

ある多値論理関数の性質とその構造

防衛大学校 古賀 義亮
村木 正博

1 まえがき

0, 1, φ の 3 値をとる x, y, z の 3 つの変数を考える。この変数はお互いに関係があり、1 変数関数あるいは 2 変数関数の関係をもつものとする。重複を許してこれらの関数を取り出し、任意の変数間にその関数を割り当てることにより、3 つの変数の間に各種の関係を導くことができる。これを T 関数と呼ぶことにする。 T 関数は、任意の 3 個の T 関数による Δ 合成と呼ぶ方法を用いれば、任意の T 関数と等価な関係を導くことができる。

本論文は、 Δ 合成によって任意の T 関数と等価な関係を導くことを目的として、必要最小限の関数を変数間に割り当てた T 関数を T' 関数と呼び、 T 関数のそれぞれの持つ性質を明らかにし、任意の T 関数と等価な関係を構成するための必要十分な条件を明らかにする。

2 T関数と△合成

T関数及び△合成の変数の識別を明らかにし、T関数及び△合成を検討する上での条件を示す。

2.1 T関数と各関数

〔定義1〕 変数置換記号

T関数の3つの変数を x, y, z として表わす。このとき x, y, z は置換可能とする。 x, y, z の置換は群をなし、置換の方法は6通りあり $\sigma_i (i = 0 \sim 5)$ と表わす。

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix} \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$$

〔定義2〕 同形なT関数

任意のT関数を $t_j (j = 1, \dots, n)$ とするとき、このT関数の変数を σ_i で置換することを $\sigma_i t_j$ と表わす。ここで任意の2つのT関数を t_1, t_2 としたとき $\sigma_i t_1 = t_2$ であれば t_1 と t_2 は同形であると呼び、同じT関数として扱う。

定義1, 2から本論文において任意の1つの変数に関する考察は変数 x で、任意の2つの変数に関する考察は、変数 x, y で代表して行うものとする。

〔定義3〕 α, β, σ 関数

T関数の3つの変数の間の関係において、1つの1変数関数のみによる関数を α 関数、1つの変数によって残りの2つの変数が定まる2つの1変数関数を β 関数、2変数関数を γ 関数という。

α 関数は、 $y=f(x|x \neq \varnothing, y=\varnothing, z=\varnothing)$ (以下 $y=f(x)$) と表わす。

β 関数は、 $y, z=f(x|x \neq \varnothing, y=\varnothing, z=\varnothing)$ (以下 $y, z=f(x)$) と表わす。

γ 関数は、 $z=g(x, y|x \neq \varnothing, y \neq \varnothing, z=\varnothing)$ (以下 $z=g(x, y)$) と表わす。

〔定義4〕 関数関係がないときの表現

ある変数 i ($i=x, y, z$) について関数関係がないとき、これを $\varnothing(i)$ と表わす。

〔定義5〕 T関数の一般的表現

T関数は、[x を変数とする関数, y を変数とする関数, z を変数とする関数] と表わす。

2.2 Δ 合成と α, β, γ 関数と等価な Δ 合成

〔定義6〕 Δ 合成

任意の3個のT関数を P_x, P_y, P_z と表わす。

P_x の変数を x, l, n

P_y の変数を l, y, m

P_z の変数を n, m, z

とし、 P_x, P_y, P_z の関数を合成し、変数 x, y, z を対応させることを Δ 合成と呼ぶ。

〔定義7〕 等価な Δ 合成

任意の関数を F ，任意の Γ 関数を τ とすれば、任意の Δ 合成の α ， β ， γ の関係が F 又は τ と等しいとき、その Δ 合成は F 又は τ と等価な Δ 合成という。

たとえば $P_x \vdash l=f(x)$ ， $P_y \vdash y=f(l)$ が存在すれば、 $y=f\{f(x)\}$ となり $\beta = f(x)$ と等価な Δ 合成となる。

〔定義8〕 Δ 合成の一般的表現

Δ 合成は、 $P_x \Delta P_y \Delta P_z$ と表わす。

〔定義9〕 α ， β ， γ 関数と等価な Δ 合成

α ， β ， γ 関数と等価な Δ 合成は、それぞれ3種類あり、 $\hat{\alpha}_i$ ， $\hat{\beta}_i$ ， $\hat{\gamma}_i$ ($i = 1 \sim 3$)と表わす。 $\hat{\alpha}_i$ ， $\hat{\beta}_i$ ， $\hat{\gamma}_i$ ($i = 1 \sim 3$)を次に示す。

$$\hat{\alpha}_1 : [l=f(x), \varphi(l), \varphi(m)] \Delta [y=f(l), \varphi(y), \varphi(m)] \Delta [\varphi(m), \varphi(m), \varphi(z)]$$

$$\hat{\alpha}_2 : [n=f(x), \varphi(l), \varphi(m)] \Delta [\varphi(l), \varphi(y), y=f(m)] \Delta [m=f(m), \varphi(m), \varphi(z)]$$

$$\hat{\alpha}_3 : [l, n=f(x), \varphi(l), \varphi(m)] \Delta [y=g(l, m), \varphi(y), y=g(l, m)] \Delta [m=f(m), \varphi(m), \varphi(z)]$$

$$\hat{\beta}_1 : [l, n=f(x), \varphi(l), \varphi(m)] \Delta [y=f(l), \varphi(y), \varphi(m)] \Delta [z=f(n), \varphi(m), \varphi(z)]$$

$$\hat{\beta}_2 : [l=f(x), \varphi(l), \varphi(m)] \Delta [y, m=f(l), \varphi(y), \varphi(m)] \Delta [\varphi(m), z=f(m), \varphi(z)]$$

$$\hat{\beta}_3 : [l, n=f(x), \varphi(l), \varphi(m)] \Delta [y, m=f(l), \varphi(y), \varphi(m)] \Delta [z=g(n, m), z=g(n, m), \varphi(z)]$$

$$\hat{\gamma}_1 : [n=f(x), \varphi(l), \varphi(m)] \Delta [\varphi(l), m=f(y), \varphi(m)] \Delta [z=g(n, m), z=g(n, m), \varphi(z)]$$

$$\hat{\gamma}_2 : [n=g(x, l), n=g(x, l), \varphi(m)] \Delta [\varphi(l), l=f(y), \varphi(m)] \Delta [z=f(n), \varphi(m), \varphi(z)]$$

$$\hat{\gamma}_3 : [n=g(x, l), n=g(x, l), \varphi(m)] \Delta [\varphi(l), l, m=f(y), \varphi(m)] \Delta [z=g(n, m), z=g(n, m), \varphi(z)]$$

3 T関数の生成

[定義10] T関数

α, β, γ 関数から重複を許して2個の関数を取り出し、ある任意の変数 i ($i = x, y, z$) について、 i を変数とする関数、又は他の変数で i を定める関数がないように変数間に関数を割り当てたT関数をT関数という。

α, β, γ 関数から重複を許して関数を取り出し、それを変数間に割り当てることによりT関数を生成するものと考えられる。この場合、取り出す関数の数はたかだか3個である。1個の関数のみを取り出し割り当てたT関数は、任意の変数を i とすれば、 i を変数とする、又は i を定める関数は共に存在しない。従ってこのようなT関数を用いて、いかに Δ 合成しようとも i を変数とする、又は i を定める関数が共に存在するT関数と等価な Δ 合成はできない。 Δ 合成において i を変数とする、又は i を定める関数が共に存在する必要条件は、 i 以外の変数を j とし、 f, g の関数を F とすれば、 $i = F(j)$, $j = F(i)$ が共に存在することである。従って任意のT関数と等価な Δ 合成を行うための最小の関数の数は、2個といえる。

定義10からT関数の生成を行う。 α, β, γ 関数から重複を許した2個の関数の取り出しは、次に示す6通りがある。

- (1) 2つの α (2) α と β (3) 2つの β

(4) α と γ (5) β と γ (6) 2つの γ

この取り出し方法のうち(5)は、任意の変数 i を変数とする、又は i を定める関数が共に存在してしまうので Γ 関数ではない。

〔補題1〕 2つの α を割り当てる Γ 関数は3種類ある。

(証明) 変数 x と y に α 関数の変数を割り当てることにする。このとき変数 x には $y=f(x)$ か $z=f(x)$ を、変数 y には $x=f(y)$ か $z=f(y)$ を割り当てることができる。従って

$$(1) [y=f(x), z=f(y), \varphi(z)] \quad (2) [y=f(x), x=f(y), \varphi(z)]$$

$$(3) [z=f(x), z=f(y), \varphi(z)] \quad (4) [z=f(x), x=f(y), \varphi(z)]$$

の4つの Γ 関数を得ることができる。ここで(4)の Γ 関数を、 Γ で置換すると $[y=f(x), z=f(y), \varphi(z)]$ となり(1)と同形であることが分る。従って3種類の Γ 関数を得ることができる。

(証明終り)

ここで(1)を Γ_1' , (2)を Γ_2' , (3)を Γ_3' と表わす。

〔補題2〕 α と β を割り当てる Γ 関数は2種ある。

変数 x に β 関数、変数 y に α 関数の変数を割り当てることにする。変数 x の β 関数は $y, z=f(x)$, 変数 y の α 関数には $x=f(y)$ か $z=f(y)$ を割り当てることができる。従って

$$(1) [y, z=f(x), x=f(y), \varphi(z)] \quad (2) [y, z=f(x), z=f(y), \varphi(z)]$$

の2つの Γ 関数を得ることができる。 (証明終り)

ここで(1)を T_4' , (2)を T_5' と表わす。

〔補題3〕 2つの β を割り当てる T 関数は1種類のみである。

(証明) 変数 x, y に β 関数の変数を割り当てることにする。変数 x の β 関数は $y, z=f(x)$, 変数 y の β 関数は $x, z=f(y)$ を割り当てることができる。従って

$[y, z=f(x), x, z=f(y), \varphi(z)]$ を得ることができる。(証明終り)

この T 関数を T_6' と表わす。

〔補題4〕 α と γ を割り当てる T 関数は1種類のみである。

(証明) γ 関数は、 $z=g(x, y) \mid x \neq \varphi, y \neq \varphi, z = \varphi$ である。つまり $x \neq \varphi, y \neq \varphi$ が共に成立するとき、この関数が成立する。 $z=g(x, y)$ が存在する T 関数に $y=f(x)$ を割り当てることを考える。 $x \neq \varphi, y = \varphi, z = \varphi$ のとき $y=f(x)$ が成立し、 $x \neq \varphi, y \neq \varphi, z = \varphi$ のとき $z=g(x, y)$ が成立する。このように変数 x を変数とする関数が、変数の値によって変化することを順序回路的機能という。本論文では順序回路的機能は許さないことにする。従って変数 x に α 関数、変数 y, z に γ 関数の変数を割り当てることにする。変数 x の α 関数には $y=f(x), z=f(x)$ を、変数 y, z の γ 関数には $x=g(y, z)$ を割り当てることができる。従って

(1) $[y=f(x), x=g(y, z), x=g(y, z)]$ (2) $[z=f(x), x=g(y, z), x=g(y, z)]$
 の2つのT'関数を得ることができる。ここで(2)を Γ_3 で置換すると $[y=f(x), x=g(y, z), x=g(y, z)]$ となり(1)と同形であることが分る。
 (証明終り)

ここで(1)を T_1' と表わす。

〔補題5〕 2つの Γ を割り当てるT'関数は1種類のみである。

(証明) 変数 x, y に Γ 関数の変数を割り当てることにする。このときもう一つの Γ 関数の変数は変数 y, z か x, z に割り当てることができる。従って

$$(1) [z=g(x, y), z=g(x, y) \& x=g(y, z), x=g(y, z)]$$

$$(2) [z=g(x, y) \& y=g(x, z), z=g(x, y), y=g(x, z)]$$

の2つのT'関数を得ることができる。ここで任意の変数 i を変数とする関数が2つ存在するとき、 $\&$ 記号を使用して共に表わすことにする。(2)を Γ_1 で置換すると $[z=g(x, y), z=g(x, y) \& x=g(y, z), x=g(y, z)]$ となり(1)と同形であることが分る。

(証明終り)

ここで(1)を T_1' と表わす。

4 T'関数の基本的性質

T'関数に関する諸定義を行い、各関数の基本的性質及び、すべてのT'関数と等価な Δ 合成を検討し、 Δ 合成におけるT

関数の基本的性質を明らかにする。

〔定義11〕 2つのT関数の関係

t_1, t_2 を任意の2つのT関数とするとき、 t_1 の関数が t_2 の関数に含まれ、しかも t_1 と同じT関数として Δ 合成に用いることが可能なとき、 t_2 は t_1 のT関数を持つという。

〔定義12〕 T関数の包含

(1) t_1, t_2 を任意の2つのT関数とする。 t_2 は t_1 のT関数を持ち、しかも t_2 自身で t_1 と等価な Δ 合成ができるとき、 t_2 は t_1 を包含するという。

(2) t_2 は t_1 のT関数を持ち、 t_2 と t_1 以外のT関数で t_1 と等価な Δ 合成ができるとき、 t_2 は t_1 を条件付包含するという。

(3) t_2 に t_1 のT関数は含まれるが、T関数を持たないとき t_2 は t_1 を虚に包含するという。

〔定義13〕 生成集合と基底

T関数からなる集合を S とする。 $S = \{t_i | i=1, \dots, n\}$ の任意の部分集合を S_k と表わす。 S_k の任意の要素による Δ 合成で合成される等価なT関数の集合 $K = \{t_j | j=1, \dots, p\}$ と表わす。 $K=S$ となる場合、集合 S_k を S の生成集合と呼ぶ。この生成集合の中で構成要素数が最小である集合を S の基底と呼ぶ。

〔定義14〕 T関数の同値

t_1, t_2 を任意の2つのT関数とするとき、集合 S_k に対して

$t_1 \cup S_k$ が集合 S の生成集合なら、 $t_2 \cup S_k$ も集合 S の生成集合で、かつ $t_1 \cup S_k$ が集合 S の非生成集合なら $t_2 \cup S_k$ も集合 S の非生成集合であるとき、 t_1 と t_2 は同値であると呼ぶ。

〔補題6〕 β は γ 関数と等価な Δ 合成には、 β は β 、 γ は γ 関数の T 関数を持つ T 関数を必要とする。

(証明) 定義8に示されているように $\hat{\beta}_i, \hat{\gamma}_i (i=1 \sim 3)$ には、 P_x, P_y, P_z のいずれかに β は β 、 γ は γ 関数を持つ T 関数が含まれている。(証明終り)

〔補題7〕 β 関数1つのみを割り当てた T 関数の Δ 合成で、 α 関数1つのみを割り当てた T 関数と等価な Δ 合成ができる。

(証明) P_z に $z=f(m), z=f(m)$ が存在しない Δ 合成を考えればよい。 $[l, m=f(x), \varphi(l), \varphi(m)] \Delta [y, m=f(l), \varphi(y), \varphi(m)] \Delta [\varphi(m), \varphi(m), n, m=f(z)]$ で成立する。(証明終り)

〔補題8〕 T_1' と等価な Δ 合成には、 T_1' の T 関数を持つ T 関数が必要である。

(証明) T_1' と等価な Δ 合成を考えてみる。そのためには P_x, P_y の変数 x, y に T 関数の $y=f(x), z=f(y)$ と等価な Δ 合成となる $\hat{\alpha}_i (i=1 \sim 3)$ を割り当てればよい。定義8からすべての組み合わせを作ると次に示す9通りの Δ 合成がある。

- (1) $[l=f(x), \varphi(l), \varphi(m)] \Delta [y=f(l), m=f(y), \varphi(m)] \Delta [\varphi(m), z=f(m), \varphi(z)]$
- (2) $[l=f(x), n=f(l), \varphi(m)] \Delta [y=f(l), l=f(y), \varphi(m)] \Delta [z=f(n), \varphi(m), \varphi(z)]$
- (3) $[l=f(x), n=f(l), \varphi(m)] \Delta [y=f(l), l, m=f(y), \varphi(m)] \Delta [z=g(m, n), z=g(m, n), \varphi(z)]$
- (4) $[n=f(x), \varphi(l), \varphi(m)] \Delta [\varphi(l), m=f(y), y=f(m)] \Delta [m=f(m), z=f(m), \varphi(z)]$
- (5) $[n=f(x), n=f(l), \varphi(m)] \Delta [\varphi(l), l=f(y), y=f(m)] \Delta [m, z=f(m), \varphi(m), \varphi(z)]$
- (6) $[n=f(x), n=f(l), \varphi(m)] \Delta [\varphi(l), l, m=f(y), y=f(m)] \Delta [m=f(m) \& z=g(m, n), z=g(m, n), \varphi(z)]$
- (7) $[l, m=f(x), \varphi(l), \varphi(m)] \Delta [y=g(l, m), m=f(y), y=g(l, m)] \Delta [m=f(n), z=f(m), \varphi(z)]$
- (8) $[l, n=f(x), n=f(l), \varphi(m)] \Delta [y=g(l, m), l=f(y), y=g(l, m)] \Delta [m, z=f(m), \varphi(m), \varphi(z)]$
- (9) $[l, m=f(x), n=f(l), \varphi(m)] \Delta [y=g(l, m), l, m=f(y), y=g(l, m)] \Delta [m=f(m) \& z=g(m, n), z=g(m, n), \varphi(z)]$

ここで(5), (8)は組み合わせの結果として変数 x が $n=f(x)$, $m, z=f(m)$, $y=f(m)$ を Δ 合成することにより、 $m, z=f\{f(x)\}$ と $y=f\{f\{f(x)\}$ の β 関数と等価になり不適当である。また(6), (9)は P_2 が順序回路的機能になるため不適当である。そこで(1)~(4), (7)について検討する。(1)の P_4 において l を x , m を z に置き換えれば $[y=f(x), z=f(y), \varphi(z)]$ となり T_1' と同形である。同様に(2), (3)は P_2 , (4), (7)は P_2 が T_1' と同形である。このことから T_1' の T 関数を持つ T 関数を必要とすることが分る。(証明終)

〔補題9〕 T_3' と等価な Δ 合成には、 T_3' の T 関数を持つ T 関数が必要である。

(証明) T_3' は $[z=f(x), z=f(y), \varphi(z)]$ である。 Δ 合成によって $z=f(x)$, $z=f(y)$ と等価になるためには、 $z=f(m)$ か $z=f(n)$ またはその両方が同時に存在するか、または $z=g(m, n)$ が存在する必要がある。 $z=f(m)$, $z=f(n)$ が同時に存在するときは、 P_x が $[z=f(m), z=f(n), \varphi(z)]$ となり、 n を x , m を y に置き換えれば $[z=f(x), z=f(y), \varphi(z)]$ となり T_3' と同形である。また $z=f(m)$ のみが存在するとき、変数 x は、 $l=f(x)$, $m=f(l)$, $z=f(m)$ を Δ 合成して $z=f\{f\{f(x)\}\}$ 、変数 y は $m=f(y)$, $z=f(m)$ を Δ 合成して $z=f\{f(y)\}$ が成立する必要がある。このとき P_y は、 $[m=f(l), m=f(y), \varphi(m)]$ となり、 l を x , m を z に置き換えれば $[z=f(x), z=f(y), \varphi(z)]$ となり T_3' と同形である。 $z=f(n)$ のみが存在するときも $z=f(m)$ の場合と同様に P_x が T_3' と同形になる。また、 $z=g(m, n)$ が存在するとき、 $z=f(m)$ のみと $z=f(n)$ のみが存在する場合が同時に成立する必要があるので P_x , P_y が同時に T_3' と同形になる。(証明終り)

〔定義15〕 T_1' , T_3' 等の T 関数を持つ T 関数

β , γ 関数, T_1' , T_3' の T 関数を持つ T 関数の集合を、それぞれ F_β , F_γ , R_1 , R_3 と表わす。またそれぞれの要素を f_β , f_γ , r_1 , r_3 と表わす。

〔補題10〕 r_1 と等価な Δ 合成には r_1 を必要とする。

(証明) 任意の r_1 は $y=f(x)$, $z=f(y)$ に T_1' の T 関数を持つと仮定する。この $y=f(x)$, $z=f(y)$ と等価な Δ 合成には、補題8から P_x , P_y , P_z のいずれかに r_1 が存在する。次に他の関数と等価な Δ 合成を成立させたとする。このとき P_x , P_y , P_z のいずれもが r_1 でなくなれば、 $y=f(x)$, $z=f(y)$ に仮定した T_1' の T 関数は Δ 合成できなくなる。従って Δ 合成するためには、 r_1 が存在しなければならない。(証明終り)

〔補題11〕 r_3 と等価な Δ 合成には r_3 を必要とする。

(証明) 任意の r_3 は $z=f(x)$, $z=f(y)$ に T_3' の T 関数を持つと仮定する。この $z=f(x)$, $z=f(y)$ と等価な Δ 合成には、補題9から P_x , P_y , P_z のいずれかに r_3 が存在する。次に他の関数と等価な Δ 合成を成立させたとする。このとき P_x , P_y , P_z のいずれもが r_3 でなくなれば、 $z=f(x)$, $z=f(y)$ に仮定した T_3' の T 関数は Δ 合成できなくなる。従って Δ 合成するためには、 r_3 が存在しなければならない。(証明終り)

〔定理1〕

T 関数の生成集合となる必要十分な条件は、集合に f_β , f_r , r_1 , r_3 をすべて含むことである。

(証明) f_β , f_r , r_1 , r_3 として

$f_\beta: [y, z=f(x), \varphi(y), \varphi(z)]$

$$r_1 : [\varphi(x), x=g(y,z), x=g(y,z)]$$

$$r_2 : [y=f(x), z=f(y), \varphi(z)]$$

$$r_3 : [z=f(x), z=f(y), \varphi(z)]$$

を考える。補題6, 10, 11からこのT関数の集合は、T'関数の生成に必要な集合である。また次に示すように、このT関数のみで、すべてのT'関数と等価な Δ 合成ができる。

$$T_2' : [l=f(x), \varphi(l), x=f(m)] \Delta [y=f(l), m=f(y), \varphi(m)] \Delta [\varphi(m), n=f(m), m=f(z)]$$

$$T_4' : [m=f(x), x=f(l), \varphi(m)] \Delta [\varphi(l), l=f(y), y=f(m)] \Delta [m, z=f(m), \varphi(m), \varphi(z)]$$

$$T_5' : [l, m=f(x), \varphi(l), \varphi(m)] \Delta [y=f(l), m=f(y), \varphi(m)] \Delta [z=f(m), z=f(m), \varphi(z)]$$

$$T_6' : [l, m=f(x), x=f(l), \varphi(m)] \Delta [y=f(l), l, m=f(y), \varphi(m)] \Delta [z=f(m), z=f(m), \varphi(z)]$$

$$T_7' : [l=f(x), \varphi(l), x=f(m)] \Delta [y=f(l), m=f(y), \varphi(m)] \Delta [\varphi(m), n=g(m,z), n=g(m,z)]$$

$$T_8' : [l=f(x), x=g(l,m), x=g(l,m)] \Delta [y=g(l,m), l=f(y), y=g(l,m)] \Delta [\varphi(m), \varphi(m), n, m=f(z)]$$

(証明終り)

ここで T_2' , T_3' は r_1 , r_3 と考えたT関数なので、等価な Δ 合成は考えない。また T_6' , T_8' は Δ 合成した T_4' , T_7' を用いて Δ 合成する。

5 T関数の基底

β , γ 関数, T_1' , T_3' を包含又は条件付包含するT関数を検討し、同値性をもとに類別すれば、定理1からT関数の基底を求めることができる。

[補題12] T_1 を包含するT関数は T_4' のみである。

(証明) T_1' の T 関数を含む T 関数は、 T_4' , T_5' , T_6' である。
 T_4' は $[y, z=f(x), x=f(y), \varphi(z)]$ である。これを Π_1 で置換すると、
 $[y=f(x), x, z=f(y), \varphi(z)]$ となり、これを P_y に割り当て P_x に $l=f(x)$,
 P_z に $z=f(m)$ が存在すれば、変数 x は $l=f(x)$, $y=f(l)$ を Δ 合成
し $y=f\{f(x)\}$, 変数 y は $m=f(y)$, $z=f(m)$ を Δ 合成して $z=f$
 $f\{f(y)\}$ が成立し、 T_1' と等価な関数を得ることができる。

T_5' は $[y, z=f(x), z=f(y), \varphi(z)]$ である。 T_4' の場合と同様に P_y に割
り当てる。 $z=f(y)$ と等価な Δ 合成を成立させるためには、 P_z
に $z=f(m)$ が存在する必要がある。ここで $y=f(x)$ と等価な Δ 合
成を成立するために P_x に $l=f(x)$ が存在しているので、変数 x
は、 $l=f(x)$, $y, m=f(l)$, $z=f(m)$ を Δ 合成することにより、 y, m
 $=f\{f(x)\}$ と $z=f\{f\{f(x)\}\}$ が成立し β 関数を持つことになる。
従って T_5' は T_1' の T 関数は持たない。

T_6' は T_4' , T_5' の T 関数を含む。従って T_6' そのままでは、 T_1' の
 T 関数は持たない。そこで T_6' のみで T_4' と等価な Δ 合成が可能
か検討する。 T_6' の $z=f(y)$ を成立させない Δ 合成を考之れば
よい。 T_6' を P_y に割り当てたとき P_z に $z=f(m)$ が存在しなければ
よい。ここで $l=f(x)$, $m=f(l)$, $z=f(m)$ を Δ 合成した $z=f\{f\{f(x)\}\}$
が成立しないことになり、変数 x を変数とする β 関数が成立
するためには P_z に $z=f(m)$ が存在する必要がある。このとき変
数 y は、 $z=f(y)$ と等価な Δ 合成が成立するため、 P_x に x, n

$=f(l)$ が存在しているので β 関数が成立することになる。このことから T_1' の T 関数を持つ T' 関数は T_4' のみであることが分る。

T_4' は $[l, n=f(x), \varphi(l), x=f(m)] \Delta [y, m=f(l), l=f(y), \varphi(m)] \Delta [\varphi(m), n, z=f(m), m=f(z)]$ の合成で $[y, z=f(x), \varphi(y), \varphi(z)]$ と等価な Δ 合成ができ、これを用いて $[l, n=f(x), \varphi(l), \varphi(m)] \Delta [y=f(l), l, m=f(y), \varphi(m)] \Delta [\varphi(m), n, z=f(m), \varphi(z)]$ で T_1' と等価な Δ 合成ができる。(証明終り)

[補題13] T_5' は T_3' を包含する。

(証明) T_5' は $[y, z=f(x), z=f(y), \varphi(z)]$ である。これを β に割り当て β に $n=f(x)$, P_y に $m=f(y)$ が存在すれば、変数 x は、 $n=f(x)$, $z=f(m)$ を Δ 合成して $z=f\{f(x)\}$ が、変数 y は、 $m=f(y)$, $z=f(m)$ を Δ 合成して $z=f\{f(y)\}$ が成立する。従って T_3' の T 関数を持つ。また $[n=f(x), x, n=f(l), \varphi(m)] \Delta [y, m=f(l), m=f(y), \varphi(m)] \Delta [m, z=f(m), z=f(m), \varphi(z)]$ で T_3' と等価な Δ 合成ができる。(証明終り)

[補題14] T_6' は T_3' を条件付包含する。

[補題15] T_6' のみの Δ 合成では、1つの β 関数を割り当てた T 関数と等価な Δ 合成はできない。

(証明) T_6' は $[y, z=f(x), x, z=f(y), \varphi(z)]$ である。 T_5' の場合と同様に β に割り当て β に $n=f(x)$, P_y に $m=f(y)$ が存在すれば $z=f(x)$, $z=f(y)$ と等価な Δ 合成ができる。従って T_3' の T

関数を持つ。次に T_6' のみの Δ 合成で T_5' と等価な Δ 合成が可能か検討する。 T_5' で考えた Δ 合成を T_6' に置き換えると変数 x , y を変数とする β 関数が成立する。そこで T_6' のみで T_5' と等価な Δ 合成ができるか検討する。 T_6' の $x=f(y)$ が成立しない Δ 合成を考えればよい。 T_6' を P_y に割り当てたとき、 P_x に $x=f(l)$ が存在しなければよい。それには T_6' を $[n, l=f(x), \varphi(l), x, l=f(m)]$ のように P_x に割り当てる必要がある。このとき P_y は、 $z=f(y)$ と等価な Δ 合成が成立するために、 $z=f(m)$ が存在する。ここで $n=f(m)$ が存在し、 $m=f(y)$, $n=f(m)$, $x=f(n)$ を Δ 合成することにより $x=f \circ f \circ f(y)$ が成立してしまうことになる。従って T_5' と等価な Δ 合成はできない。また一つの β 関数のみを割り当てた T 関数と等価な Δ 合成は、 $x=f(y)$, $z=f(y)$ が同時に成立しない Δ 合成を実現する必要がある。これは T_4' , T_5' と等価な Δ 合成ができないことから不可能である。(証明終り)

補題12, 13, 14, 15から T' 関数を類別する。その結果を表1に示す。ここで○で囲まれた T' 関数は、条件付包含を示す。表1から f_p, f_r, r_1, r_3 をすべて含む基底を求めることができる。その結果、次に示す10組の集合を得る。

表1 T' 関数の類別

F_B	$T_4', T_5', \textcircled{T_6'}$
F_Y	$T_7', \textcircled{T_8'}$
R_1	T_1', T_4'
R_3	$T_3', T_5', \textcircled{T_6'}$

- (1) T_1, T_5, T_7 (2) T_1, T_5, T_8
 (3) T_1, T_6, T_7 (4) T_1, T_6, T_8
 (5) T_3, T_4, T_7 (6) T_3, T_4, T_8
 (7) T_4, T_5, T_7 (8) T_4, T_5, T_8
 (9) T_4, T_6, T_7 (10) T_4, T_6, T_8

6 あとがき

0, 1, φ の3値をとる3つの変数 x, y, z にお互に関係を持たせるT関数と呼ぶ論理を考え、その性質について考察を行った。T関数は Δ 合成を用いれば、すべてのT関数を必要とせず、生成集合は集合 $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ をすべて含むことが、必要十分な条件であることが明らかになった。

本研究で得られた論理における補題、定理は、同等な機能を持つ3ポートコンピュータネットワークの交換機能などの検討に応用できるものとする。

文 献

- (1) 古賀, 児島: "3ポート論理素子" 信学論(D), J61-D, 6, PP373 ~ 380 (昭53-06)
 (2) 錢木, 山根, 古賀: "3ポート論理回路網の応答とその表現" 信学論(D), J63-D, 12, PP994 ~ 1001