数理解析研究所講究録
第458巻 1982年 30-39

付随式を用いる1階述語論理の証明図作成方法

名工大 工　大芝 猛
永田周郎
舟橋 栄

本稿では与えられた論理式Aに対し，冠頭標準形変形を経由せずに妥当性検証を行い(手続きCHK)，その検証が肯定的に終了したときに得られる情報をguideとして，論理式AのLK証明図を下から上方へ決定論的に手もどりなく書き上げる(アルゴリズムPAL)方法を述べる.

(0) そのために先ず，任意のLK論理式A(冠頭でなくてよい)に対し，Aのquantifierに以下のようにguide index form (X_i), $[f_j(X_{i_1},\cdots,X_{i_k})]$ を付してうる<u>Aの付随式 $\tilde{A}\langle X_1,\cdots,X_n\rangle$ (adjoint formula)</u>を用意する。

① Aのnegative∀とpositive∃全体が左から $\mathcal{Q}_1x_1,\cdots,\mathcal{Q}_nx_n$ であるとき，これらに (X_i) を付し $\mathcal{Q}_1\underset{(X_1)}{x_1},\cdots,\mathcal{Q}_n\underset{(X_n)}{x_n}$ とする.(但し X_i は証明図作成時にtermを代入すべき表示変数である.) また更にAのpositive∀とnegative∃全体が左から $R_1y_1,\cdots R_ly_l$

であるとき，$[f_j(\ )]$を付し $\underset{[f_1(\ )]}{\mathcal{R}_1 y_1}, \cdots, \underset{[f_\ell(\ )]}{\mathcal{R}_\ell y_\ell}$ としてうる図式をA'とする．(f_jはAにない関数記号(スコーレム関数))．

② A'内の各$\underset{[f_j(\ )]}{\mathcal{R}_j y_j}$に対し「$\underset{[f_j(\ )]}{\mathcal{R}_j y_j}$をscopeに含むような$\underset{(X_i)}{\mathcal{Q}_i x_i}$の全体が $A' = \cdots \underset{(X_{i_1})}{\mathcal{Q}_{i_1} x_{i_1}}(\cdots \underset{(X_{i_k})}{\mathcal{Q}_{i_k} x_{i_k}}(\cdots \underset{[f_j(\ )]}{\mathcal{R}_j y_j}(\cdots)\cdots)\cdots)\cdots$ と indicateされるならば 表示変数の列$X_{i_1},\cdots,X_{i_k}$をf_jの argumentに埋めて $\underset{[f_j(X_{i_1},\cdots,X_{i_k})]}{\mathcal{R}_j y_j}$ とする」，これをすべての $j=1,\cdots,\ell$ について行って得られる図式を $\underline{\widetilde{A}\langle X_1,\cdots,X_n\rangle}$ と書き，Aの付随式という．

$\mathcal{Q}_1 x_1$ (negative $\forall$)　　$\mathcal{Q}_2 x_2$(positive $\exists$)

<u>EXAMPLE</u>：$A = \forall y_1(\neg \forall x_1((\exists y_2\, p(x_1,y_2)) \vee p(x_1,y_1)) \vee \exists x_2\, p(y_1,x_2))$

について，　$\mathcal{R}_1 y_1$(positive $\forall$)　　$\mathcal{R}_2 y_2$ (negative $\exists$)

$$A' = \underset{[f_1(\ )]}{\forall y_1}(\neg \underset{(X_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(\ )]}{\exists y_2}\, p(x_1,y_2)) \vee p(x_1,y_1)) \vee \underset{(X_2)}{\exists x_2}\, p(y_1,x_2))$$

従って $\widetilde{A}\langle X_1, X_2\rangle = \underset{[f_1]}{\forall y_1}(\neg \underset{(X_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(X_1)]}{\exists y_2}\, p(x_1,y_2)) \vee p(x_1,y_1)) \vee \underset{(X_2)}{\exists x_2}\, p(y_1,x_2))$

以下論理式Aを任意に1つ固定し関連する定義を述べる．

1° (def.) <u>A-formula</u> (論理式Aの証明図作成の途上現われる pseudo-formula)　$H(\widetilde{A})$を$\widetilde{A}\langle X_1,\cdots,X_n\rangle$の関数記号と定数記号(なければ1つ追加)から得られるtermの全体とする．

(0) $\tau_i \in H(\widetilde{A})$ のとき $\widetilde{A}\langle \tau_1,\cdots,\tau_n\rangle$ はA-formula (1) $B*C$がA-formulaのとき，BとCもA-formula (但し*は$\vee, \wedge, \supset$,を表わす)．(2) $\neg B$がA-formulaのとき，BもA-formula．(3) $\underset{(\tau)}{\mathcal{Q}x} B(x)$がA-formulaのとき$B(\tau)$もA-formula．(4) $\underset{[F]}{\mathcal{R}y} C(y)$がA-formulaのとき，$C(F)$もA-formula．

2° (def) sb-operation: B が $\widetilde{A}\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ または A-formula のとき, $sb(B) \overset{def.}{=}$ B内の $\left\{\begin{array}{l} \underset{(\tau_i)}{\alpha_i x_i}(\cdots x_i \cdots) \text{ を代入 } (\cdots x_i \cdots)\binom{x_i}{\tau_i} \\ \underset{[F_j]}{\mathcal{E}_j y_j}(\cdots y_j \cdots) \text{ を代入 } (\cdots y_j \cdots)\binom{y_j}{F_j} \end{array}\right\}$

とみなしてうる quantifire free の論理式.

(EXAMPLE: $sb(\neg \underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2}\, p(f_1, y_2)) = \neg p(f_1, f_2(f_1))$, 前例で, $sb(\widetilde{A}\langle x_1, x_2\rangle) = \neg(p(x_1, f_2(x_1)) \vee p(x_1, f_1)) \vee p(f_1, x_2)$)

3° (def) cl-operation: $cl(B)$ = B内の $\underset{(\tau_i)}{\alpha_i x_i}$ を $\alpha_i x_i$ に, $\underset{[F_j]}{\mathcal{E}_j y_j}$ を $\mathcal{E}_j y_j$ に戻してうる LK-formula.

(EXAMPLE: 前例につき $cl(\widetilde{A}\langle x_1, x_2\rangle) = A$, $cl(\neg \underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2}\, p(f_1, y_2)) = \neg \exists y_2\, p(f_1, y_2)$, また $cl(\widetilde{A}\langle f_1, f_2(f_1)\rangle) = A$.)

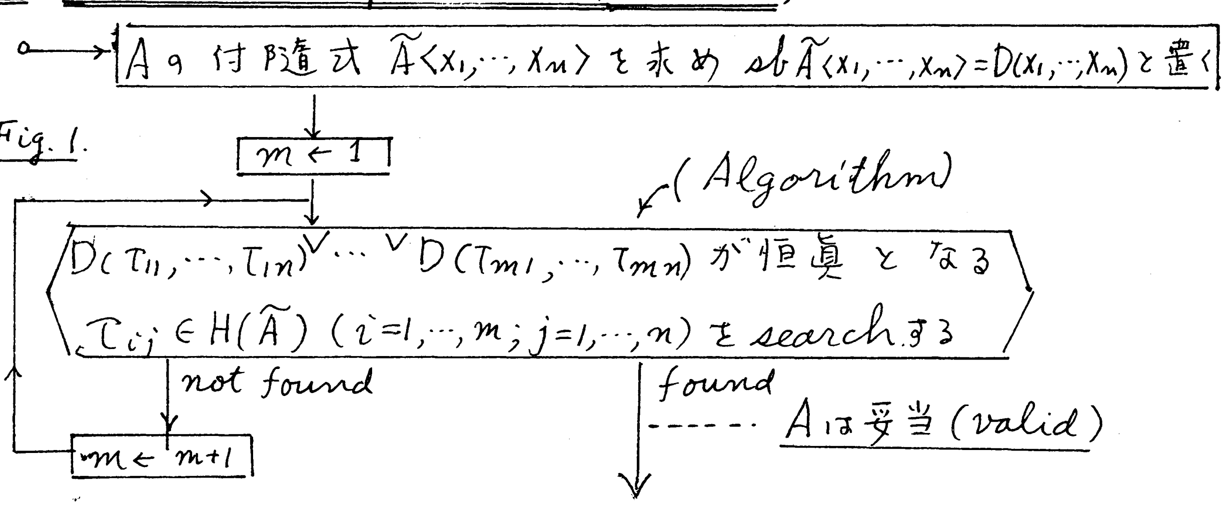
Herbrand の定理 は次の形で表現される:

$$\vdash_{LK} A \rightleftarrows \exists_{m \geq 1}\ \exists\, \tau_{ij} \in H(\widetilde{A}):$$

$$sb\widetilde{A}\langle \tau_{11}, \cdots, \tau_{1n}\rangle \vee \cdots \vee sb\widetilde{A}\langle \tau_{m1}, \cdots, \tau_{mn}\rangle \text{ が恒真}$$

(I) 妥当性検証step (CHK procedure) (P. 9. 例参照)

Fig. 1.



得られた情報 $\tau_{11},\cdots,\tau_{ij},\cdots,\tau_{mn}$ をもって証明作成 step へ

(II) LK-proof 作成 step (アルゴリズム PAL)

《phase 1》 pseudo-proof の作成: 前 step の肯定時に得られる τ_{ij} から, end sequent $\mathfrak{S}_0 = \rightarrow \widetilde{A}\langle T_{11}, \cdots, T_{1n}\rangle, \cdots, \widetilde{A}\langle T_{m1}, \cdots, T_{mn}\rangle$ をつくり, これに US-operation (上式決定操作) を逐次ほどこしてうる sequent を上方へ積み上げ tree 型の pseuo-proof $\mathcal{P}_1 = \mathbb{U}\mathfrak{S}[\rightarrow \widetilde{A}\langle T_{11}, \cdots, T_{1n}\rangle, \cdots; \widetilde{A}\langle T_{m1}, \cdots, T_{mn}\rangle]$ を作る. US-operation は下式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ に対し 2つ以下の上式

$$US(\Gamma \rightarrow \Delta) = \left\{\begin{array}{l} \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1 \\ \text{or} \\ \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1 ; \Gamma_2 \rightarrow \Delta_2 \\ \text{or} \\ \text{undefined} \end{array}\right\}$$

を決定する操作で, 詳細は P. 6 ～に記載されるが, 各段階で下式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ 内の guide-index (τ)'s, $[F]$'s を調べることにより, どの formula をどのように分解し上式を作るかが一意に決定される.

《phase 2》 Index clear step: phase 1 で求めた pseudo-proof $\mathcal{P}_1$ 内の不要となった guide-index を $\mathcal{cl}$-operation で消去すれば, $\rightarrow \underbrace{A, \cdots, A}_{m}$ に到る LK^*-proof: $\mathcal{P}_2 = \mathcal{cl}(\mathcal{P}_1) = \mathcal{cl}(\mathbb{U}\mathfrak{S}[\rightarrow \widetilde{A}\langle T_{11}, \cdots, T_{1n}\rangle, \cdots; \widetilde{A}\langle T_{m1}, \cdots, T_{mn}\rangle]$ をうる. 但し LK^* では LK の $\forall$right, $\exists$left における eigen-variable の代りに Skolem term $f_j(T_1, \cdots, T_k)$ が用いられている点が LK と異なる.

《phase 3》 eigen variable adjustment (α-operation)

phase 2 で得た $\rightarrow \underbrace{A, \cdots, A}_{m}$ に到る LK^*-proof $\mathcal{P}_2$ 内の各 formula 内の maximal Skolem term $f_j(T_1, \cdots, T_k)$ を自由変数 $\alpha_{f_j(T_1, \cdots, T_k)}$ でおきかえる操作により, $\rightarrow \underbrace{A, \cdots, A}_{m}$ に到る LK-proof $\mathcal{P}=\alpha(\mathcal{P}_2)=\alpha(d(\mathbb{U}\mathbb{S}[\to\tilde{A}\langle T_{11},\cdots,T_{1n}\rangle,\cdots,\tilde{A}\langle T_{m1},\cdots,T_{mn}\rangle]$ を得る。従って contruction により $\to A$ に到る(cut-free な) LK-proof をうる。(但し、ある formula B 内の Skolem term $f_j(\tau_1,\cdots,\tau_k)$ は $f_j(\tau_1,\cdots,\tau_k)$ を真に含む他の $f_d(\sigma_1,\cdots,\sigma_p)$ term が B 内にないとき、B で maximal であるという。)

上記証明図作成手続の妥当性は次の定理の形で述べられる。

【Theorem】 仮定 "$sb\,\tilde{A}\langle T_{11},\cdots,T_{1n}\rangle \vee\cdots\vee sb\,\tilde{A}\langle T_{m1},\cdots,T_{mn}\rangle$ が恒真" の下で、$\mathcal{P}=\alpha(d(\mathbb{U}\mathbb{S}[\to\tilde{A}\langle T_{11},\cdots,T_{1n}\rangle,\cdots,\tilde{A}\langle T_{m1},\cdots,T_{mn}\rangle]))$ は $\to \underbrace{A,\cdots,A}_{m}$ に到る LK-proof である。

(証明)の概要: $\mathfrak{S}_0=\to\tilde{A}\langle T_{11},\cdots,T_{1n}\rangle,\cdots,\tilde{A}\langle T_{m1},\cdots,T_{mn}\rangle$ に対し US-operation を逐次適用して pseudo-proof $\mathcal{P}_1$ を作るとき各段階で得られる sequent $\Gamma\to\Delta$ につき、$\Gamma\to\Delta$ に論理記号が残っているかぎり必らず上式 $US(\Gamma\to\Delta)$ が定義され、

① 各上式 $\Gamma_1\to\Delta_1$ (or $\Gamma_2\to\Delta_2$) の記号は下式 $\Gamma\to\Delta$ より減少

② $\dfrac{\alpha\, d(US(\Gamma\to\Delta))}{\alpha\, d\,(\Gamma\to\Delta)}$ は LK-deduction となる。

③ $\dfrac{sb(US(\Gamma\to\Delta))}{sb\,(\Gamma\to\Delta)}$ は quantifier-free な LK deduction で下式から上式へ向って恒真性が保存される。(但し、sequent $B_1,\cdots,B_m\to C_1,\cdots,C_n$ が恒真であるとは $\neg B_1\vee\cdots\vee\neg B_m\vee C_1\vee\cdots\vee C_n$ が恒真であることとする。)。しからば ①より、$\mathcal{P}_1=\mathbb{U}\mathbb{S}[\mathfrak{S}_0]$ の最上部の sequent は原始論理式の列 $P_1,\cdots,P_p\to Q_1,\cdots,Q_q$ なる形であり、しかも仮定と

Ⓑより, $P_i = Q_j$ (for some i,j) となる (何故ならば, $sb(\mathcal{P}_1)$ の最下式 $\to sb\tilde{A}\langle\tau_{11},\cdots,\tau_{1n}\rangle,\cdots,sb\tilde{A}\langle\tau_{m1},\cdots,\tau_{mn}\rangle$ は仮定より恒真であり, ③に従えば 最上部の式 $sb(P_1,\cdots,P_p \to Q_1,\cdots,Q_q)$ 即ち $P_1,\cdots,P_p \to Q_1,\cdots,Q_q$ も恒真となる. 即ち $\neg P_1 \vee\cdots\vee \neg P_m \vee Q_1 \vee\cdots\vee Q_n$ が恒真故, 直ちに $P_i = Q_j$ (for some i,j) を導びく. 従って (i) $\alpha(d(\mathcal{P}_1))$ の最上式である所の $\alpha d(P_1,\cdots,P_p \to Q_1,\cdots,Q_q)$ 即ち $P_1,\cdots,P_m \to Q_1,\cdots,Q_n$ は公理 $P_i \to P_i$ $(P_i = Q_j)$ から導びかれ, (ii) $\alpha(d(\mathcal{P}_1))$ の各段階 $\dfrac{\alpha d(US(\Gamma\to\Delta))}{\alpha d(\Gamma\to\Delta)}$ は②より LK-deduction であり, (iii) $\alpha(d(\mathcal{P}_1))$ は最下式 $\to A,\cdots,A$ に到る. 従って $\alpha(d(\mathcal{P}_1))$ は目的の LK-proof を導くことがわかる.

<u>US-operation</u> を定義するに当って <u>term, sequent の degree</u> を定義する: f_j を Skolem 関数 g を A に始めからある関数記号とするとき.

(i) $deg(f_j(\tau_1,\cdots,\tau_k)) = \omega\cdot lg(f_j(\tau_1,\cdots,\tau_k)) + j$,

(ii) $deg(g(\tau_1,\cdots,\tau_k)) = \omega\cdot lg(g(\tau_1,\cdots,\tau_k))$ とする. 但し $lg(h(\tau_1,\cdots,\tau_k)) = lg(\tau_1)+\cdots+lg(\tau_k)+1$, $lg(c)=1$ とする.

また $deg(\Gamma\to\Delta) \begin{cases} = \min\{deg(F) \mid \mathcal{R}_{y[F]} \text{ in } \Gamma\to\Delta\} & ;(\Gamma\to\Delta \text{ が少くとも1つの } \mathcal{R}_{y[F]} \text{ form をもつとき}) \\ = 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

[<u>US-operation の定義</u>]

Case 0. Γ または Δ が同じ formula をもつとき:

0.1. $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma_0, D, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_k \to \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_0, D, \Gamma_1, D, \cdots, D, \Gamma_k \to \Delta$ $(k \geqq 2,\ D \notin \Gamma_i)$

0.2 $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma \to \Delta_0, D, \Delta_1, \cdots, \Delta_l}$.

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_0, D, \Delta_1, D, \cdots D, \Delta_l$ (Γに同じformulaなく, $l \geqq 2,\ D \notin \Delta_i$)

<u>Case 1.</u> <u>Case 0 でなく, Γ, Δ が $B \vee C$, $B \wedge C$, $B \supset C$, $\neg B$ のいずれかをもつとき</u>, その最も左のものをDとする

1.l.1. $\Gamma \ni D = B \vee C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma_1, B, \Gamma_2 \to \Delta\ ;\ \Gamma_1, C, \Gamma_2 \to \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, B \vee C, \Gamma_2 \to \Delta$.

1.l.2. $\Gamma \ni D = B \wedge C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma_1, B, C, \Gamma_2 \to \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, B \wedge C, \Gamma_2 \to \Delta$.

1.l.3. $\Gamma \ni D = B \supset C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma_1, \Gamma_2 \to B, \Delta\ ;\ \Gamma_1, C, \Gamma_2 \to \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, B \supset C, \Gamma_2 \to \Delta$.

1.l.4. $\Gamma \ni D = \neg B$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma_1, \Gamma_2 \to B, \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, \neg B, \Gamma_2 \to \Delta$.

1.r.1 $\Delta \ni D = B \vee C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma \to \Delta_1, B, C, \Delta_2}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, B \vee C, \Delta_2$.

1.r.2. $\Delta \ni D = B \wedge C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma \to \Delta_1, B, \Delta_2\ ;\ \Gamma \to \Delta_1, C, \Delta_2}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, B \wedge C, \Delta_2$.

1.r.3. $\Delta \ni D = B \supset C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{B, \Gamma \to \Delta_1, C, \Delta_2}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, B \supset C, \Delta_2$.

1.r.4. $\Delta \ni D = \neg B$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{B, \Gamma \to \Delta_1, \Delta_2}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, \neg B, \Delta_2$.

Case 2: Case 0, Case 1 でないとき。即ち Γ が同じ formula をもたず Δ も同じ formula をもたず、Γ, Δ が $B \vee C$, $B \wedge C$, $B \supset C$, $\neg B$ なる型の formula をもたないとき.

2.1. $\deg(\Gamma \to \Delta) > 0$:(このとき $\Gamma \to \Delta$ は $\mathcal{R}_{y[F]}$ form をもつ).

2.1.1. $\Gamma \to \Delta$ が $\deg(\tau) < \deg(\Gamma \to \Delta)$ なる $\mathcal{Q}_{\underset{(\tau)}{x}} B(x)$ をもつとき:

D をかゝる $\mathcal{Q}_{x(\tau)} B(x)$ の最も左のものとする.

2.1.1.ℓ. $\Gamma \ni D = \forall_{x(\tau)} B(x)$ ⊛1 のとき: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\Gamma_1, B(\tau), \Gamma_2 \to \Delta,}{}$

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, \forall_{x(\tau)} B(x), \Gamma_2 \to \Delta$.

2.1.1.r. $\Delta \ni D = \exists_{x(\tau)} B(x)$ のとき: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\Gamma \to \Delta_1, B(\tau), \Delta_2,}{}$

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, \exists_{x(\tau)} B(x), \Delta_2$

2.1.2. $\Gamma \to \Delta$ が $\deg(\tau) < \deg(\Gamma \to \Delta)$ なる $\mathcal{Q}_{\underset{(\tau)}{x}} B(x)$ をもたないとき:

このとき, $\deg(\Gamma \to \Delta) = \deg(F)$ なる $\mathcal{R}_{\underset{[F]}{y}}$ form は $\Gamma \to \Delta$ 内のある1つの formula に $\mathcal{R}_{\underset{[F]}{y}} B(y)$ と(冠頭に)現われる. これらのうち最も左のものを $D = \mathcal{R}_{\underset{[F]}{y}} B_1(y)$ とする.

2.1.2.ℓ. $\Gamma \ni D = \exists_{\underset{[F]}{y}} B_1(y)$ のとき: Γ 内の $\exists_{\underset{[F]}{y}} B_i(y)$ を列挙し.

$US(\Gamma \to \Delta) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\Gamma_0, B_1(F), \Gamma_1, B_2(F), \cdots, B_k(F), \Gamma_k \to \Delta,}{}$

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_0, \exists_{\underset{[F]}{y}} B_1(y), \Gamma_1, \exists_{\underset{[F]}{y}} B_2(y), \cdots, \exists_{\underset{[F]}{y}} B_k(y), \Gamma_k \to \Delta$.

(⊛2 このとき $d(B_1(F)) = \cdots = d(B_k(F))$ が示される.)

2.1.2.r. $\Delta \ni D = \forall_{\underset{[F]}{y}} B_1(y)$ のとき: Δ 内の $\forall_{\underset{[F]}{y}} B_i(y)$ を列挙し.

$US(\Gamma \to \Delta) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\Gamma \to \Delta_0, B_1(F), \Delta_1, B_2(F), \cdots, B_k(F), \Delta_k,}{}$

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_0, \forall_{\underset{[F]}{y}} B_1(y), \Delta_1, \forall_{\underset{[F]}{y}} B_2(y), \cdots, \forall_{\underset{[F]}{y}} B_k(y), \Delta_k$.

2.2. $deg(\Gamma \to \Delta)=0$ のとき：($\Gamma \to \Delta$ は $\underset{[F]}{\mathcal{R}y}$ form をもたない.)

2.2.1. $\Gamma \to \Delta$ が $\underset{(\tau)}{\mathcal{Q}x}B(x)$ をもつとき：最も左のものを D とする.

2.2.1.ℓ. $\Gamma \ni D = \underset{(\tau)}{\forall x}B(x)$ のとき： 2.1.1.ℓ と同様に定義する.

2.2.1.r. $\Delta \ni D = \underset{(\tau)}{\exists x}B(x)$ のとき： 2.1.1.r と同様に定義する.

2.1.2. $\Gamma \to \Delta$ が $\underset{(\tau)}{\mathcal{Q}x}B(x)$ form をもたないとき：(このとき $\Gamma \to \Delta$ は原始論理式のみとなる) $US(\Gamma \to \Delta)$ は定義しない.

[註]※1. $\mathfrak{S}_0 = \to \tilde{A}\langle \tau_{11},\cdots,\tau_{1n}\rangle,\cdots,\tilde{A}\langle \tau_{m1},\cdots,\tau_{mn}\rangle$ に US-operation を適用するとき. 2.1.1.ℓ. $\Gamma \ni D = \mathcal{Q}x_{(\tau)}B(x)$ の case で $D = \exists x_{(\tau)}B(x)$ とは決してならない. 2.1.1.r. 2.1.2.ℓ. 2.1.2.r も記述した case のみ起こる.

[註]※2.

$$
\begin{array}{ll}
 & d(US(\Gamma\to\Delta)) = d\Gamma_0,\ dB_1(F),\ d\Gamma_1,\ dB_2(F),\cdots,\ dB_k(F),\ d\Gamma_k \to d\Delta \\
\text{contractions, Exchanges} & \overline{\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}} \\
 & dB_1(F),\ d\Gamma_0,\cdots,\ d\Gamma_k,\to d\Delta \\
 & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \ \exists^{*}\text{left. } (LK^{*}) \\
 & \exists y\, dB_1(y),\ d\Gamma_0,\cdots,\ d\Gamma_k \to d\Delta \\
\text{weakenings, Exchanges} & \overline{\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}} \\
 & d\Gamma_0,\ d\underset{[F]}{\exists y}B_1(y),\ d\Gamma_1,\ d\underset{[F]}{\exists y}B_2(y),\cdots,\ d\underset{[F]}{\exists y}B_k(y),\ d\Gamma_k \to d\Delta \\
 & \quad d(\Gamma\to\Delta)''
\end{array}
$$

と adjust される. see → A Method for Obtaining Proof Figures of Valid Formulas in the First Order Predicate Calculus by. T. Oshiba. P. 49–61. Comm. Math. Univ. St. Pauli Vol. 30. No. 1. 1981

EXAMPLE $A = \forall y_1(\neg\forall x_1((\exists y_2 P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,y_1)) \vee \exists x_2 P(y_1,x_2))$

(0) A の付随式 $\tilde{A}\langle x_1,x_2\rangle = \underset{[f_1]}{\forall y_1}(\neg\underset{(x_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(x_1)]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,y_1)) \vee \underset{(x_2)}{\exists x_2} P(y_1,x_2))$

を作り, $sb\tilde{A}\langle x_1,x_2\rangle = \neg(P(x_1,f_2(x_1)) \vee P(x_1,f_1)) \vee P(f_1,x_2)$ を $D(x_1,x_2)$ とおく.

(I) $D(\tau_{11},\tau_{12}) \vee \cdots \vee D(\tau_{m1},\tau_{m2})$ が恒真となる $m \geq 1$ と $\tau_{ij} \in H(\tilde{A})$ を探す.

肯定的に "$m=2$, $D(\underline{f_1},\underline{\underline{f_2(f_1)}}) \vee D(f_1,f_1)$ が恒真" とみつかる.

(実際 $(\neg(P(f_1,f_2(f_1)) \vee P(f_1,f_1)) \vee P(f_1,f_2(f_1))) \vee (\neg(P(f_1,f_2(f_1)) \vee P(f_1,f_1)) \vee P(f_1,f_1))$

は $\neg(P_0 \vee P_1) \vee P_0) \vee (\neg(P_0 \vee P_1) \vee P_1)$ 故恒真)

(II) そこで $\mathfrak{S}_0 = \to \tilde{A}\langle f_1,f_2(f_1)\rangle, \tilde{A}\langle f_1,f_1\rangle$ を最下式とし

((phase 1)) $\mathfrak{S}_0$ に US-operation を適用し, pseudo-proof $\mathcal{P}_1 = \mathbb{US}[\mathfrak{S}_0]$ を作る.

pseudo-proof $\mathcal{P}_1 = \mathbb{US}[\mathfrak{S}_0]$ Fig. 2

rul No. ↓

$$\dfrac{P(f_1, f_2(f_1)) \to P(f_1, f_2(f_1))}{P(f_1, f_2(f_1)) \to P(f_1, f_2(f_1)),\ P(f_1, f_1)}\ \text{weakening}$$

$$\dfrac{P(f_1, f_1) \to P(f_1, f_1)}{P(f_1, f_1) \to P(f_1, f_2(f_1)),\ P(f_1, f_1)}\ \text{weakening}$$

2.2.1.r
$$\dfrac{P(f_1, f_2(f_1)) \to P(f_1, f_2(f_1)),\ P(f_1, f_1)}{P(f_1, f_2(f_1)) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ P(f_1, f_1)}\ \exists r.$$

2.1.2.l
$$\dfrac{P(f_1, f_2(f_1)) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ P(f_1, f_1)}{\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(f_1, y_2) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ P(f_1, f_1)}\ \exists^{*} l.$$

2.1.1.r
$$\dfrac{\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(f_1, y_2) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ P(f_1, f_1)}{\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(f_1, y_2) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)}\ \exists r.$$

2.2.1.r
$$\dfrac{P(f_1, f_1) \to P(f_1, f_2(f_1)),\ P(f_1, f_1)}{P(f_1, f_1) \to P(f_1, f_2(f_1)),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)}\ \exists r$$

2.2.1.r
$$\dfrac{P(f_1, f_1) \to P(f_1, f_2(f_1)),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)}{P(f_1, f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)}\ \exists r.$$

1.l.1.
$$\dfrac{\cdots}{(\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(f_1, y_2)) \vee P(f_1, f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)}\ \vee l.$$

2.1.1.l
$$\dfrac{(\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(f_1, y_2)) \vee P(f_1, f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)}{\underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)}\ \forall l.$$

0.1
$$\dfrac{\cdots}{\underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1),\ \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)}\ \text{weakening } l.$$

1.r.4.
$$\dfrac{\cdots}{\underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \neg \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1)),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)}\ \neg r$$

1.r.1
$$\dfrac{\cdots}{\underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \neg \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1)) \vee \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)}\ \vee r.$$

1.r.4
$$\dfrac{\cdots}{\to \neg \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1)),\ \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \neg \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1)) \vee \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)}\ \neg r.$$

1.r.1
$$\dfrac{\cdots}{\to \neg \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1)) \vee \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \neg \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1)) \vee \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)}\ \vee r.$$

(※) 2.1.2 r
$$\dfrac{\cdots}{\mathfrak{S}_0 = \to \underbrace{\underset{[f_1]}{\forall y_1} \{\neg \underset{(\underline{f_1}/x_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(\underline{f_1}/x_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, y_1)) \vee \underset{(\underline{f_2(f_1)}/x_2)}{\exists x_2} P(y_1, x_2)}_{\tilde{A}\langle \underset{x_1}{f_1},\ \underset{x_2}{f_2(f_1)} \rangle},\ \underbrace{\underset{[f_1]}{\forall y_1} \{\neg \underset{(\underline{f_1}/x_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(\underline{f_1}/x_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, y_1)) \vee \underset{(\underline{f_1}/x_2)}{\exists x_2} P(y_1, x_2)\}}_{\tilde{A}\langle \underset{x_1}{f_1},\ \underset{x_2}{f_1} \rangle}}\ \forall^{*} r$$

draw upwards

((phase 2)) cl-op. により ( )'s, [F]'s を除き
((phase 3)) α-op. により max. Skolem term
f_1, $f_2(f_1)$ を α_{f_1}, $\alpha_{f_2(f_1)}$ におきかえれば
$\to \underbrace{A, A}_{m=2}$ に到る cut-free LK proof を得る.

但し(※)は

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to cl(B_1(f_1)),\ cl(B_2(f_1))}{\to cl(B_1(f_1))}\ \text{contraction } (\because)\ cl(B_1(f_1)) = cl(B_2(f_1))}{\to \forall y_1\, cl(B_1(y_1))}\ \forall \text{right}}{\to \forall y_1\, cl(B_1(y_1)),\ \forall y_1\, cl(B_2(y_1))}\ \text{weakening}$$

を挿入する. (rule 2.1.2 の註参照)