数理解析研究所講究録
第 458 巻 1982 年 74-83

グラフ理論におけるNL-完全な問題

早稲田大学理工学部　深沢良彰
相模工業大学工学部　岩田茂樹

1. 準備

チューリング機械とは，有限個の状態をもつ制御部と２方向の読み取り専用の入力テープと２方向に読み書き可能な作業テープからなる機械のことである。この機械は受理状態に入った時には必ず停止する。$L, M \subseteq \Sigma^*$をアルファベットΣ上の言語とし，NLを対数領域において非決定性チューリング機械によって認識できる言語のクラスとする。このとき

(1) 次のような関数$f: \Sigma^* \to \Sigma^*$がある時，LはMに還元できる（$L \leq M$と書く）。

(a) fは決定性チューリング機械で対数領域で計算可能である。

(b) $x \in \Sigma^*$なるすべてのxに対して，$x \in L$と$f(x) \in M$は同値である。

(2) LがNL-困難であるとは，すべての$M \in NL$に対して，

$M \le L$となることである。

(3) LがNL-完全であるとは，$L \in NL$であり，LがNL-困難であることをいう。

グラフ理論に関する用語はBerge [1]またはHarary [5]に従う。

定理1.1 [11]　以下のように定義されるGAP (Graph Accessibility Problem) はNL-完全である。

入力：有向グラフ$G=(X,A)$, x_1, $x_n \in X$

性質：Gにはx_1からx_nへの有向道がある。

系1.1　次の問題GAP(k)もNL-完全である。

入力：有向グラフ$G=(X,A)$, x_1, $x_n \in X$，正整数k

性質：Gにはx_1からx_nへの長さk以下の有向道がある。

定理2.2 [7]　次の問題はNL-完全である。

(1)　CYCLE

入力：有向グラフ$G=(X,A)$

性質：Gは少なくとも1つのサイクルをもつ。

(2)　STRONG

入力：有向グラフ$G=(X,A)$

性質：Gは強連結である。

系1.2　次の問題CYCLE(k)もNL-完全である。

入力：有向グラフ$G=(X,A)$，正整数k

性質：Gは長さk以下のサイクルをもつ。

以下にこの論文で考察されている問題を記述する。これらは次節でNL-完全であることを示す。

(1)　DIAM(k)

入力：有向グラフ$G=(X,A)$，正整数k

性質：Gの直径はk以下である。

(2)　RAD(k)

入力：有向グラフ$G=(X,A)$，Gの中心$x_1 \in X$，正整数k

性質：Gの半径はk以下である。

GAP(k)，CYCLE(k)，DIAM(k)およびRAD(k)については，無向グラフにおいても考えることができる。これらをUGAP(k)，UCYCLE(k)，UDIAM(k)およびURAD(k)と各々呼ぶ。

(3)　NOT-MM

入力：無向グラフ$G=(X,E)$，Gのマッチング$F \subseteq E$

性質：FはGの最大マッチングでない。

(4)　NOT-FNSℓ

入力：有向グラフ$G=(X,A)$

性質：Gはサイズℓのフィードバック点集合をもたない。

(5)　NOT-FASℓ

入力：有向グラフ$G=(X,A)$

性質：Gはサイズℓのフィードバック辺集合をもたない。

(6)　CONℓ

入力：有向グラフ$G=(X,A)$

性質：Gはℓ－連結である。

(7)　ACONℓ

入力：有向グラフ$G=(X,A)$

性質：Gはℓ－辺連結である。

2．問題のNL-完全性

定理2.1　DIAM(k)はNL-完全である。

定理2.2　RAD(k)はNL-完全である。

以上証明略

定理2.3 [1] あるマッチングFが最大であるための必要十分条件は，飽和していない2点を結ぶ交互通路が存在しないことである。

定理2.3より，ただちに次の系を得る。

系2.1　あるマッチングFが最大であるための必要十分条件は，飽和していない2点を結ぶ交互道が存在しないことである。

定理2.4　NOT-MMはNL-完全である。

(証明)　$G=(X,E)$を与えられた無向グラフ，FをGのマッチングとする。NOT-MMがNLに入ることを証明するために，次のように動作する非決定性チューリング機械を作る。

begin

X に含まれる点の対 x, y を非決定的に選ぶ。

if　x から y への交互道が存在するなら

　then halt,　F は最大マッチングでない。

end

GAP ≤ NOT-MM を示すために，有向グラフ $G=(X,A)$ から無向グラフ $G'=(X',E')$ を次のように構成する。

$X' = X \cup \{ x' \mid x \in X \} \cup \{s, t\}$

$E' = \{ (x, x') \mid x \in X \} \cup \{ (x_i, x_j') \mid (x_i, x_j) \in A \}$
$\quad \cup \{ (s, x_1'), (x_n, t) \}$

以下に G に x_1 から x_n への有向道が存在することと，$E'' = \{(x, x') \mid x \in X\}$ が G' の最大マッチングでないことが同値であることを示す。明らかに E'' は G' のマッチングであり，s と t は飽和されていない点である。もし G に x_1 から x_n への有向道 $(x_1, y_1), (y_1, y_2), \cdots (y_k, x_n)$（但し $y_1, y_2, \cdots, y_k \in X$）があれば，$E''$ に関して s と t との間に交互道 $(s, x_1'), (x_1', x_1), (x_1, y_1'), (y_1', y_1), (y_1, y_2'), (y_2', y_2), \cdots, (y_k', y_k), (y_k, x_n'), (x_n', x_n), (x_n, t)$ が存在する。よって系 2.1 より E'' は G の最大マッチングでない。

逆にもし G に x_1 から x_n への有向道がなければ，明らかに G' においては s と t との間に交互道が存在しない。なぜならば,

sとtのみがG'における唯一の飽和していない点だからである。よってE''はG'の最大マッチングである。

故に，NOT-MMはNL-完全である。 Q.E.D.

定理2.5 NOT-FNSℓはNL-完全である。

定理2.6 NOT-FASℓはNL-完全である。

定理2.7 CONℓはNL-完全である。

以上証明略。

定理2.8 ACONℓはNL-完全である。

(証明) ACONℓがNLに入ることは容易にわかる。

ACONℓがNL-困難であることを証明するためにSTRONGがACONℓに還元できることを示す。有向グラフ$G=(X,A)$から，次のように新しい有向グラフ$G'=(X',A')$を作る。

$$X'=\{[x,i] \mid x\in X,\ 1\leqq i\leqq \ell\}$$

$$A'=\{([u,i],[v,j]) \mid (u,v)\in A,\ 1\leqq i,j\leqq \ell\}$$

このG'の構成は明らかに対数領域で行なうことができる。

Gが強連結であると仮定する。$[u,i]$と$[v,j]$をG'に含まれる任意の相異なる2点であるとする。まず，$[u,i]$から$[v,j]$への辺が互いに素なℓ本の有向道があることを示す。

Case 1. $u\neq v$，$(u,v)\in A$

Subcase 1. $i\neq j$。Gは強連結であるので，Gにはvからuへの有向道$v, y_1, y_2, \cdots, y_m, u$が存在する。Fig. 2.1(a)

参照。よってG'には$[u,i]$から$[v,j]$へ$\ell-2$本の有向道$[u,i]$, $[v,k]$, $[y_1,k]$, $\cdots$, $[y_m,k]$, $[u,k]$, $[v,j]$ $(1 \leqq k \leqq \ell,\ k \neq i,j)$と2本の有向道$[u,i]$, $[v,j]$および$[u,i]$, $[v,i]$, $[y_1,j]$, $\cdots$, $[y_m,j]$, $[u,j]$, $[v,j]$が存在する。しかもこれらℓ本の有向道はすべての辺について互いに素である。

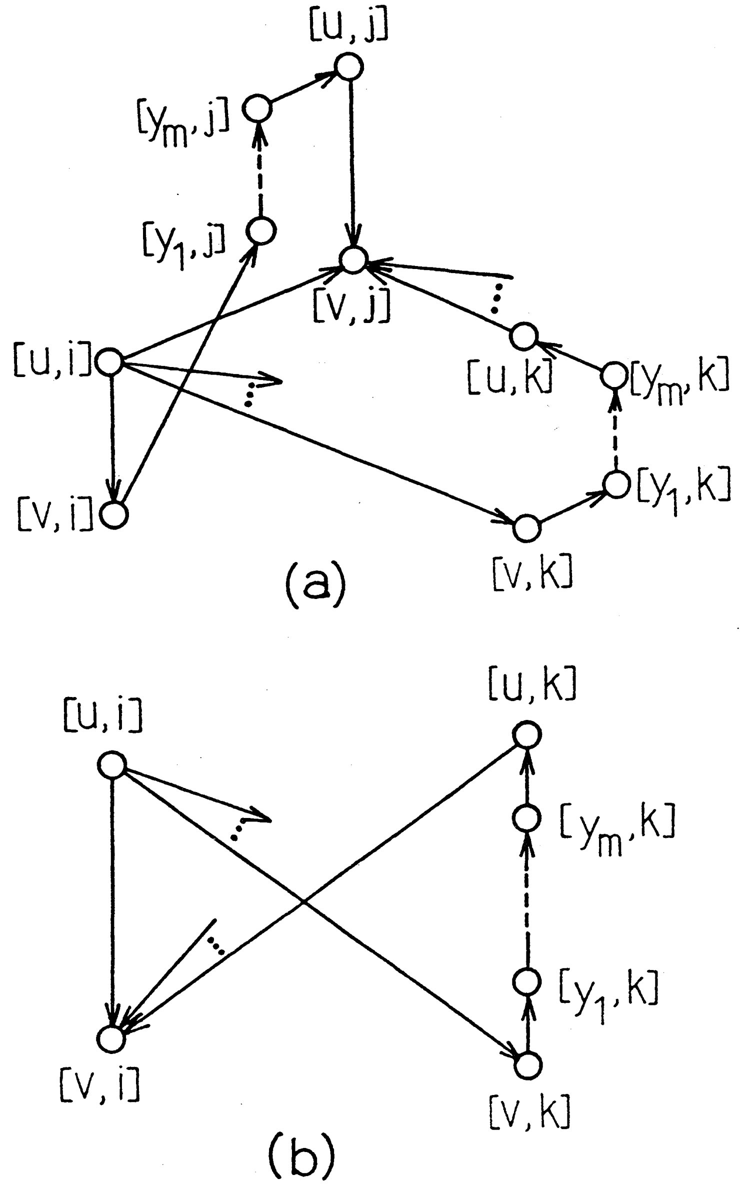

Fig. 2.1 定理2.8におけるG'

Subcase 2. $i=j$。Gにおいて有向道v, $y_1, y_2, \cdots, y_m$, uが存在する。この時G'では$[u,i]$から$[v,i]$へ$\ell-1$本の有向道$[u,i]$, $[v,k]$, $[y_1,k]$, $\cdots$, $[y_m,k]$, $[u,k]$, $[v,i]$ $(1 \leqq k \leqq \ell,\ k \neq i)$ および1本の有向道$[u,i]$, $[v,i]$が存在する。Fig. 2.1 (b) 参照。ここでもℓ本の有向道は辺に関して互いに素である。

Case 2. $u \neq v \wedge (u,v) \notin A$。Gは強連結であるので，$u$

からυへの有向道 $u, y_1, y_2, \cdots, y_m, v$ が存在する。よって G' には ℓ 本の辺の互いに素な有向道 $[u, i], [y_1, k], \cdots, [y_m, k], [v, j]$ $(1 \leqq k \leqq \ell)$ が存在する。

Case 3. $u = v$。$[u, i]$ と $[v, j]$ は相異なるので，$i \neq j$。G は強連結であるから，あるサイクル $u, y_1, y_2, \cdots, y_m, u$ $(m \geqq 1)$ が存在する。よって G' には $[u, i]$ から $[v, j]$ へ ℓ 本の辺の互いに素な有向道 $[u, i], [y_1, k], [y_2, k], \cdots, [y_m, k], [v, j]$ $(1 \leqq k \leqq \ell)$ が存在する。

いずれの場合にも G' において $[u, i]$ から $[v, j]$ へ ℓ 本の辺が互いに素な有向道が存在することを示した。よって G' から $\ell - 1$ 本の辺を削除しても $[u, i]$ から $[v, j]$ へ少なくとも 1 本の有向道がある。$[u, i]$ および $[v, j]$ は任意であるので，G' は ℓ - 辺連結である。

逆に G が強連結でないとすると，G' の構成法より G' は強連結でない。よって G' は ℓ - 辺連結でない。 Q.E.D.

3. おわりに

UGAP とは無向グラフ $G = (X, E)$, $x_1, x_n \in X$ において，x_1 から x_n への無向道が存在するかという問題である。以下 Jones による未解決問題，即ち UGAP は NL-完全か，についての一考察を行なう。UGAP が NL に入ることは明らかであるので，その NL-困難性についてのみ考える。

有向グラフ $G=(X,A)$, $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ から以下のような無向グラフ $G'=(X',E')$ を構成し, $GAP \leq UGAP(k)$, $k=\sqrt{n}$ を証明できる。

$X'=\{[x,i] \mid x\in X,\ 0\leqq i\leqq m\}\cup\{y_i \mid 0\leqq i\leqq m\}$

$E'=\{([u,i],[v,i+1]) \mid (u,v)\in A,\ 0\leqq i<m\}$

$\cup\{([x_m,i],y_m) \mid 0\leqq i\leqq m\}$

一方, Jones の未解決問題はUGAP即ちUGAP(k), k=n に関してである。そこで上記の $G'=(X',E')$ から次のような無向グラフ $G''=(X'',E'')$ を作る。

$X''=X'\cup\{z_i \mid 1\leqq i\leqq (m+1)^2\}$

$E''=E'\cup\{(y_m,z_1)\}\cup\{(z_i,z_{i+1}) \mid 1\leqq i<(m+1)^2\}$

明らかに, Gにおいて x_1 から x_m への有向道が存在することと, G'' において $[x_1,0]$ から $z_{(m+1)^2}$ へ長さ $(m+1)+(m+1)^2$ 以下の無向道が存在することとが必要十分である。G'' の点の数を n とすると, $n=2(m+1)^2$ より, 任意の $\varepsilon(>0)$ に対して,

$(m+1)+(m+1)^2 = n/2+(m+1) > n/2 > n^{1-\varepsilon}$

となる。よってどのような $\varepsilon(>0)$ に対しても, UGAP(k), $k\leqq n^{1-\varepsilon}$ がNL-完全であることが証明された。しかしUGAP (UGAP(k), k=n) がNL-完全であるかどうかは依然未解決である。

References

(1) Berge,C.: "Graphs and hypergraphs", North-Holland Publishing Company (1976).

(2) Cook,S.A.: "The complexity of theorem proving procedures", Proc. Third Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, pp. 151-158 (1971).

(3) Even,S. and Tarjan,R.E.: "A combinatorial problem which is complete in polynomial space", J. ACM, 23, 4 (1976).

(4) Garey,M.R. and Johnson,D.S.: "Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness", H.Freeman, San Francisco (1978).

(5) Harary,F.: "Graph theory", Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).

(6) Hopcroft,J.E. and Ullman,J.D.: "Introduction to automata theory, languages and computation", Addison-Wesley, Reading, Mass. (1979).

(7) Jones,N.D.: "Space-bounded reducibility among combinatorial problems", J. Comput. & Syst. Sci., 11, pp. 68-85 (1975).

(8) Jones,N.D. and Laaser,W.T.: "Complete problems for deterministic polynomial time", Theor. Comput. Sci., 3, pp. 105-117 (1977).

(9) Jones,N.D., Lien,Y.E. and Laaser,W.T.: "New problems complete for nondeterministic log space", Math. Syst. Theory, 10, pp. 1-17 (1976).

(10) Karp,R.M.: "Reducibility among combinatorial problems", Plenum Press, N.Y., pp. 85-104 (1972).

(11) Savitch,W.J.: "Relationships between nondeterministic and deterministic tape complexities", J. Comput. & Syst. Sci., 4, pp. 177-192 (1970).