数理解析研究所講究録
第455巻 1982年 167-175

遅延つきの関数の完全性

東京都立大学　足田輝雄

はじめに

多値スイッチング関数におけるいわゆる完全性 completeness，すなわち，「関数の与えられた集合の元を基本素子として，すべての関数を合成できるか？」という問題を，各関数がその計算において非負整数値の遅延 delay を持つ場合に拡張して考え，これまでの結果を概観し，未解決の問題を述べる。本稿の構成は次の通りである。

Ⅰ．準備 —— 記法，定義

Ⅱ．遅延つき関数の集合の完全性

Ⅲ．単位遅れに限った場合

Ⅳ．遅延つき Sheffer 関数

Ⅳ-1 節は新しい結果を含む．なお，完全性の問題の一般的な解説が，野崎 [10]，足田 [2] にある．

Ⅰ．準備 —— 記法，定義

Ⅰ-1　遅延つき関数

$k \geq 2$ とし，$E_k = \{0, 1, \cdots, k-1\}$ とする．

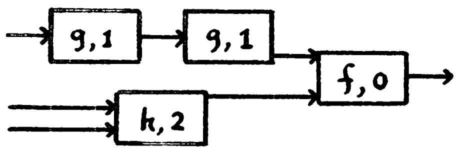
各 $n \geq 1$ に対して $P_k^n = \{ f \mid f : (E_k)^n \to E_k \}$ とし,

$$P_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_k^n \qquad : \text{k-値関数全体}$$

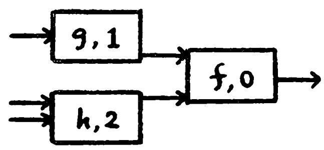
とおく.

定義　$f \in P_k$, d を非負整数として, 組 (f, d) のことを遅延つき関数 function with delay という.

遅延つき関数は, それぞれの関数の遅延の足並みをうまく揃えて合成するものとする. また入力信号は, 一度だけ, 一斉に, 与えられるものとする. 次の例で, (a) は合成であるが (b) は合成ではない. なお, 合成においてフィードバックは許さない.



(a)



(b)

定義　遅延つき関数の集合 $\mathbb{F}$ の元の合成によって, すべての k-値関数 f を, ある遅延 d (これは f に依存する) で合成できるとき, $\mathbb{F}$ を完全という.

例　　$\{ (\text{nand}, 1) \}$ 　非完全 (von Neumann).

　　$\{ (\text{nand}, 1), (\text{id}, 1) \}$ 　完全.

定義　遅延つき関数の集合 $\mathbb{F}$ が, 非完全で, 任意の $\mathbb{G} \supsetneq \mathbb{F}$ なる $\mathbb{G}$ が完全のとき, $\mathbb{F}$ を極大 maximal という.

I-2 スペクトラム

定義　各 $d \geq 0$ に対して，$F_d \subseteq P_k$ として，列

$$\mathcal{F} = (F_0, F_1, F_2, \cdots)$$

をスペクトラムという．

遅延つき関数の1つの集合と，1つのスペクトラムとは一対一に対応する．たとえば，

$$\{ (\text{nand}, 1), (\text{or}, 2) \} \longleftrightarrow (\phi, \{\text{nand}\}, \{\text{or}\}, \phi, \phi, \cdots)$$

スペクトラムの方が扱いやすいので，ふつうこちらの方を用いる．スペクトラムに対しても完全性，極大性がすぐに定義される．

I-3 関係

定義　$h \geq 1$ とするとき，巾集合 $(E_k)^h$ の部分集合 ρ のことを h-関係という．

例　E_k の上の1つの順序関係を $\leq$ とすると，これは，$h = 2$ として，関係

$$\rho_{\leq} = \{ (a, b) \in (E_k)^2 \mid a \leq b \}$$

を定める．

定義　2つの h-関係 ρ, τ に対して，k-値関数の集合 $A(\rho, \tau)$ を次のように定義する：

$$A(\rho, \tau)$$

$$= \left\{ f \in P_k \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の}(a_0^0, \cdots, a_0^{h-1}), \cdots, (a_{n-1}^0, \cdots, a_{n-1}^{h-1}) \in \rho \text{ に} \\ \text{対して, ある } (b^0, \cdots, b^{h-1}) \in \tau \text{ があって,} \\ \qquad f(a_0^i, \cdots, a_{n-1}^i) = b^i \\ \text{が } i = 0, \cdots, h-1 \text{ について成立する.} \end{array} \right\}.$$

例　先の $\rho_{\le}$ に対して,

$$A(\rho_{\le}, \rho_{\le}) = \{ \le \text{ に関する単調増加関数} \}.$$

II. 遅延つき関数の集合の完全性

II - 1　完全性条件

<u>定理</u> 1　スペクトラム $\mathcal{F}$ が完全

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ がどの極大スペクトラムにも含まれない.

II - 2　極大スペクトラムの特徴づけ

定義　スペクトラム $\mathcal{F} = (F_0, F_1, \cdots, F_d, \cdots)$ が,

<u>type (A)</u>　とは, ある (通常の) 極大集合 $M \subseteq P_k$ があって, すべての $d \ge 0$ に対して

$$F_d = M.$$

<u>type (B)</u>　とは, p 個 $(p \ge 2)$ の h - 関係 $\rho^0, \rho^1, \cdots, \rho^{p-1}$ があって $(1 \le h \le k)$,

$$F_d = \bigcap_{m=0}^{p-1} A(\rho^m, \rho^{m \oplus d}), \quad d \ge 0.$$

ここで $\oplus$ は mod p の和.

type (C) とは、2-関係 ρ^0, ρ^1 があって、

$$F_0 = A(\rho^0, \rho^0),$$
$$F_d = A(\rho^0, \rho^1), \qquad d \geq 1.$$

定理2 ([5]) 極大スペクトラムは、type (A), type (B), type (C) のいずれかである。

注意 type (B) の極大スペクトラムは有限個のクラスからなり、各クラスは、p をパラメタとする無限個からなると予想される（少なくとも $k=2, 3$ の時はそうである）. type (A) と type (C) の極大スペクトラムは有限個である。

II-3 極大スペクトラムの具体的決定

type (A) は、古典的な（遅延のない）場合と同じことになり、Post ($k=2$), Jablonskii ($k=3$), Rosenberg (k-一般) によって完全にわかっている。type (B), type (C) の場合は、実際に極大となるような、定義中の関係たちをすべて選び出せばよい。わかっている極大スペクトラムのリストを書き並べると長くなるので、ここでは、各 k について、各 type の極大スペクトラムの総数だけを示す。

	type (A)	type (B)	type (C)	
$k=2$	5	2種	4	: ([7])
$k=3$	18	12種	19	: ([1])
k-一般	known	?	([3])	

すなわち，一般のkに対するtype (B) の極大スペクトラムの決定が残された問題である．しかしこれは相当むずかしい．部分的な結果が [8] にある．Hikita と Rosenberg がいくつかやはり部分的な結果を得ている．決定のための準備が [4] にある．

Ⅲ．単位遅れに限った場合

Ⅲ－1　一様完全性

単位遅れ ($d=1$) を持つ関数を基本素子として，遅延をうまく揃えて合成することを考える．これは第Ⅱ章の特殊な場合である．

定義　　k－値関数の集合 $F \subseteq P_k$ が一様完全 uniformly complete とは，スペクトラム $(\phi, F, \phi, \phi, \cdots)$ が完全であること．

定義　　k－値関数の集合 $F \subseteq P_k$ が一様極大 uniformly maximal とは，Fが一様完全でなく，任意の $G \supsetneq F$ なる G が一様完全のとき．

定理3　　k－値関数の集合 F が一様完全

$\Longleftrightarrow$　Fがどの一様極大集合にも含まれない．

Ⅲ－2．一様極大集合の特徴づけ

定理4（[9]）　一様極大集合は次のいずれかの形：

i) p個 ($p \geq 1$) の k-関係 $\rho^0, \rho^1, \cdots, \rho^{p-1}$ があって,

$$\bigcap_{m=0}^{p-1} A(\rho^m, \rho^{m \oplus 1}).$$

ここで $\oplus$ は mod p の和.

ii) ある $a, b \in E_k$ ($a \neq b$) があって,

$$\{ f \in P_k \mid f(a, a, \cdots, a) = f(b, b, \cdots, b) \}.$$

Ⅲ-3　一様極大集合の具体的決定

やはり個数のみをあげる.

$k = 2$	8	: ([7])
$k = 3$	30	: ([9])
k 一般	?	

これも k が一般の時が未解決である. これは, 実質的に, Ⅱ-3 節の問題よりややややさしいかという程度である.

Ⅳ. 遅延つき Sheffer 関数

Ⅳ-1　2値 ($k = 2$) の場合

$\bar{0}, \bar{1}$ を定数値関数 $\in P_2$ とし, $C = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ とおく.

定義 a) 2値関数 f が <u>Sheffer</u> $\Leftrightarrow$ $\{f\}$ 完全

b) 〃 <u>Sheffer with constants</u> $\Leftrightarrow$ $\{f\} \cup C$ 完全

c) 〃 <u>uniformly Sheffer</u> $\Leftrightarrow$ $\{f\}$ 一様完全

d) 〃 <u>uniformly Sheffer with constants</u> $\Leftrightarrow$ $\{f\} \cup C$ 一様完全

定理5　nを変数の個数とするとき，各$n \geq 1$に対して，上の定義中の関数の総数は：

a)　$2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$.　(known)

b)　$2^{2^n} - 2^{n+1} + n + 2 - \mu(n)$.

c)　0 .　([9])

d)　$2^{2^n-1} - 2^n + 2n + 4 - 2\mu(n)$.

ここで$\mu(n)$はn変数単調増加関数の個数で，[6]によれば，

$$\mu(n) \sim 2^{\binom{n}{[n/2]}} .$$

a), b), d)の証明は，極大集合や一様極大集合に対する counting argument による（略）.

例

n	1	2	3	...
a)	0	2	56	...
b)	0	6	225	...
d)	0	0	90	...

Ⅳ-2　多値の場合

上の結果を，[9]，[11]を用いて，$k \geq 3$の場合に拡張したい．しかし計算は大変そうである．

参考文献

[1] T. Hikita : Completeness criterion for functions with delay defined over a domain of three elements, Proc. Japan Acad., 54 (1978), 335-339.

[2] 疋田：遅れつき論理の完全性，数理科学，No. 200, 34-39, 1980年2月.

[3] T. Hikita : On completeness for k-valued functions with delay, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 28, "Finite Algebra and Multiple-Valued Logic", 345-371, 1981.

[4] T. Hikita : Completeness properties of k-valued functions with delays — inclusions among closed spectra, Math. Nachr., to appear.

[5] T. Hikita and A. Nozaki : A completeness criterion for spectra, SIAM J. Comput., 6 (1977), 285-297, 8 (1979), 656.

[6] A. D. Korsunov : Solution of Dedekind's problem on the number of monotonic Boolean functions (in Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 233 (1977), translated in Soviet Math. Dokl., 18 (1977), 442-445.

[7] V. B. Kudrjavcev : Completeness theorem for a class of automata without feedback couplings (in Russian), Problemy Kibernet., 8 (1962), 91-115.

[8] L. Martin, C. Reischer and I. G. Rosenberg : Completeness problems for switching circuits constructed from delayed gates, Proc. 8th Int. Symp. Multiple-Valued Logic, 142-148, 1978.

[9] A. Nozaki : Functional completeness of multi-valued logical functions under uniform compositions, Rep. Fac. Eng. Yamanashi Univ., 29 (1978), 61-67.

[10] 野崎：多値論理関数族の完全性，数理科学，No. 200, 29-33, 1980年2月.

[11] 田中，田原：三値論理関数の完全性とPolypheck, 信学論(C), 53-C (1970), 111-118.