

## 指数和と Littlewood 予想

岡山大 理 鹿野 健

ある種の指数和の下からの評価に関する基本的な問題として知られているものに、Littlewood 予想とよばれている次のようなものがある：

与えられた、互に異なる整数列を  $\{n_k\}$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) とすると、絶対定数  $A > 0$  が存在して、 $N$  が十分大ならば、

$$(1) \quad I_N \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^N \exp(in_k x) \right| dx > A \log N.$$

この問題は、Fourier 級数論に関する問題として、最初 G. H. Hardy と J. E. Littlewood の共著論文 [6] に現われたが、それは G. Pólya によって 1927 年に彼等に提出された不等式の一問題に端を発するものであった ([5] および [7] を参照)。外見の単純さに反し、予想 (1) は長らく未解決であったが、最近相次いで (独立に) 2 つの論文 [9], [8]

において解決された。前者は Cohen [3], Fournier [4] の系統の証明であり, 後者は Pichorides [12] の方法の上に立ったものである。得られた結果は, 共にその系として (1) を与えるが, 互に異なる形のものである。前者の方が応用上より一般的な結果であると思われるが, その特別な場合が次の定理である。

[定理 1] (McGehee, Pigno & Smith [9])

任意の整数列  $n_1 < n_2 < \dots < n_N$  に対して,

$$(2) \quad J_N \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^N c_k \exp(in_k x) \right| dx \geq A \sum_{k=1}^N \frac{|c_k|}{k},$$

となるような絶対定数  $A$  が存在する。

この定理から, 次の系が従い, (1) がそれに含まれる。

系 1.  $|c_k| \geq 1$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) ならば,

$$(3) \quad \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^N c_k \exp(in_k x) \right| dx \geq A \log N.$$

Konjagin の結果もこの系 1 を与えるが, (2) は得られていない。

$n_k = k$  という特別な場合に (2) は Hardy-Littlewood

によって得られ、後の  $H^p$  クラスの理論の出発点となったものである。その意味でも(1)と(2)の評価は最良であるが、 $J_N$  の下からの評価は有界数列  $\{c_n\}_1^\infty$  の場合に、 $c_n$  を含む形で初めて与えたのは Olevskii (cf. [10]) であった。彼の得た不等式は次の形をとる。

[定理 2]  $|c_k| \leq B$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) ならば、

$$(4) \quad \max_{1 \leq k \leq N} J_k \geq A \frac{\log N}{N} \sum_{k=1}^N |c_k|^2$$

Olevskii は実際は  $L^2$  での正規直交系に関する不等式として(4)のタイプを得ているのであるが、その後それは更に改良されて、Bočkarov [1] は本質的に(4)の左辺は「平均」

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N J_k$$

で置き換えることを示している。

Olevskii, Bočkarov, McGehee-Pigno-Smith の方法は互に異なるが、例えば(4)の応用については [10] が詳しい。

Littlewood 予想に関連したものとして、Ankeny と Chowla による問題がある (cf. [2])。それは Riemann のゼータ函数に関する問題から考えられたもので、

$$C_N(x) = \sum_{k=1}^N \cos(n_k x),$$

$$L_N = \inf_{0 \leq x \leq 2\pi} C_N(x),$$

とするとき,  $|L_N|$  を下から評価するような, 無限大に発散する函数  $f(N)$  を与えることができるか, というものである。  $|L_N| + C_N(x) \geq 0$  であるから,

$$\begin{aligned} 2\pi |L_N| &= \int_0^{2\pi} (|L_N| + C_N(x)) dx = \int_0^{2\pi} |L_N| dx + \int_0^{2\pi} C_N(x) dx \\ &\geq \int_0^{2\pi} |C_N(x)| dx - 2\pi |L_N|. \end{aligned}$$

従って

$$(5) \quad |L_N| \geq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |C_N(x)| dx$$

となるが, 一方

$$\begin{aligned} C_N(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^N \exp(in_k x) + \sum_{k=1}^N \exp(-in_k x) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N} \exp(im_k x), \end{aligned}$$

$$\{m_1, \dots, m_{2N}\} = \{-n_N, \dots, -n_1, n_1, \dots, n_N\}$$

と表わされるので, もし  $I_N \geq A f(N)$  ならば, (5)より

$$|L_N| \geq A f(2N)$$

を得ることになる。例えば定理 1 から,

$$(6) \quad |L_N| \geq A \log N$$

が出て来る。あるいは, 系 1 から,

系 2.  $|c_k| \geq 1$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) ならば,

$$\left| \inf_{0 \leq x \leq 2\pi} \sum_{k=1}^N c_k \cos(n_k x) \right| \geq A \log N$$

も従う。

このように,  $|L_N|$  の下からの評価 (これを「cosine 問題」とよぶこともある) は Littlewood 予想から出て来るが, 実は (6) の評価は最良のものとは程遠いと思われる。現状では (6) より良い評価は得られていないが, 予想の 1 つは

$$(7) \quad |L_N| \geq A \sqrt{N}$$

である。この否定, すなわち

$$|L_N| = o(\sqrt{N}), \quad (N \rightarrow \infty)$$

であるような例は知られていないのであるが,  $\{n_k\}$  の部分列をとると, それに対応する cosine 和については (7) が成り

立つことが知られている (cf. [13], [11]).

## 文 献

- [1] S.V. Bočkarov : Dokl. Akad. Nauk SSSR, 223 (1975)  
= Soviet Math. Dokl., 16 (1975), 799 - 802.
- [2] S. Chowla : Bull. A.M.S., 58 (1952) 287 - 305.
- [3] P. J. Cohen : Amer. J. Math., 82 (1960) 191 - 212.
- [4] J. F. Fournier : Arkiv för Math., 17 (1979) no. 2 199 - 216.
- [5] Hardy & Littlewood : J. London Math. Soc. 3 (1928)  
105 - 110
- [6] ————— : Ibid 23 (1948) 163 - 168.
- [7] Hardy, Littlewood & Pólya ; Inequalities,  
Cambridge Univ. Press 1934.
- [8] S.V. Konjagin : Izv. Akad. Nauk SSSR 26 (1981)  
243 - 265.
- [9] McGehee, Pigno & Smith : Annals. of Math.,  
113 (1981) 613 - 618.
- [10] A.M. Olevskii : Fourier series with respect  
to general orthogonal systems, Springer 1975.

- [11] S. K. Pichorides : Norms of exponential sums,  
Publications Mathématiques D'Orsay , N° 77-73 (1977).
- [12] ————— : Annales de l'institut Fourier,  
30 (1980) no. 2 79 - 89.
- [13] S. Uchiyama : Proc. A. M. S. 16 (1965) 1185-1190.