数理解析研究所講究録
第 456 巻 1982 年 123-131

APÈRY数の合同性質

神戸大 理　　味村 良雄

Apèryは，$\zeta(3)=\sum n^{-3}$ の無理数性の証明 [1] のときに，次の漸化式で与えられる数列を扱っている。

$$n^3 a_n - (34n^3-51n^2+27n-5)a_{n-1} + (n-1)^3 a_{n-2} \quad (n \geqq 2) \tag{1}$$

彼は，初期条件 $A_0=1$, $A_1=5$ をもつ (1) の解 A_n $(n\geqq 0)$ が次で与えられることを示した。

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \tag{2}$$

S.Chowla-J.Cowles-M.Cowles [2] は，この A_n について

$$A_n \equiv 1 \bmod 2 \quad \text{for all} \quad n \geqq 0,$$

$$A_p \equiv 5 \bmod p^2 \quad \text{for all primes} \quad p$$

を証明し，次を予想した

$$A_n \equiv 1+4n \bmod 8 \quad \text{for all} \quad n \geqq 0,$$

$$A_n \equiv (-1)^n \bmod 3 \quad \text{for all} \quad n \geqq 0,$$

$$A_p \equiv 5 \bmod p^3 \quad \text{for all primes} \quad p > 3,$$

$$A_p \equiv 0 \bmod 5 \quad \text{for all primes} \quad p > 2.$$

さらに，次の問題を提出した。

(1) の解 $a_n(n \quad 0)$ の各項 a_n が整数となるための初期条件は何か？

以下では，これに対する解答と，上の予想された合同式をすべて含む若干の合同式を証明する。

<u>定理1</u>　a_0, a_1 は整数とする。このとき，(1) をみたす数列 $a_n(n \quad 0)$ の各項 a_n が整数である必要十分条件は，$a_1 = 5a_0$ となることである。

(証明) $f(x) = 5-27x+51x^2-34x^3$ とおく。$1 \leqq i \leqq j$ に対して

$$\mathcal{D}(i,j) = \begin{pmatrix} f(i) & i^3 & & & & \\ i^3 & f(i+1) & (i+1)^3 & & 0 & \\ & (i+1)^3 & f(i+2) & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & f(j-1) & (j-1)^3 \\ & 0 & & & (j-1)^3 & f(j) \end{pmatrix}$$

とおく。

p を奇素数として，$p^*=p \ (p>3)$，$p^*=9 \ (p=3)$ とする。明らかに

$$f(i) + f(j) \equiv 0 \bmod p^* \quad \text{if} \quad i+j = p+1. \tag{3}$$

行列 $\mathcal{W}$ を考える：

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 0 & \cdot & \\ & \cdot & 0 \\ \cdot & & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

(3) から，$\mathcal{W}\mathcal{D}(i,j)\mathcal{W} \equiv -\mathcal{D}(i,j) \bmod p^* \quad \text{if} \quad i+j = p+1.$

$D(i,j) = \det \mathfrak{D}(i,j)$ とおくと，次がえられる：

$$D(i,j) \equiv 0 \bmod p^* \quad \text{if} \quad i+j = p+1. \tag{4}$$

$\mathfrak{D}(i,j)$ の定義と(4)から

$$\begin{aligned} D(2,p) &= f(p)D(2,p-1) - (p-1)^6 D(2,p-2) \\ &\equiv 1^3\cdot(p-1)^3\cdot D(2,p-2) \bmod p^* \\ &= 1^3\cdot(p-1)^3\cdot\{f(2)D(3,p-2)-2\ D(4,p-2)\} \\ &\equiv 1^3\cdot(p-1)^3\cdot 2^3\cdot(p-2)^3\cdot D(4,p-2) \bmod p^* \\ &\equiv \cdots \equiv \{(p-1)!\}^3 \bmod p^* \end{aligned}$$

従って，　$D(2,p) \equiv -1 \bmod p^*.$　(5)

(1)を満たす数列 a_n を考える。　$t \geqq 0$ として，ベクトル

$$\mathfrak{A}_t = (a_{pt+1},\ a_{pt+2},\ldots,a_{pt+p-1})$$

$$\mathfrak{B}_t = (-(pt+1)^3\ a_{pt},\ 0,\ldots,0,\ -(pt+p)^3\ a_{pt+p})$$

を考える。　(1) より

$$\mathfrak{A}_t \mathfrak{D}(pt+2,pt+p) = \mathfrak{B}_t. \tag{6}$$

各 a_n は整数であるとする。 $\mathfrak{D}(pt+2,pt+p) \equiv \mathfrak{D}(2,p) \bmod p^*$

だから，　$\mathfrak{A}_t \mathfrak{D}(2,p) \equiv \mathfrak{B}_t \bmod p^*.$

(5)から，$\mathfrak{D}(2,p) \bmod p^*$ の逆行列 $\mathfrak{D}_p^*$ が存在する。従って

$$\mathfrak{A}_t \equiv \mathfrak{B}_t \mathfrak{D}_p^* \bmod p^*.$$

$\mathfrak{D}_p^*$ の第一行を $(-d_p(1),\ldots,\ -d_p(p-1))$ とすると，

$$a_{pt+j} \equiv d_p(j)a_{pt} \bmod p^* \tag{7}$$

が $j=0,1,\ldots,p-1$ に対して成立する。(但し，$d_p(0)=1$ とする)

(4) から,　　$0 \equiv D(1,p) = f(1)D(2,p) - 1^6 D(3,p) \mod p^*$.

故に,　　$D(3,p) \equiv 5 \mod p^*$.

従って,　　$-d_p(1) \equiv D(3,p)D(2,p)^{-1} \equiv -5 \mod p^*$.

(7) から,　　$a_1 \equiv d_p(1)a_0 \equiv 5a_0 \mod p^*$ となる。$|a_1-5a_0|$ より大きい素数 p を初めにとっておけば，これは $a_1=5a_0$ を示す。逆は Apery の結果を用いればよい。

注意 (Zagier) Let B_n be the solution of (1) with $B_0=0, B_1=1$. The main ingredients in Apery's proof of the irrationality of $\zeta(3)$ were the assertions

$$12N_n^3 B_n \in \mathbb{Z} \quad (N_n=\text{l.c.m.}\{1,2,..,n\}) \tag{8}$$

and

$$B_n/A_n = \zeta(3)/6 + O((1+\sqrt{2})^{-8n}). \tag{9}$$

In fact the 12 can be omitted in (8) (though this is not quite trivial), but apart from that our argument shows that (8) is essentially best possible. Indeed, taking $a_n=B_n$ and $t=0$ in (6) and observing that $B_1,..,B_{p-1}$ are p-integral and $B_0=0$, we deduce from (6) and (5) the statement

$$p^3 B_p \in \mathbb{Z}_p \quad \text{and} \quad p^2 B_p \notin \mathbb{Z}_p.$$

$\mathbb{Z}_p$ denotes the ring of p-integers. Note that this statement actually implies Theorem 1, since any solution of (1) is a linear combination of $\{A_n\}$ and $\{B_n\}$.

以下, A_n の合同式について考える。

PROP.1.　　$A_n \equiv 1+4n \mod 8$ for all $n \geq 0$.

（証明）[ ] は Gauss 記号とする。k は正整数とし，e は，$2^e \mid \binom{2k}{k}$，$2^{e+1} \nmid \binom{2k}{k}$ で定まる整数とする。

$$e = \sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{2k}{2^r}\right] - 2\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{k}{2^r}\right] = k - \sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{k}{2^r}\right] > k - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{k}{2^r} = 0.$$

従がって，$\binom{2k}{k}$ は偶数であり，$\binom{n+k}{k}\binom{n}{k} = \binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}$ は偶数。

ゆえに，$\binom{n+k}{k}\binom{n}{k} \equiv (-1)^k\binom{n+k}{k}\binom{n}{k} \mod 4$.

ゆえに，
$$A_n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+k}{k}^2\binom{n}{k}^2 \equiv 1 + \left\{\sum_{k=1}^{n}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\right\}^2 \mod 8$$
$$\equiv 1 + \left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\right\}^2 \mod 8.$$

[2] の Lemma より，$T(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+k}{k}\binom{n}{k} = (-1)^n$ だから

$$A_n \equiv 1 + ((-1)^n - 1)^2 \equiv 1 + 4n \mod 8$$

LEMMA. $\binom{pm}{pk} \equiv \binom{m}{k} \mod p^3$ for all primes $p \geqq 5$,

$\binom{pm}{pk} \equiv \binom{m}{k} \mod p^2$ for all primes p.

（証明）p を 3 より大きい素数とする。

$$\binom{pm}{pk} = \prod_{i=1}^{pk}\frac{p(m-k)+i}{i} = \binom{m}{k}\prod_{h=0}^{k-1}U_h,\quad U_h = \prod_{j=1}^{p-1}\frac{p(m-k+h)+j}{ph+j}.$$

$$\prod_{j=1}^{p-1}(pt+j) = \left(\prod_{j=1}^{p-1}j\right)\left(\prod_{j=1}^{p-1}\left(1+\frac{pt}{j}\right)\right)$$
$$\equiv (p-1)!\left(1 + pt\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{j} + p^2t^2\sum_{0<i<j<p}\frac{1}{ij}\right) \mod p^3.$$

$\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{j} \equiv 0 \mod p^2$，また $\sum_{0<i<j<p}\frac{1}{ij} \equiv 0 \mod p$ だから，$\prod_{j=1}^{p-1}(pt+j) \equiv (p-1)! \mod p^3$.　　$U_h \equiv 1 \mod p^3$，則ち，$\binom{pm}{pk} \equiv \binom{m}{k} \mod p^3$.

p=2,3 は，直接に確かめられる。

PROP.2. $A_{pm} \equiv A_m \mod p^3$ for all primes $p \geqq 5$,

$A_{pm} \equiv A_m \mod p^2$ for all primes p.

(証明) $m=0$ のときは明らか。$m>0$ とする。$p=3$ 或は $p>3$ に応じて，$e=2$ 或は $e=3$ とする．Lemma より

$$A_{pm} = \sum_{i=0}^{m} \binom{pm}{pi}^2 \binom{p(m+i)}{pi}^2 + \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{p-1} \binom{pm}{pt+i}^2 \binom{pm+pt+i}{pt+i}^2$$

$$\equiv A_m + \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{p-1} \binom{pm}{pt+i}^2 \binom{pm+pt+i}{pt+i}^2 \mod p^e$$

一方，$\binom{pm+pt+i}{pt+i} = \prod_{j=1}^{pt+i} \frac{pm+j}{j} \equiv \prod_{i=1}^{t} \frac{m+i}{i} = \binom{m+t}{t} \mod p.$

また $(p(m-t)-i)\binom{pm}{pt+i} = pm \prod_{s=1}^{pt+i} \frac{pm-s}{s}$

$$= pm \prod_{h=0}^{t-1} \left(\prod_{j=1}^{p-1} \frac{p(m-h)-j}{ph+j} \right) \cdot \prod_{h=1}^{t} \frac{p(m-h)}{ph} \prod_{j=1}^{i} \frac{p(m-t)-j}{pt+j}$$

$$\equiv pm(-1)^{(p-1)t+i} \binom{m-1}{t} \mod p^2.$$

ゆえに，$\binom{pm}{pt+i}^2 \equiv p^2 m^2 \binom{m-1}{t}^2 \frac{1}{i^2} \mod p^3$，$\binom{pm}{pt+i}^2 \equiv 0 \mod p^2.$

結局，$\sum_{i=1}^{p-1} \binom{pm}{pt+i}^2 \binom{pm+pt+i}{pt+i}^2 \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \binom{pm}{pt+i}^2 \binom{m+t}{t}^2 \mod p^3$

$$\equiv p^2 m^2 \binom{m-1}{t}^2 \binom{m+t}{t}^2 \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} \mod p^3 \equiv 0 \mod p^e.$$

系.1. $A_p \equiv 5 \mod p^3$ for all primes $p \geqslant 5$,

$A_p \equiv 5 \mod p^2$ for all primes p.

(証明) Prop. 2. で $m=1$ として得られる。

定理 2.　p は奇素数で，$n = \sum_{j=o}^{\infty} e_j p^j$ $(0 \leqq e_j \leqq p-1)$ とする。このとき

$$A_n \equiv \prod_{j=o}^{\infty} d_p(e_j) \bmod p^*.$$

(証明) Prop.2 と(7) から出る。

系 1.　$A_n \equiv (-1)^n \bmod 3$ for all $n \geqq 0$.

(証明) $n = \sum_{j=o}^{\infty} e_j 3^j$ $(e_j = 1, 2, 3)$ と書く。$n \equiv \sum_{j=o}^{\infty} ej \bmod 2$ である。一方，$d_3(0) = d_3(2) = 1$，$d_3(1) = 5$ だから，定理2 によって

$$A_n \equiv \prod_{j=o}^{\infty} d_3(e_j) \equiv \prod_{j=o}^{\infty} (-1)^{e_j} = (-1)^{\Sigma e_j} \equiv (-1)^n \bmod 3.$$

系 2.　$A_n \equiv 0 \bmod 5$ for all odd n.

(証明) $d_5(0) = d_5(4) = 1$，$d_5(1) = d_5(3) = 0$，$d_5(2) = 3$ に注意する。$n = \sum_{j=o}^{\infty} e_j 5^j$ $(0 \leqslant j \leqslant 4)$ と書く。n は奇数だから，$e_j \equiv 1 \bmod 2$ となる j が少なくとも一つあり，この j に対しては，$d_5(e_j) = 0$ だから，$A_n \equiv \prod_{j=o}^{\infty} d_5(e_j) \equiv 0 \bmod 5$.

注意．定理2 によって，$d_p(j)$ $(0 \leqq j \leqq p-1)$ が計算されているなら，n に対する $A_n \bmod p$ が計算できる。10000 = "41104" (7 進法で表示) だから，付録の表より，$A_{10000} \equiv 3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \equiv 1 \bmod 7$

となる。同様にして, $A_{5t+1} \equiv A_{5t+3} \equiv 0 \bmod 5$ $A_{11t+5} \equiv 0 \bmod 11$, $A_{17t+3} \equiv A_{17t+13} \equiv 0 \bmod 17$ 等がえられる。

Prop.3. $A_{p-1} \equiv 1 \bmod p^3$ for all primes $p \geqq 5$,

$A_{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$ for all primes p.

(証明) $p=2,3$ のときは容易に分る。 $p>3$ とし, $0<k<p$ に対し,

$$\binom{p-1+k}{k} = \frac{p}{k}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{p+i}{i} \equiv \frac{p}{k} \bmod p^2$$

だから,

$$\binom{p-1+k}{k}^2 \equiv \left(\frac{p}{k}\right)^2 \bmod p^3,\quad \binom{p-1+k}{k}^2 \equiv 0 \bmod p^2.$$

また,

$$\binom{p-1}{k} = \prod_{i=1}^{k}\frac{p-i}{i} \equiv (-1)^k \bmod p,\quad \binom{p-1}{k}^2 \equiv 1 \bmod p.$$

故に,

$$A_{p-1} = 1+\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p-1}{k}^2\binom{p-1+k}{k}^2 \equiv 1+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{p^2}{k^2}$$
$$\equiv 1+p^2\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k^2} \equiv 1 \bmod p^3.$$

Prop.2, Prop.3 及び (2) から, 次のような合同式が得られる。

$A_{p+1} \equiv 25+60p \bmod p$ for all primes $p \geqq 5$,

$A_{p+2} \equiv 365+1050p+360p \bmod p$ for all primes $p \geqq 5$,

$A_{p-2} \equiv 5-12p \bmod p$ for all primes $p \geqq 5$, etc.

Prop.4. $i \geqq 0,\ j \geqq 0,\ t \geqq 0,\ i+j=p-1$ とすると,

$d_p(i) \equiv d_p(j) \bmod p^*$, $A_{pt+i} \equiv A_{pt+j} \bmod p^*$.

(証明) i に関する帰納法によって, $A_i \equiv A_{p-i-1} \bmod p^*$ を示そう。すでに, $A_0 \equiv A_{p-1} \bmod p^*$ と $A_1 \equiv A_{p-2}$ 5 mod p* は示してある。 $0<i<p-1$ として, (1),(3) 及び帰納法の仮定により,

$$\begin{aligned}(i+1)^3 A_{i+1} &\equiv -f(i+1)A_i - i^3 A_{i-1} \\ &\equiv f(p-i)A_i + (p-i)^3 A_{i-1} \\ &\equiv f(p-i)A_{p-i-1} + (p-i)^3 A_{p-i} \\ &\equiv -(p-i-1)^3 A_{p-i-2} \equiv (i+1)^3 A_{p-i-2} \bmod p^*.\end{aligned}$$

従って, $A_{i+1} \equiv A_{p-i-2} \bmod p^*$. (7)より, $d_p(i) \equiv d_p(j) \bmod p^*$ (但し, $i+j=p+1$), 再び (7) より, $A_{pt+i} \equiv A_{pt+j} \bmod p^*$ となる.

付録: $\underline{d_p(j) \bmod p^*}$

$d_3(0)=1, d_3(1)=5$; $d_5(0)=1, d_5(1)=0, d_5(2)=3$; $d_7(0)=1, d_7(1)=5$, $d_7(2)=d_7(3)=3$; $d_{11}(0)=1, d_{11}(1)=5, d_{11}(2)=7, d_{11}(3)=4, d_{11}(4)=1$, $d_{11}(5)=0$; $d_{13}(0)=1, d_{13}(1)=5, d_{13}(2)=8, d_{13}(3)=2, d_{13}(4)=7$, $d_{13}(5)=5, d_{13}(6)=9$; $d_{17}(0)=1, d_{17}(1)=5, d_{17}(2)=5, d_{17}(3)=0$, $d_{17}(4)=4, d_{17}(5)=13, d_{17}(6)=8, d_{17}(7)=8, d_{17}(8)=16$;...

参考文献:

[1] A.van der Poorten, A Proof That Euler Missed..., Math. Intell.1 (1979), 195-203.

[2] S.Chowla-J.Cowles-M.Cowles, Congruence Properties of Apery Numbers, J.Number Theory 12 (1980), 188-190.

[3] Y. Mimura, --- to appear in J.Number Theory.