

問 題

$$[1] \quad \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^N \cos(n_k x) \right| dx \asymp \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^N \sin(n_k x) \right| dx ?$$

ここに, $\{n_k\}_{k=1}^{k=N}$ は異なる整数列で, $A \asymp B$ は

$$C_1 B \leq A \leq C_2 B$$

となる絶対定数 C_1, C_2 が存在することを意味する記号.

(S. K. Pichorides)

[2] $\{n_k\}$ は上と同じとすると, 三角多項式

$$\sum_{k=1}^N \cos(n_k x)$$

の (実の) 零点の個数の下限は $N-1$ か?

(J. E. Littlewood)

[3] 実函数

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

は Bohr の意味で "概周期的" か?

(Y. Meyer)

[4] $\frac{x}{\pi}$ が実無理数のとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tan x \tan 2x \cdots \tan nx) = ?$$

[5] $0 < \alpha \leq 1$, $\beta > 1$ のとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \exp(in^{\beta}x) \quad (x \text{ real})$$

が収束するため必要十分条件 (α, β, x に関する) は?

[6] $\{n_k\}$ は再び [1] と同じとすると,

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^N \cos(n_k x) \right| dx \asymp \sqrt{N}$$

となるような $\{n_k\}$ の具体例は?

(J. E. Littlewood, P. Erdős)

(以上 鹿野 健)