.7)!!$$

$$\bigwedge_{x=1}^{3} \bigvee_{j,k,l=1}^{3} I^1_{jk} I^j_{kx} I^k_{xl} N^l_x = 1. \qquad (4.8)!!$$

ここに一般に

$$A^3_{mn} = \overline{A^1_{mn}} \cdot \overline{A^2_{mn}}, \quad N^3_m = \overline{N^1_m} \cdot \overline{N^2_m} \qquad (4.9)!$$

Ⅴ (4.0)～(4.8)の計算機による解法　連立論理方程式(4.0)～(4.8)を解いて各I^{ℓ}_{mn}, E^{ℓ}_{mn}, N^{ℓ}_{m}の一般解を求めるにはFORTRAN方式で夫々

$$I^{\ell}_{mn}=I(P,IBC),\ IBC=9*L+3*M+N. \quad (5.1)$$

$$E^{\ell}_{mn}=EQ(P,EBC),\ EBC=9*L+3*M+N. \quad (5.2)$$

$$N^{\ell}_{m}=N(P,NA),\ NA=9*L+3*M, \quad (5.3)$$

で表わされる。ここにPは第P組の暫定解であることを示す。P=1, 2, …, R。初期値としては，(4.0)による

$$I^{1}_{12}=I^{1}_{13}=0 \quad (5.4)\ \therefore I(P,14)=I(P,15)=0. \quad (5.5)!$$

次に，(Ⅹ=2)と「(Ⅹ=1)又は(Ⅹ=3)」とが同時に成立することを矛盾とする。然るに(3.4)により

$$\left.\begin{aligned}&(X=1)\supset((1=2)\supset(2=X)),\\&(X=2)\supset((2=3)\supset(3=X)).\end{aligned}\right\} \quad (5.6)$$

$$\therefore\ 1\neq 2,\ 2\neq 3. \quad (5.7)$$

$$\therefore\ E^{1}_{12}=E^{1}_{13}=E^{1}_{21}=E^{1}_{23}=E^{1}_{31}=E^{1}_{32}$$
$$=E^{2}_{12}=E^{2}_{13}=E^{2}_{21}=E^{2}_{23}=E^{2}_{31}=E^{2}_{32}=0. \quad (5.8)!$$

その他のI^{ℓ}_{mn}, E^{ℓ}_{mn}, N^{ℓ}_{m}の初期値は総て2(未確定).

表5.1において

$$\left.\begin{aligned}&1BC\equiv 9*1+3*B+C,\ 2BC\equiv 9+1BC;\\&1A\equiv 9*1+3*A,\ 2A\equiv 9+1A.\end{aligned}\right\} \quad (5.9)!$$

独立変数ⅩYZと補助変数JK…CBの桁の数字0は，その

桁が使われてないことを示す。第1行は(4.1)の特殊解(P1=1)で2002…の00は(5.5)の初期値。EQ(1BC)の欄の列11の第1行の1は$E^1_{11}=1$を表わす。それに伴いEQ(2BC)の列11では$E^2_{11}=0$となる。他は未確定で総べて2である。第2行は初期値(5.8)を入れて暫定解(P=1)とした。第3行は$E^1_{22}=1$を表わす新しい特殊解(P1=1)で，第2行の暫定解と第3行とを合併した新しい暫定解(P=1)が第4行である。以下同様にして第6行の暫定解で恒真式(4.1)の解となり，第7行より(4.2)の解に移る。これは結局P=1,2,3,4の4組の暫定解となる。一般に，暫定解はそれ以前の恒真式[ここでは(4.1),(4.2)]を満足する一般解になっている。従ってそれ以前の(4.1)の暫定解は不用となる。以下同様に一方向的に進んで最終(4.8)では暫定解は一組に収束して，それが一般解となった。その間，(4.1)～(4.8)は夫々論理積の形になっており，その各因子I^l_{mn}, E^l_{mn}, N^l_mは1であって，同じmnに対して同時に二つの異なるlを持つと矛盾になる。例えば$I^1_{23}=I^2_{23}=1$は矛盾である。$I^3_{23}=1$ならば$I^1_{23}=I^2_{23}=0$となる。もし一組の解の内に矛盾が発生すれば，その組は直ちに捨て，その番号P1は次の組に譲る。又新しい特殊解はその前の暫定解と比較して矛盾の生じる組み合せを捨てて新しい

表 5.1

	I(1BC)	I(2BC)	EQ(1BC)	EQ(2BC)	N(1A)	N(2A)	P1	P
A					123	123		
B	111222333	111222333	111222333	111222333				
C	123123123	123123123	123123123	123123123				
XYZJKLMHGFEDCB							P1	P
1000000000000	200222222	222222222	122222222	022222222	222	222	1	
	200222222	222222222	100020002	000020002	222	222		1
2000000000000	200222222	222222222	222212222	222202222	222	222	1	
	200222222	222222222	100010002	000000002	222	222		1
3000000000000	200222222	222222222	222222221	222222220	222	222	1	
	200222222	222222222	100010001	000000000	222	222		1
1001100000000	200222222	222222222	122222222	022222222	122	022	1	
1001200000000	200222222	222222222	122222222	022222222	012	102	2	
1001300000000	200222222	222222222	122222222	022222222	021	020	3	
	200222222	222222222	100010001	000000000	122	022		1
	200222222	222222222	100010001	000000000	012	102		2
	200222222	222222222	100010001	000000000	021	020		3
2002100000000	200222222	222222222	222212222	222202222	012	102	1	
2002200000000	200222222	222222222	222212222	222202222	202	212	2	
2002300000000	200222222	222222222	222212222	222202222	200	201	3	
	200222222	222222222	100010001	000000000	102	012		1
	200222222	222222222	100010001	000000000	100	001		2
	200222222	222222222	100010001	000000000	012	102		3
	200222222	222222222	100010001	000000000	001	010		4
3003100000000	200222222	222222222	222222221	222222220	021	020	1	
3003200000000	200222222	222222222	222222221	222222220	200	201	2	
3003300000000	200222222	222222222	222222221	222222220	220	220	3	
	200222222	222222222	100010001	000000000	100	010		1
	200222222	222222222	100010001	000000000	100	001		2

途中省略

```
2302212000000000, 200210222,212201222, 222222222,222222222, 201 210,  1
                  100110111,011001000, 100010001,000000000, 001 010,      1
                  100110111,010001000, 100010001,000000000, 001 010,      2
3101131000000000, 100222122,022222022, 222222222,222222222, 021 020,  1
                  100110111,011001000, 100010001,000000000, 001 010,      1
                  100110111,010001000, 100010001,000000000, 001 010,      2
3201121000000000, 100122212,022022202, 222222222,222222222, 201 210,  1
                  100110111,011001000, 100010001,000000000, 001 010,      1
                  100110111,010001000, 100010001,000000000, 001 010,      2
3301111000000000, 100222221,022222220, 222222222,222222222, 221 220,  1
                  100110111,011001000, 100010001,000000000, 001 010,      1
                  100110111,010001000, 100010001,000000000, 001 010,      2
1001230000000000, 100122222,021022222, 222222222,222222222, 022 022,  1
1001330000000000, 100222122,020222022, 222222222,222222222, 022 022,  2
                  100110111,011001000, 100010001,000000000, 001 010,      1
                  100110111,010001000, 100010001,000000000, 001 010,      2
2002120000000000, 200212222,212202222, 222222222,222222222, 202 212,  1
                  100110111,011001000, 100010001,000000000, 001 010,      1
                  100110111,010001000, 100010001,000000000, 001 010,      2
3003110000000000, 200222121,220222020, 222222222,222222222, 221 220,  1
    一般解        100110111,010001000, 100010001,000000000, 001 010,      1
```

```
        IMP(A,B)  EQU(A,B) NEG(A)

      A 111222333 111222333 123   P
      B 123123123 123123123
TRUTH VALUE
        123112111 133313331 321   1
```

暫定解を作る。それには次の特殊な四値論理の乗法が使える。I^{ℓ}_{mn}, E^{ℓ}_{mn}, N^{ℓ}_{m} は真理値 ϕ, 0, 1, 2 の四種（夫々，矛盾，0, 1, 未確定）の値を採り得るとし，積の記号・を使い

$$\left.\begin{array}{l} \phi\cdot\phi\equiv\phi\cdot 0\equiv\phi\cdot 1\equiv\phi\cdot 2\equiv\phi, \\ 0\cdot 0\equiv 0,\ \underline{0\cdot 1\equiv\phi},\ 0\cdot 2\equiv 0, \\ 1\cdot 1\equiv 1\cdot 2\equiv 1,\ 2\cdot 2\equiv 2, \end{array}\right\} \qquad (5.10)!$$

ϕ を生じた組み合せを捨て，番号 P を次の暫定解に譲る。

一般解を真理値に直すには（5．11）による。

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{IMP(A,B)} = 3 - 2*\mathrm{I(P, IAB)} - \mathrm{I(P, IIAB)}, \\ \mathrm{EQU(A,B)} = 3 - 2*\mathrm{EQ(P, IAB)} - \mathrm{EQ(P, IIAB)}, \\ \mathrm{NEG(A)} = 3 - 2*\mathrm{N(P, NA)} - \mathrm{N(P, NNA)}. \end{array}\right\}$$

（5．11）!!

ここに IAB≡9＋3＊A＋B，IIAB≡9＋IAB，

NA≡9＋3＊A，NNA≡9＋NA.

表5．1の I^{ℓ}_{mn}, E^{ℓ}_{mn}, N^{ℓ}_{m} のうちで，（暫定解の各組に共通して）一つの値（0又は1）に決定されたものができたならば，それを IO（IBC），EO（EBC），NO（NA）で表わし，それ以後の計算は不必要となる。その後に，それと異なる特殊解が出ても捨てられる。IO，EO，NO を見出すにも上記の ϕ, 0, 1, 2 の加法（和の記号 ∨）が使われる。即ち

$$\left.\begin{array}{l}\phi \vee \phi \equiv \phi,\ \phi \vee 0 \equiv 0,\ \phi \vee 1 \equiv 1,\ \phi \vee 2 \equiv 2,\\ 0 \vee 0 \equiv 0,\ \underline{0 \vee 1 \equiv 2},\ 0 \vee 2 \equiv 2,\\ 1 \vee 1 \equiv 1,\ 1 \vee 2 \equiv 2,\ 2 \vee 2 \equiv 2.\end{array}\right\} (5.12)!$$

ϕ, 0, 1, 2は(5.13)に示すように二桁の二進数で表わされ，論理積，論理和は夫々，各桁毎の（二値論理の）論理積，論理和になっている。

$$\phi \equiv 00,\ 0 \equiv 01,\ 1 \equiv 10,\ 2 \equiv 11. \qquad (5.13)!$$

VI　<u>論理関数の標準形と真理値の最適個数</u>

$$X1 \equiv X \supset 7X,\ X3 \equiv 7X \supset X,\ X2 \equiv X3 \supset 7X1 \quad (6.1)!$$

なる基本関数を定義すると表5．1の真理値表に基づいて，表6．1の性質がある。即ち

表6．1

X	7X1	7X2	7X3	F13	F2	F123
1	1	3	3	C1	3	C1
2	3	1	3	3	C2	C2
3	3	3	1	C3	3	C3

$$\left.\begin{array}{l}7Xn = 1.\ (X = n = 1, 2, 3 \text{ に対して}),\\ 7Xn = 3.\ (X \neq n \text{ に対して})\end{array}\right\} (6.1')!!$$

$$\left.\begin{array}{l}F13 \equiv (C3 \supset X3) \supset 7(C1 \supset X1)\\ \qquad \equiv (C1 \supset X1) \supset 7(C3 \supset X3),\\ F2 \equiv 7X2 \cap C2 \equiv 7(X2 \cup 7C2)\end{array}\right\} (6.2)!$$

$$\equiv \neg((X2 \supset \neg C2) \supset \neg C2), \quad [(2.1)参照]$$

$$F123 \equiv F13 \cup F2 \equiv (F2 \supset F13) \supset F13)$$

なるF123を定義すれば表6.1に示す通り，F123は

$F123 = Cn$（$X = n = 1, 2, 3$ に対して）．　　(6.2')!!

なる論理関数（表5.1の真理値表に従う）を表わす標準形となる。以上は独立変数Xのみの場合であったが，Yをも含む場合はC1，C2，C3をYの関数とすればよい。他も同様。一般にC1，C2，C3は定数である必要はなく，$X = n$ のときCnとなる別の関数でよい。論理定数2を使用しない場合には「($X = 2$)以外のときに($F123 = 2$)となること」はないから「($C2 = 2$)の場合はC2の代りにXと書くこと」ができる。<u>これまではXの値を三値と定めて説明したが，三値と定めずに基本的恒真式(3.0)～(3.8)だけからでも下記のように同様な結果を導くことができる。</u>

$$\neg X1 \supset (C1 \supset F13)$$
$$\equiv \neg X1 \supset (C1 \supset ((C3 \supset X3) \supset \neg(C1 \supset X1)))$$
$$\equiv \neg X1 \supset ((C3 \supset X3) \supset (C1 \supset \neg(C1 \supset X1)))$$
$$\equiv (C3 \supset X3) \supset (\neg X1 \supset (C1 \supset \neg(C1 \supset X1)))$$
$$\equiv (C3 \supset X3) \supset (\neg X1 \supset ((C1 \supset X1) \supset \neg C1))$$
$$\equiv (C3 \supset X3) \supset ((C1 \supset X1) \supset (\neg X1 \supset \neg C1))$$
$$\equiv (C3 \supset X3) \supset ((C1 \supset X1) \supset (C1 \supset X1))$$

$\equiv (C3 \supset X3) \supset 1$

$\equiv 1.$ (6.3)!!

$\underline{\neg X1} \supset X \equiv \neg (X \supset \neg X) \supset X \equiv \neg X \supset (X \supset \neg X) \equiv 1.$

(6.4)!!

$X \supset X3 \equiv X \supset (\neg X \supset X) \equiv 1.$ [(3.5)参照] (6.5)

$X3 \supset (\underline{C3 \supset X3}) \equiv 1.$ (6.6)

(6.4), (6.5), (6.6) $\vdash$ $\underline{\neg X1} \supset (\underline{C3 \supset X3}) \equiv 1.$ (6.7)!!

$1 \equiv ((C3 \supset X3) \supset \neg (C1 \supset X1))$

$\quad \supset ((C3 \supset X3) \supset \neg (C1 \supset X1))$

$\equiv (C3 \supset X3)$

$\quad \supset (\underbrace{((C3 \supset X3) \supset \neg (C1 \supset X1))}_{F13} \supset \neg (C1 \supset X1)).$ (6.8)

$\neg (C1 \supset X1) \supset C1 \equiv \neg C1 \supset (C1 \supset X1)$

$\equiv \neg C1 \supset (\neg X1 \supset \neg C1) \equiv 1.$ (6.9)

(6.2), (6.7), (6.8), (6.9) $\vdash$ $\neg X1 \supset (F13 \supset C1)$

$\equiv \overset{(6.7)}{\neg X1} \underbrace{\supset (((C3 \supset X3) \supset \neg (C1 \supset X1)) \supset}_{(6.8)} \overset{(6.9)}{C1}) \equiv 1.$ (6.10)!!

$\neg X2 \supset (C2 \supset F2)$

$\equiv \neg X2 \supset (C2 \supset \neg ((X2 \supset \neg C2) \supset \neg C2))$

$\equiv \neg X2 \supset (((X2 \supset \neg C2) \supset \neg C2) \supset \neg C2)$

$\equiv ((\underline{X2 \supset \neg C2}) \supset \neg C2) \supset (\underline{\neg X2} \supset \neg C2)$

$\equiv 1.$ (6.11)!!

$$\because\ \neg A \supset (A \supset B) \equiv \neg A \supset (\neg B \supset \neg A) \equiv 1. \qquad (6.12)$$
$$\therefore\ ((A \supset B) \supset C) \supset (\neg A \supset C) \equiv 1. \qquad (6.12')!!$$

$$\neg \mathrm{X}2 \supset (F2 \supset C2)$$
$$\equiv \neg \mathrm{X}2 \supset (\neg((\mathrm{X}2 \supset \neg C2) \supset \neg C2) \supset C2)$$
$$\equiv \neg \mathrm{X}2 \supset (\neg C2 \supset ((\mathrm{X}2 \supset \neg C2) \supset \neg C2))$$
$$\equiv \neg \mathrm{X}2 \supset 1$$
$$\equiv 1. \qquad (6.13)!!$$

(6.2)に示す如く$F13$は$C1$, $\mathrm{X}1$と$C3$, $\mathrm{X}3$とに関して対称の形をしているので(6.3)乃至(6.13)により総括すれば，次の公式となる。

$$\neg \mathrm{X}1 \supset (C1 \supset F13) \equiv 1,\ \neg \mathrm{X}3 \supset (C3 \supset F13) \equiv 1. \qquad (6.3)!!$$
$$\neg \mathrm{X}1 \supset (F13 \supset C1) \equiv 1,\ \neg \mathrm{X}3 \supset (F13 \supset C3) \equiv 1. \qquad (6.10)!!$$
$$\neg \mathrm{X}2 \supset (C2 \supset F2) \equiv 1. \qquad (6.11)!!$$
$$\neg \mathrm{X}2 \supset (F2 \supset C2) \equiv 1. \qquad (6.13)!!$$
$$\neg \mathrm{X}1 \supset \mathrm{X} \equiv 1. \qquad (6.4)!!$$
$$\neg \mathrm{X}3 \supset \neg \mathrm{X} \equiv 1. \qquad (6.5')!!$$

以上は三値論理ということを仮定せずに表6.1と同じ結果を基本的恒真式(3.0)～(3.8)より導いたものであって，次の三つの定理によって$\neg \mathrm{X}1$，$\neg \mathrm{X}2$，$\neg \mathrm{X}3$の領域で総て表わせることが判る。

定理6A　「$\neg \mathrm{X}1=1$」と「$\neg \mathrm{X}3=1$」とは同時には成立しない。

[証 明] $\neg(\neg X1 \cap \neg X3) \equiv X1 \cup X3$

$\equiv (X1 \supset X3) \supset X3$

$\equiv ((X \supset \neg X) \supset (\neg X \supset X)) \supset (\neg X \supset X)$

$\equiv (\neg X \supset ((X \supset \neg X) \supset X)) \supset (\neg X \supset X)$

$\equiv 1.$ (6A.1)!!

[$\because (Y \supset ((Z \supset \neg Z) \supset Z)) \supset (Y \supset Z) \equiv 1.$[8] (6A.2)!!

<u>定理6B</u> もしも $\neg X1, \neg X2, \neg X3$ のうちの一つが，1で他の一つが1でないならば，残りの一つも1ではない。

[証 明] $X1 \supset (\neg X3 \supset X2) \equiv \neg X3 \supset (X1 \supset X2)$

$\equiv X1 \supset (\neg X2 \supset X3) \equiv \neg X2 \supset (X1 \supset X3)$ (6B.1)

$\equiv \neg X2 \supset (\neg X3 \supset \neg X1)$ (6B.1′)

$\equiv X1 \supset (\neg X3 \supset (X1 \supset \neg X3)) \equiv X1 \supset 1$

$\equiv 1.$ (6B.1″)!!

$X2 \supset (\neg X1 \supset X3) \equiv 1.$ (6B.2)!!

[$\because$ (6.4), (6.5) $\vdash$ $\neg X1 \supset X3 \equiv 1.$ (6B.3)]

(6.2.1′) は次の (6B.4) を含みそうに見えるが

$\neg X2 = \neg X3 = \neg X1 = 1.$ (6B.4)?

これは定理6Aにより，実現しない。

<u>定理6C</u> $\neg X1, \neg X2, \neg X3$ のうちの二つが1でない場合は残りの一つは必ず1である。

[証 明] $X1 \supset (X3 \supset \neg X2) \equiv X1 \supset (X2 \supset \neg X3)$

$\equiv X3 \supset (X2 \supset 7X1) \equiv X1 \supset (X3 \supset 7(X3 \supset 7X1))$

$\equiv X1 \supset ((X3 \supset 7X1) \supset 7X3)$

$\equiv (X3 \supset 7X1) \supset (X1 \supset 7X3)$

$\equiv (X3 \supset 7X1) \supset (X3 \supset 7X1)$

$\equiv 1.$ (6C.1)

定理6A，6B，6Cを総合して次の結論が導かれる。

定理6　Xの領域は上記の三個の小領域7X1，7X2，7X3に分かれ，小領域に於いては一つの7Xnのみが1となり，残りの二つは1でない。各7Xnは一つだけ1になる小領域を持つ。7Xnが1である領域のXの値をnと定めれば，表6・1と一致する。

[故に分離法則及び基本的恒真式(3.0)～(3.8)に従う多値論理は三値論理で表わされる。勿論それを細分することで真理値の個数を増しても本質的には変わらない。先に，(3.1)においてX＝Xの真理値1を指定し，それの否定された項の真理値を3としたのが(3.3)。従って残りの真理値2は次の(6.14)によって表わされる。]

$[((7X \supset X) \supset 7(X \supset 7X)) \supset (X = 2)]^1.$ (6.14)!

VII　恒真式の独立性と公理の選出　表7.1のMSは基本的恒真式の番号で，(4.1)～(4.8)を1～8で表わす。Rは暫定解の組数。○印は独立性の証明されたもので，公理

表7.1

MS	1	2	3	4	5	6	7	◎8
R	1	4	1	2	16	12	2	1
MS	1	2	3	4	5	6	○8	◎7
R	1	4	1	2	16	12	9	1
MS	1	2	3	4	5	○8	○7	◬6
R	1	4	1	2	16	9	1	1
MS	1	2	3	4	○8	○7	◎5	△6
R	1	4	1	2	6	4	1	1
MS	1	2	3	○5	○8	○7	◬4	△6
R	1	4	1	20	11	1	1	1
MS	1	2	○7	○5	○8	◎3	△4	△6
R	1	4	180	4	2	1	1	1
MS	1	○3	○7	○5	○8	◎2	△4	△6
R	1	1	235	10	4	1	1	1
MS	○2	○3	○7	○5	○8	◬1	△4	△6
R	4	1	40	2	1	1	1	1

として採用される[(3.1)～(3.8)の!!!印]。◎印は最初に判った場所。その公理によって初めて一般解に到達したからである。その際消された暫定解が「従来，独立性証明に使われた特殊な多値論理」になっている。△印(◬は最初に判った場所)は独立でないらしい嫌疑者であるから，公理!!!及び規約!によって証明を試みる。

(3.1)の証明　初期条件(5.8)により満足される。

<u>(3.4)の証明</u> $X=Y$ は初期条件(5.8)により1か3かになるので

$$[(X=Y)=1]\cdot[(Y=Z)=1]\rightarrow[(Z=X)=1] \qquad (7\cdot4\cdot1)$$

なる関係をもつ。分離法則(3.0)に基づき

$$[(X=Y)=1]\rightarrow\{[(Y=Z)\supset(Z=X)]=1\}. \qquad (7\cdot4\cdot2)$$

$$[(Y=Z)=1]\rightarrow[(Z=X)=1]. \qquad (7\cdot4\cdot3)$$

<u>(3.6)の証明</u> (3.5),(3.7)⊢ $1\equiv X\supset(Y\supset X)$

$$\equiv Y\supset(X\supset X)\equiv \underline{Y\supset 1}\equiv \underline{3\supset 7Y}. \qquad (7.6.1)!!$$

特に $Y=3$ とおくことにより(7.6.1′)が導かれる。

$$1\equiv X\supset X\equiv(X=X). \qquad (7.6.1')!!$$

$$\underline{Y\supset(Y\cup Z)}\equiv Y\supset((Y\supset Z)\supset Z)$$

$$\equiv(Y\supset Z)\supset(Y\supset Z)\equiv 1. \qquad (7.6.2)!!$$

〔i〕 $\underline{X\supset Y=1,\ Y\supset Z=1}$ (7.6.3)!

$$Y\equiv X\cup Y_0,\quad Z\equiv Y\cup Z_0\equiv X\cup Y_0\cup Z_0 \qquad (7.6.4)!$$

とおけば

$$X\supset Z\equiv X\supset X\cup Y_0\cup Z_0\equiv 1 \qquad (7.6.5)$$

となり(3.6)は成立する。

〔ii〕 $\underline{X\supset Y=1,\ Y\supset Z\neq 1}$ (7.6.6)!

$$(3.6)\equiv(X\supset Y)\supset(X\supset((Y\supset Z)\supset Z))$$

$$\equiv(X\supset Y)\supset(X\supset Y\cup Z)\equiv 1. \qquad (7.6.7)!!$$

(7.6.2)により(7.6.7)が成立する。

[iii] $\underline{X \supset Y = 3}$ (7.6.8)!

$(3.6) \equiv \neg(X \supset Y \cup Z) \supset \neg(X \supset Y)$ [(7.6.7)より]

$\equiv \neg(X \supset Y \cup Z) \supset 1$

$\equiv 1.$ [(7.6.1)により] (7.6.9)!!

[iv] $\underline{X \supset Y = 2}$ (7.6.10)!

真理値2を採る項は(6.14)に従うことに成るので表1.1の新P=1即ち旧P=5に従う。

$$\left.\begin{aligned}(3.6) &\equiv (1 \supset 2) \supset (1 \supset 2 \cup Z)\\ &\equiv 2 \supset (2\ \text{又は}\ 1) \equiv 1,\\ (3.6) &\equiv (2 \supset 3) \supset (2 \supset 3 \cup Z)\\ &\equiv 2 \supset (2\ \text{又は}\ 1) \equiv 1.\end{aligned}\right\} \quad (7.6.11)$$

[(7.6.7)参照]

VIII $\underline{\text{強い意味の完全性}}$ M. Wajsbergの公理系(3.5)~(3.8)に於いては⊃, ¬の意味の一般解にP=1~4, 7~10を含んでいるので

$X \cup \neg X \equiv 1$ (8.1)!!!

なる異種類の恒真式を追加しても，表1.1のP=5, 6以外の解には矛盾を生じないので，P=1~4, 7~10が残ることになる。併し表1.1のP=5のみが成立する本報告の公理系(3.2), (3.3), (3.5), (3.7), (3.8)及び規約(3.0), (5.8), (6.14)に対しては(8.1)は成立しな

いので，強い意味の完全性を持つことになった。

引用文献

(1) 後藤以紀：多値論理の演算法則と公理との関係について。　日本数学会基礎論分科会（1971−10）.
(2) Motinori Goto, Shinji Kao, Tomoko Ninomiya: Determination of Many-Valued Truth Tables for Undefined Operators in Axioms by a Computer and Their Applications. Proc. of the 7th International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL). (1977-5). IEEE etc.
(3) M. Goto, S. Kao, T. Ninomiya: Determination of the Fittest Number of Truth-Values and Canonical Forms of Logical Functions for a Many-Valued Axiom Set by a Computer. Proc. of the 8th ISMVL. (1978-5).
(4) Nicholas Rescher: Many-Valued Logic p.341. McGraw Hill. 1969.
(5) M. Goto, S. Kao, T. Ninomiya: Axiomatization of Kleene's Three-Valued Logic by a Computer. Proc. of the 9th ISMVL. (1979-5).
(6) Nicholas Rescher: Many-Valued Logic. p.339. McGraw Hill. 1969.

(7) M. Goto, S. Kao, T. Ninomiya: Axiomatization of Bochvar's Three-Valued Logic by a Computer. Proc. of the 11th ISMVL. (1981-5).

(8) M. Wajsberg (1931), tr. in S. McCall (ed.), Polish Logic; 1920-1939 (Oxford, 1967), 12 at p. 267.