数理解析研究所講究録
第 460 巻 1982 年 107-130

A unification of first-order necessary conditions in nondifferentiable nonlinear programming with equality and inequality constraints

九大 理　古川長太

§1 序

非線形計画論において，目的関数や制約関数に通常の意味の微分可能性を仮定しないで最適条件を追究する，いわゆる微分不可能非線形計画問題の一群がある．この中で特に関数の凸性を仮定し，通常の微分に代るものとして方向微分ないしは劣微分の概念の導入により理論の展開を行ったものに，Rockafellar 以来の凸計画論がある。その後，凸性を仮定せずに方向微分のある拡張を導入し最適条件を研究したものにNeustadtの研究があり，局所リプシッツ関数を対象としてNeustadt とは異なる方向微分の拡張を導入したものにClarke の研究がある。

本報告では，通常の方向微分や Neustadt，Clarke の拡張された方向微分を特別な場合として含む準方向微分の概念を導入し，これにより従来のいろいろな意味で微分不可能な非線形計画問題の最適条件が，ある程度統一的に述べられ

ることを示すのが目的である。

§2 準方向微分

この§では準方向微分という概念を定義し，それが従来のいろいろな微分の一般化になっていることを解説する。

以下では X はバナッハ空間とする。

Def. 2.1 $f: X \to \mathbb{R}$, $z \in X$ に対して，$\varphi: X \to \mathbb{R}$ が

(i) $\varphi(tx) = t\varphi(x) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in X$ （正斉次性）

(ii)
$$\left(\begin{array}{l} x_n \in X,\ \lambda_n > 0,\ n = 1, 2, \cdots \\ x_n \to z \quad \text{as } n \to \infty \\ \lambda_n (x_n - z) \to \exists h;\ \varphi(h) < 0 \\ \qquad\qquad \text{as } n \to \infty \end{array}\right) \Rightarrow \exists n_0;\ f(x_n) < f(z)\ \forall n > n_0$$

をみたすとき，φ を f の z における準方向微分という。

Example 1 f が X 上で Fréchet 微分可能のとき，

f の z における Fréchet derivative を $\nabla f(z)$ とする。

$\varphi: x \mapsto \nabla f(z) x$ は f の z における準方向微分である。

（証明） Fréchet derivative の定義より明らかである。

Example 2 f が X 上で convex のとき，

$\exists x_0 \in X$, $\exists$ nbd V of x_0, $\exists M > 0$ s. t. $f(x) \leq M \quad \forall x \in M$

を仮定する（$X = \mathbb{R}^n$ のときはこの仮定は不要）

f の z における(片側)方向微分を $f'(z;\cdot)$ とおく。即ち

$$f'(z;x) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(z+\lambda x) - f(z)}{\lambda} \quad \text{for } x \in X.$$

このとき $\varphi : x \mapsto f'(z;x)$ は準方向微分である。

(証明)

仮定により f は X 上で局所リプシッツ関数となる。([6], p.93)

ゆえに $\exists$ nbd V of z, $\exists K > 0$ s.t.

$$|f(x) - f(y)| \leq K\|x - y\| \quad \forall x, \forall y \in V \qquad (2.1)$$

$\{x_n\}$, $\{\lambda_n\}$, h を Def. 2.1 の (ii) の左辺におけるものとする。

$\mu_n \equiv 1/\lambda_n$ とおく。よって $\frac{1}{\mu_n}(x_n - z) \to h$ as $n \to \infty$.

$\varphi(h) < 0$ で φ は正斉次だから $h \neq 0$. 故に $\mu_n \downarrow 0$ としてよい。

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|f(x_n) - f(z+\mu_n h)|}{\mu_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{K\|x_n - z - \mu_n h\|}{\mu_n} \quad \because (2.1)$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} K \left\| \frac{1}{\mu_n}(x_n - z) - h \right\| = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(z+\mu_n h)}{\mu_n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(z)}{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(z+\mu_n h)}{\mu_n} + \lim_{n\to\infty} \frac{f(z+\mu_n h) - f(z)}{\mu_n}$$

$$= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(z+\lambda h) - f(z)}{\lambda} = f'(z;h) = \varphi(h) < 0.$$

$\therefore \exists n_0$ s.t. $f(x_n) < f(z) \quad \forall n > n_0$。

ゆえに φ は準方向微分である。正斉次の証明は省略したが、明らかである。

<u>Example 3</u> （Neustadt 微分）

$$f'_{\mathcal{N}}(\bar{x}\,;x) \equiv \lim_{\substack{y\to x\\ \lambda\downarrow 0}} \frac{f(\bar{x}+\lambda y)-f(\bar{x})}{\lambda}$$

とおき，これがすべての $x\in X$ に対して有限確定であることを仮定する。これが Neustadt によって定義されたいわゆる Neustadt 微分である。写像 $x\mapsto f'_{\mathcal{N}}(\bar{x}\,;x)$ を φ とおくと，φ は準方向微分である。

（証明）　φ の正斉次は明らか。

$x_n\to\bar{x}$，$\frac{1}{\lambda_n}(x_n-\bar{x})\to h$，$\varphi(h)<0$ とする。Example 2 と同じく，$\lambda_n\downarrow 0$ としてよい。$f'_{\mathcal{N}}(\bar{x}\,;h)$ が有限確定だから

$$\frac{f(x_n)-f(\bar{x})}{\lambda_n} = \frac{f\left(\bar{x}+\lambda_n\cdot\frac{x_n-\bar{x}}{\lambda_n}\right)-f(\bar{x})}{\lambda_n} \longrightarrow f'_{\mathcal{N}}(\bar{x}\,;h)=\varphi(h)<0$$

これより　$\exists n_0\,;\ f(x_n)<f(\bar{x})\quad \forall n>n_0$.

以下 Examples 4〜7 では f は X 上の局所リプシッツ関数とする。

<u>Example 4</u> （Clarke の一般化された方向微分）

$$f^{\circ}(\bar{x}\,;x) \equiv \limsup_{\substack{u\to\bar{x}\\ \lambda\downarrow 0}} \frac{f(u+\lambda x)-f(u)}{\lambda}$$

Neustadt 微分が limit の存在を仮定したのに対し，Clarke では f が局所リプシッツならば $f^{\circ}(\bar{x}\,;\cdot)$ は必ず実数値関数として

定まる。写像 $x \mapsto f^{\circ}(\bar{z};x)$ を φ とおくと，φ は準方向微分である。

(証明)

φ の正斉次は明らか。

$x_n \to \bar{z}$, $\frac{1}{\lambda_n}(x_n-\bar{z}) \to h$, $\varphi(h)<0$ とする。Example 2 と同じく，$\lambda_n \downarrow 0$ としてよい。

仮定により f は局所リプシッツだから (2.1) により Example 2 と同様に

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(\bar{z}+\lambda_n h)}{\lambda_n} = 0 .$$

次に，f が連続であることから

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(\bar{z}+\lambda_n h)-f(\bar{z})}{\lambda_n} \le \limsup_{\substack{u\to\bar{z}\\ \lambda\downarrow 0}} \frac{f(u+\lambda h)-f(u)}{\lambda}$$

$$= f^{\circ}(\bar{z};h) = \varphi(h) < 0 .$$

よって，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(\bar{z})}{\lambda_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{f(\bar{z}+\lambda_n h)-f(\bar{z})}{\lambda_n} \le \varphi(h) < 0.$

故に $\exists n_0$; $f(x_n) < f(\bar{z})$ $\forall n > n_0$.

以下3つの例では，上記の諸例にならって容易に証明できるので，証明は省略する。

<u>Example 5</u>

$$f^{\square}(\bar{z};x) \equiv \limsup_{\lambda\downarrow 0} \frac{f(\bar{z}+\lambda x)-f(\bar{z})}{\lambda}$$

Example 6

$$f^{\triangle}(z;x) \equiv \limsup_{\substack{y \to x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(z+\lambda y)-f(z)}{\lambda}$$

Example 7

$$f^{\hat{\triangle}}(z;x) \equiv \limsup_{\substack{y \to x \\ u \to z \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(u+\lambda y)-f(u)}{\lambda}$$

Remark. 上述の７つの準方向微分のうち凸性，連続性をみたすものをあげておく。

(i) Ex.1 は Fréchet 微分の定義により g は線形連続.

(ii) Ex.2 は，凸解析でよく知られているように，g は X 上で凸かつ連続.

(iii) Ex.4 の g は X 上で凸かつ連続。証明は [1] p.166 を見よ。

次の Proposition は本論と直接関係はないがあげておく。

Proposition 2.1

$f: X \to R$ convex かつ，ある点 x_0 の近傍 V が存在して，f は V 上で上方有界とする。($X = R^n$ のときは凸性の仮定だけでよい)
このとき次のことが成立する。

$$f'(z;\cdot) = f'_{\mathcal{H}}(z;\cdot) = f^{\circ}(z;\cdot) = f^{\square}(z;\cdot) = f^{\triangle}(z;\cdot) = f^{\hat{\triangle}}(z;\cdot)$$

Proposition 2.1 のうち $f'(z;\cdot)=f^{\circ}(z;\cdot)$ の証明は Clarke [1] によって与えられた。

§3 いろいろな infinitesimal cone

この § では非線形計画で良く使われるいくつかの infinitesimal cone の定義を述べ，次の § で必要なそれらの間の関係を与える。

Def. 3.1 $Q\subset X$, $z\in\overline{Q}$ に対して

$$F(Q;z)\equiv\left\{h\in X\;\middle|\;\begin{array}{l}\exists\,\text{nbd } V \text{ of } h,\ \exists\,\varepsilon>0\\ \text{s.t.}\quad z+tV\subset Q\quad\text{for } 0<\forall t\leqq\varepsilon\end{array}\right\}$$

これを Q に対する z における feasible direction の cone，又は Q の z における feasible cone と呼ぶ。

$F(Q;z)$ は原点を頂点とする open cone であり，Q が convex なら $F(Q;z)$ は convex cone になる。一般に $F(Q;z)$ は空のこともあるが，Q が convex で $\mathrm{int}\,Q\neq\Phi$ なら $F(Q;z)\neq\Phi$ である。

Def. 3.2 $Q\subset X$, $z\in\overline{Q}$ に対して

$$TC(Q;z)\equiv\left\{h\in X\;\middle|\;\begin{array}{l}\exists\,\varepsilon>0,\ \exists\,r(\cdot):[0,\varepsilon]\to X\quad\text{s.t.}\\ \quad z+th+r(t)\in Q\quad\text{for }\forall t\in(0,\varepsilon]\\ \quad \|r(t)\|/t\to 0\quad\text{as } t\downarrow 0\end{array}\right\}$$

これを Q に対する $\bar{x}$ における tangent direction の cone，又は Q の $\bar{x}$ における tangent cone と呼ぶ。

$TC(Q;\bar{x})$ は原点を頂点とする cone であり，Q が convex なら $TC(Q;\bar{x})$ も convex である。

<u>Def. 3.3</u>　$Q \subset X$，$\bar{x} \in \overline{Q}$ に対して

$$T(Q;\bar{x}) \equiv \left\{ h \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \{x_n\} \subset Q,\ \exists \{\lambda_n\} \text{ s.t. } \lambda_n > 0,\ n = 1, 2, \cdots \\ x_n \to \bar{x},\ \lambda_n (x_n - \bar{x}) \to h \quad \text{as } n \to \infty \end{array} \right\}$$

これを Q の $\bar{x}$ における adherent displacement cone と呼ぶ。

$T(Q;\bar{x})$ は $\bar{x}$ を頂点とする closed cone である。

<u>Proposition 3.1</u>

(i)　$F(Q;\bar{x}) \subset TC(Q;\bar{x}) \subset T(Q;\bar{x})$

(ii)　$S_n(\bar{x})$ は中心 $\bar{x}$，半径 $\frac{1}{n}$ の開球を表すとする。十分大きい n に対して $Q \cap S_n(\bar{x})$ は convex，かつ空でない内部を持つと仮定する。このとき次のことが成り立つ。

$$\overline{F(Q;\bar{x})} = T(Q;\bar{x})$$

(iii)　Y をバナッハ空間，

$h : X \to Y$ は X 上で Fréchet 微分可能とする。

$N[h] \equiv \{x \in X \,;\, h(x) = 0\}$，　　$\bar{x} \in N[h]$ とする。

h は $\bar{x}$ において正則，かつ Fréchet derivative $\nabla h(x)$ は $x = \bar{x}$ において連続とする。

このとき次のことが成り立つ。

$$TC(N[h];z) = T(N[h];z)$$

(証明)

(i) $F(Q:z) \subset TC(Q;z)$ の証明は、$TC(Q;z)$の定義における $r:[0,\varepsilon] \to X$ を $r \equiv 0$ ととればよい。

$TC(Q:z) \subset T(Q:z)$ の証明は次の通り。

$\forall h \in TC(Q;z)$

$\exists \varepsilon_0 > 0 ; \exists r:[0,\varepsilon_0] \to X$

s. t. $\begin{cases} z + \varepsilon h + r(\varepsilon) \in Q \quad \text{for } 0 < \forall \varepsilon < \varepsilon_0 & \cdots\cdots ㋑ \\ \frac{1}{\varepsilon} r(\varepsilon) \to 0 \quad \text{in norm as } \varepsilon \downarrow 0 & \cdots\cdots ㋺ \end{cases}$

正整数 N を $\frac{1}{N} < \varepsilon_0$ ととれ。$n > N$ に対し x_n を次で定義する。

$$x_n \equiv z + \frac{1}{n} h + r\left(\frac{1}{n}\right)$$

㋺より $n r\left(\frac{1}{n}\right) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$ $\cdots\cdots$ ㋩

$\therefore \quad r\left(\frac{1}{n}\right) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$ $\cdots\cdots$ ㋥

故に ㋥より $x_n \to z \quad \text{as } n \to \infty$

又、$n(x_n - z) = n\left(\frac{1}{n} h + r\left(\frac{1}{n}\right)\right) = h + n r\left(\frac{1}{n}\right) \to h$ $\because$ ㋩

故に $\lambda_n \equiv n$ とおけば

$$\lambda_n (x_n - z) \to h$$

㋑より $x_n \in Q \quad \forall n > N$

以上より $h \in T(Q;z)$

(ii) $Q\cap S_n(\bar z)$ に対する仮定から $F(Q;\bar z)\neq\phi$ が容易に分る。(i)より，及び $T(Q;\bar z)$ が closed であることより

$$\overline{F(Q;\bar z)}\subset T(Q;\bar z).$$

逆に $\forall h\in T(Q;\bar z)$

$\therefore\ \exists\{x_n\}\subset Q,\ \exists\{\lambda_n\}$ s.t. $\lambda_n\downarrow 0$

$$x_n\to\bar z,\quad \frac{1}{\lambda_n}(x_n-\bar z)\longrightarrow h\quad \text{as } n\to\infty.$$

$x_n\to\bar z$ と，$Q\cap S_n(\bar z)$ に対する仮定から

$\forall n\geq 1,\quad x_n\in Q\cap S_n(\bar z)$ かつ $Q\cap S_n(\bar z)$ は凸，$\mathrm{int}(Q\cap S_n(\bar z))\neq\phi$

としてよい。故に $\forall n\geq 1,\ \exists p_n\in \mathrm{int}(Q\cap S_n(\bar z))$.

Accessibility Lemma より開線分 (x_n,p_n) 上の点はすべて $Q\cap S_n(\bar z)$ の内点である。そこで $y_n\in(x_n,p_n)$ を

$$\|x_n-y_n\|\leq\lambda_n^2$$

ととれ。 $h_n\equiv\dfrac{1}{\lambda_n}(y_n-\bar z)$ とおけば明らかに

$$h_n\in F(Q;\bar z)\ \ \forall n\geq 1,\quad \text{かつ}\quad h_n\to h\quad \text{as } n\to\infty.$$

よって $h\in\overline{F(Q;\bar z)}$.

(iii) $\forall d\in T(N[h];\bar z)$

$\exists\{x_n\}\subset N[h],\ \exists\{\lambda_n\}$ s.t. $\lambda_n>0\ \ \forall n$

$$x_n\to\bar z,\quad \frac{1}{\lambda_n}(x_n-\bar z)\to d.$$

一般に $\bar z\in Q$ なら $0\in TC(Q;\bar z)$ が成立. $\left(\begin{array}{c}TC\text{の定義より}\\ \text{明らか}\end{array}\right)$

今 $\bar z\in N[h]$ だから $0\in TC(N[h];\bar z)$

故に $d=0$ のときは $d=0\in TC(N[h];\bar z)$

故に $d \neq 0$ として $d \in TC(N[h]\,;\,\bar{z})$ を示そう。

$d \neq 0$ だから $\lambda_n \downarrow 0$.

$$y_n \equiv \frac{1}{\lambda_n}(x_n - \bar{z}). \qquad \therefore\ y_n \to d$$

$$\begin{aligned} 0 &= h(x_n) - h(\bar{z}) \\ &= h(\bar{z} + \lambda_n y_n) - h(\bar{z}) \\ &= \nabla h(\bar{z})(\lambda_n y_n) + o(\lambda_n \|y_n\|). \end{aligned}$$

$y_n \to d$ だから 上式より

$$\nabla h(\bar{z})\, d = 0 \qquad \therefore\ d \in \operatorname{Ker} \nabla h(\bar{z})$$

よって $T(N[h]\,;\,\bar{z}) \subset \operatorname{Ker} \nabla h(\bar{z})$ ・・・・ ㊭

が示された。ところが Ljusternik の定理 ([2], p.30) より

$\operatorname{Ker} \nabla h(\bar{z}) = TC(N[h]\,;\,\bar{z})$ だから ㊭ と合わせて

$$T(N[h]\,;\,\bar{z}) \subset TC(N[h]\,;\,\bar{z})$$

逆向は (i) で証明ずみだから, したがって (iii) が示された。

§4 *Sublinear map* と劣微分

<u>Def 4.1</u> $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ に対して φ の x_0 における劣微分を次式で定義する。

$$\partial\varphi(x_0) \equiv \left\{ x^* \in X^* \;\middle|\; \varphi(x_0) + \langle x^*, x - x_0 \rangle \leq \varphi(x) \quad \forall x \in X \right\}$$

ここに X^* は X の topological dual space を表す。

<u>Def. 4.2</u> $\phi \neq S \subset X$ に対して

$$S^P \equiv \{ x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S \}$$

これを S の polar cone という。

<u>Def. 4.3</u> $\varphi : X \to \mathbb{R}$ が次の(i),(ii)をみたすとき sublinear であるという。

(i) $\varphi(tx) = t\varphi(x) \quad \forall t \geq 0, \ \forall x \in X$

(ii) $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x \in X, \ \forall y \in X.$

凸解析で良く知られたことから次の命題を得る。

<u>Proposition 4.1</u>

$\varphi : X \to \mathbb{R}$ への sublinear continuous map なら

$\forall x_0 \in X, \quad \partial\varphi(x_0) \neq \phi$ が成り立つ。

次の命題は [3], Lemma 4.4 と同様の方針で証明できるので証明は省略する。

<u>Proposition 4.2</u>

$\varphi : X \to \mathbb{R}$ への sublinear continuous map

$C \equiv \{x \in X \mid \varphi(x) < 0\}$

$C \neq \phi$ を仮定する.

このとき $C^p = \{\lambda y \ ; \ y \in \partial\varphi(0), \ \lambda \geq 0\}$ が成立。

<u>Def. 4.4</u> $\phi \neq S \subset X^*$ に対して

$$\delta^*(x \mid S) \equiv \sup\{\langle x^*, x\rangle \ ; \ x^* \in S\} \quad \text{for } x \in X$$

で $\delta^*(\cdot|S)$ を定義し，これを S の support function という。

Proposition 4.3

$\varphi: X \to \mathbb{R}$ への sublinear continuous map

$\Longrightarrow$

$$\varphi(x) = \delta^*(x \mid \partial\varphi(0)) \qquad \forall x \in X.$$

（証明）

$x=0$ のときは $\varphi(0)=0$ だから自明

ゆえに $x \neq 0$ に対して証明する。

$$\xi \in \partial\varphi(0) \iff \varphi(u) \geq \langle \xi, u \rangle \qquad \forall u \in X$$

の関係より $\forall u$, $\sup\{\langle \xi, u\rangle ; \xi \in \partial\varphi(0)\} = \delta^*(u|\partial\varphi(0)) \leq \varphi(u)$

が成立。故に

$$\exists \xi \in \partial\varphi(0) \quad \text{s.t.} \quad \langle \xi, x \rangle = \varphi(x) \qquad \cdots \text{(イ)}$$

を示せばよい。

$x \neq 0$ より

$$\exists \xi_0 \in X^* \quad \text{s.t.} \quad \langle \xi_0, x \rangle \neq 0$$

$$\xi_1 \equiv \frac{\varphi(x)}{\langle \xi_0, x\rangle} \xi_0 \qquad \therefore \xi_1 \in X^*$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \xi_1, \lambda x \rangle = \lambda \varphi(x) \qquad \cdots \text{(ロ)}$$

(///) $\lambda\varphi(u) \leq \varphi(\lambda u) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall u \in X$

$\because$ $\lambda \geq 0$ のときは φ が正斉次であることから明らか。

$\lambda < 0$ のとき

φ が sublinear だから

$$\varphi\left(\frac{u}{2}-\frac{u}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}\varphi(u)+\frac{1}{2}\varphi(-u) \qquad \forall u$$

$$\therefore \quad -\varphi(u) \leqq \varphi(-u) \qquad \forall u$$

これより

$$\lambda\varphi(u) = -|\lambda|\varphi(u) = -\varphi(|\lambda|u)$$

$$\leqq \varphi(-|\lambda|u) = \varphi(\lambda u)$$

よって ㊁ が示された。

㊂ と ㊁ より

$$\langle \zeta_1, \lambda x\rangle \leqq \varphi(\lambda x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \cdots ㋩$$

$\mathfrak{M} \equiv \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, ㋩ を書き直して

$$\langle \zeta_1, y\rangle \leqq \varphi(y) \qquad \forall y \in \mathfrak{M}$$

Hahn-Banach の拡張定理を適用して

$$\exists \zeta_2 \in X^* \text{ s.t. } \begin{cases} \langle \zeta_2, u\rangle \leqq \varphi(u) & \forall u \in X \\ \langle \zeta_2, x\rangle = \langle \zeta_1, x\rangle \end{cases} \qquad \cdots ㊁$$

㊁ は $\zeta_2 \in \partial\varphi(0)$ と同値.

又, $\langle \zeta_2, x\rangle = \langle \zeta_1, x\rangle = \varphi(x) \quad \because$ ㋺

故に ζ_2 が ㋑ をみたすものである。

次の結果は凸解析で良く知られたものである。

<u>Corollary</u>

$f : X \to R$ へ convex function, ある点の近傍で上方有界

$\bar{x} \in X$ を任意の点とする。

$$\Longrightarrow \quad f'(\bar{x}; x) = \delta^*(x \mid \partial f(\bar{x})) \quad \forall x \in X.$$

(証明)

$\varphi(x) \equiv f'(\bar{x}; x)$ とおけば, $\partial\varphi(0) = \partial f(\bar{x})$ だから Prop. 4.3 より明らか。

§5 局所解の必要条件

X : バナッハ空間

$f ; X \to \mathbb{R}$ (目的関数)

$g_i ; X \longrightarrow \mathbb{R}$, $i=1,2,\cdots,m$ (不等式制約関数)

$\gamma_j : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $j=1,2,\cdots,n$ (等式制約関数)

$\phi \neq Q \subset X$ (制約集合)

次の様な最適化問題を考えよう。

(P_1)

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \longrightarrow \mathrm{Min} \\ \text{subject to} \\ g_i(x) \leq 0, \quad i=1,2,\cdots,m \\ \gamma_j(x) = 0, \quad j=1,2,\cdots,n \\ x \in Q \end{array}}$$

以下では g_i $(i=1,2,\cdots,m)$ はすべて連続とする。

$$Q_1 \equiv \{ x \in X \mid g_i(x) \leq 0, \quad i=1,2,\cdots,m \}$$

$$Q_2 \equiv \{ x \in X \mid \gamma_j(x) = 0, \quad j=1,2,\cdots,n \}$$

Def 5.1

$\bar{x} \in Q \cap Q_1 \cap Q_2$ に対して

$\exists_{nbd}\ U$ of $\bar{x}$ s.t. $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in Q \cap Q_1 \cap Q_2 \cap U$

が成り立つとき，$\bar{x}$ は $(\mathcal{P}_1)$ の *local optimal solution* であるという。

Lemma 5.1

$\bar{x}$; $(\mathcal{P}_1)$ の *local optimal solution*

φ_0 ; f の $\bar{x}$ における準方向微分

φ_i ; g_i の $\bar{x}$ における準方向微分．　$i=1,2,\cdots,m$

$F_0 \equiv \{ x \in X \mid \varphi_0(x) < 0 \}$

$I(\bar{x}) \equiv \{ i \in \{1,2,\cdots,m\} \mid g_i(\bar{x}) = 0 \}$

$G_i \equiv \{ x \in X \mid \varphi_i(x) < 0 \}, \quad i \in I(\bar{x})$

$G_0 \equiv \bigcap_{i \in I(\bar{x})} G_i$

$\Longrightarrow$

(i) $F_0 \cap G_0 \cap T(Q_2 ; \bar{x}) \cap F(Q ; \bar{x}) = \phi \quad$ if $I(\bar{x}) \neq \phi$

(ii) $F_0 \cap T(Q_2 ; \bar{x}) \cap F(Q ; \bar{x}) = \phi \quad$ if $I(\bar{x}) = \phi$

(証明)

(i) $h \in F_0 \cap G_0 \cap T(Q_2 ; \bar{x}) \cap F(Q ; \bar{x})$ があるとする。

$h \in T(Q_2 ; \bar{x})$ より

$\exists \{x_n\} \subset Q_2, \quad \exists \{\lambda_n\}$

$$
\text{s.t.}\begin{cases} \lambda_n > 0, \quad n = 1, 2, \cdots \\ x_n \to z, & \cdots\cdots ① \\ \lambda_n(x_n - z) \to h & \cdots\cdots ② \end{cases}
$$

$h \in F_0$ で φ_0 は正斉次だから　$h \neq 0$

故に ① ② より　　$\lambda_n \uparrow +\infty$

次に　$h \in F(Q\,;z)$ より

$\quad {}^{\exists}\text{nbd } V \text{ of } h,\ {}^{\exists}\varepsilon_0 > 0$

$\quad \text{s.t.}\quad z + tV \subset Q \quad \text{for} \quad 0 < {}^{\forall}t \leq \varepsilon_0 \quad \cdots\cdots ③$

② より　${}^{\exists}n_1\ ;\quad \lambda_n(x_n - z) \in V \quad \text{for } {}^{\forall}n > n_1$

$\lambda_n \uparrow +\infty$ より　${}^{\exists}n_2\ ;\quad \dfrac{1}{\lambda_n} < \varepsilon_0 \quad {}^{\forall}n > n_2$

$\quad \bar{n} \equiv \max(n_1, n_2)$

③ より　　$x_n = z + \dfrac{1}{\lambda_n} \times \lambda_n(x_n - z) \in Q \qquad {}^{\forall}n > \bar{n}$

$\quad \therefore \quad x_n \in Q \quad {}^{\forall}n > \bar{n} \qquad \cdots\cdots ④$

$h \in F_0$ より　　$\varphi_0(h) < 0 \qquad \cdots\cdots ⑤$

故に 準方向微分の定義と ① ② ⑤ より

$\quad {}^{\exists}m_0\ ;\quad f(x_n) < f(z) \quad {}^{\forall}n > m_0$

$h \in G_0$ より　　$\varphi_i(h) < 0 \quad {}^{\forall}i \in I(z)$

$\quad i \in I(z)$ に対して　f に対するときと同様に

$\quad\quad {}^{\exists}m_i\ ;\quad g_i(x_n) < g_i(z) = 0 \quad {}^{\forall}n > m_i$

$\quad i \in \{1, 2, \cdots; m\} \setminus I(z)$ に対して

$\quad\quad g_i$ の連続性と ① より　　$\lim_{n\to\infty} g_i(x_n) = g_i(z) < 0$

$\quad\quad \therefore\ {}^{\exists}m_i\ ;\quad g_i(x_n) < 0 \quad {}^{\forall}n > m_i$

$$N \equiv \max\{\bar{n}, m_0, m_1, \cdots, m_m\}$$

とおけば以上より

$$x_n \in Q \cap Q_1 \cap Q_2 \qquad \forall n > N$$

$$f(x_n) < f(\bar{z}) \qquad \forall n > N$$

を得る。これらと ① を合わせて，$\bar{z}$ が local optimal であることに矛盾する。

(ii)　(i) と同様の方針なので省略する。

<u>Theorem 5.1</u>

$\bar{z}$; (P_1) の local optimal solution

$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_m$ は Lemma 5.1 の通りですべて sublinear continuous を仮定する。

各 j に対し，γ_j は $\bar{z}$ のある近傍で Fréchet 微分可能で点 x における Fréchet derivative $\nabla\gamma_j(x)$ は $x=\bar{z}$ において連続とする。

更に，十分大きい n に対して $Q \cap S_n(\bar{z})$ は凸かつ $\mathrm{int}(Q \cap S_n(\bar{z})) \neq \phi$ とする。

$\Longrightarrow$ $\exists \lambda_i \geq 0,\ i=0,1,\cdots,m, \quad \exists \mu_j \in \mathbb{R} \quad j=1,2,\cdots,n$
s. t.

(5.1) $\quad (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$

(5.2) $\quad \lambda_i g_i(\bar{z}) = 0 \qquad i=1,2,\cdots,m$

(5.3) $\quad 0 \in \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \partial\varphi_i(0) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla\gamma_j(\bar{z}) + T(Q;\bar{z})^P$

(証明)　　$I_0(z) \equiv \{0\} \cup I(z)$

Case 1　$\{\varphi_i\ ;\ i \in I_0(z)\}$ の中に $\varphi_i(x) \geqq 0\ \forall x \in X$ なるものがあるとき。

$\varphi_0(x) \geqq 0\ \ \forall x \in X$ のとき

$0 \in \partial\varphi_0(0)$ となるから $\lambda_0 = 1;\ \lambda_i = 0,\ i = 1, \cdots, m;\ \mu_j = 0,\ j = 1, \cdots, m$

とおけ。　$0 \in \partial\varphi_0(0)$ かつ $0 \in T(Q\,;z)^P$ だから

$0 \in \partial\varphi_0(0) + T(Q\,;z)^P$　　よって (5.1)〜(5.3) 成立

ある $i_0 \in I(z)$ に対し　$\varphi_{i_0}(x) \geqq 0\ \ \forall x \in X$ のときも同様.

Case 2　$\{\nabla\gamma_j(z),\ j = 1, 2, \cdots, n\}$ が一次従属のとき

$\exists (\mu_1, \cdots, \mu_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$

s.t.　$\sum_{j=1}^{n} \nabla\gamma_j(z)\mu_j = 0$

よって　$\lambda_i = 0,\ i = 0, 1, \cdots, m$ とおけば (5.1)〜(5.3) 成立.

Case 3　その他のとき

$I(z) \neq \phi$ とする。

Prop. 3.1 より　$TC(Q_2\,;z) = T(Q_2\,;z)$ だから, Lemma 5.1 より

$$F_0 \cap G_0 \cap TC(Q_2\,;z) \cap F(Q\,;z) = \phi$$

ここで Ljusternik の定理 ([2]. p.30) により

$$TC(Q_2\,;z) = \{x \in X \mid \langle \nabla\gamma_j(z), x \rangle = 0\quad \forall j = 1, 2, \cdots, n\}\qquad \cdots ①$$

したがって $TC(Q_2\,;z)$ は原点を頂点とする convex cone.

又. 定理の仮定から $F_0, G_0, F(Q\,;z)$ はすべて原点を頂点とする open convex cone

したがって Dubovitskii-Milyutin lemma より

$\exists x_0^* \in F_0^p$, $\exists x_i^* \in G_i^p$ $(i \in I(z))$

$\exists u^* \in TC(Q_2; z)^p$, $\exists v^* \in F(Q; z)^p$

s.t. $x_0^*, x_i^*\ (i \in I(z)), u^*, v^*$ は not all zero

$$\sum_{i \in I_0(z)} x_i^* + u^* + v^* = 0 \qquad \cdots\text{ロ}$$

Case 3 の定め方より

$$F_0 \neq \Phi, \qquad G_i \neq \Phi \quad \text{for } i \in I(z)$$

よって Prop. 4.2 より 各 $i \in I_0(z)$ につき

$$\exists \lambda_i \geq 0, \ \exists y_i^* \in \partial \varphi_i(0) \quad \text{s.t.} \quad x_i^* = \lambda_i y_i^*$$

一方 イ より

$$TC(Q_2; z)^p = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla \gamma_j(z) \ ; \ \mu_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

よって 各 j につき $\exists \mu_j \in \mathbb{R}$ s.t. $u^* = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla \gamma_j(z)$

<u>$v^* = 0$ のとき</u>

not all zero より $\lambda_i\ (i \in I_0(z))$, μ_j, $j = 1, 2, \cdots, n$ は not all zero

ロ より

$$\sum_{i \in I_0(z)} \lambda_i y_i^* + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla \gamma_j(z) = 0$$

故に, $\lambda_i = 0$ for $i \in \{1, 2, \cdots, m\} \setminus I(z)$ とおけば

$$0 \in \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \partial \varphi_i(0) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla \gamma_j(z)$$

$$\therefore 0 \in \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \partial \varphi_i(0) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla \gamma_j(z) + T(Q; z)^p$$

このとき (5.2) は $\lambda_i = 0 \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, m\} \setminus I(z)$ より明らか.

$v^* \neq 0$ のとき

$\lambda_i = 0 \quad \forall i \in I_0(\bar{z}),\quad \mu_j = 0 \quad \forall j$ と仮定すると ⑫ より $v^* = 0$

となり矛盾.

よって, $\lambda_i \ (i \in I_0(\bar{z})),\ \mu_j,\ j=1,\cdots,n$ は not all zero

$\lambda_i = 0 \quad$ for $i \in \{1,2,\cdots,m\} \setminus I(\bar{z})$ とおけ

⑫ より $\quad 0 \in \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \partial \varphi_i(0) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla \gamma_j(\bar{z}) + F(Q;\bar{z})^p$

一方. Prop 3.1 (ii) を使って

$$F(Q;\bar{z})^p = \left(\overline{F(Q;\bar{z})}\right)^p = T(Q;\bar{z})^p$$

よって $\quad 0 \in \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \partial \varphi_i(0) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla \gamma_j(\bar{z}) + T(Q;\bar{z})^p$

$I(\bar{z}) = \phi$ のとき

Lemma 5.1 (ii) を使うことにより 同様の方法で

$\exists \lambda_0 \geq 0,\ \exists \mu_j \in \mathbb{R} \quad j=1,2,\cdots,n$

s. t.

(5.1)$'$ $\quad (\lambda_0, \mu_1, \cdots, \mu_n) \neq (0,0,\cdots,0)$

(5.3)$'$ $\quad 0 \in \lambda_0 \partial \varphi_0(0) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla \gamma_j(\bar{z}) + T(Q;\bar{z})^p$

が得られる。 そこで $\lambda_i = 0,\ i=1,2,\cdots,m$ とおけば

(5.1)$'$, (5.3)$'$ より (5.1) ~ (5.3) が得られる。

[証明終り]

Theorem 5.2

$\bar{z}$ を (P_1) の local optimal solution とし, Thm 5.1 と同じ仮定をおく。

$\Longrightarrow$

(5.1), (5.2) 及び次の (5.4) をみたす $\lambda_i \geq 0,\ i=0,1,\cdots,m,$

$\mu_j \in \mathbb{R},\ j=1,2,\cdots,n$ が存在する。

(5.4) $$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla \gamma_j(\bar{z}) x \geq 0 \quad \forall x \in T(Q;\bar{z})$$

(証明)

(5.3) より $\exists\, y_i \in \partial \varphi_i(0) \quad i=0,1,\cdots,m$

$$\text{s.t.} \quad -\sum_{i=0}^{m} \lambda_i y_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla \gamma_j(\bar{z}) \in T(Q;\bar{z})^P$$

$$\therefore \quad \left\langle \sum_{i=0}^{m} \lambda_i y_i , x \right\rangle + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla \gamma_j(\bar{z}) x \geq 0 \quad \forall x \in T(Q:\bar{z})$$

$\lambda_i \geq 0,\ i=0,1,\cdots m$ だから Prop. 4.3 を使うと上式より

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla \gamma_j(\bar{z}) x \geq 0 \quad \forall x \in T(Q;\bar{z})$$

よって (5.4) が成立.

<u>Remark.</u> (5.3) と (5.4) は実は同値であることが示される。(5.4) ⇒ (5.3) の証明のためにはまた準備が必要で、あまり長くなるので割愛する。

最後に等式制約のない問題に対してふれておく。

(P_2)

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \longrightarrow \mathrm{Min} \\ \text{subject to} \\ \quad g_i(x) \leq 0, \quad i=1,2,\cdots,m \\ \quad x \in Q \end{array}}$$

ここでも $g_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ はすべて連続とする。

<u>Theorem 5.3</u>

$\bar{x}$; (P_2) の local optimal solution

$g_0, g_1, \cdots, g_m$ は Lemma 5.1 の通りですべて sublinear continuous を仮定する。

$T(Q;\bar{x})$ は凸であるとする。

$\Longrightarrow$

$\exists\ \lambda_i \geq 0,\quad i=0,1,\cdots,m$

s.t.

$(5.1)''\qquad (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) \neq (0,0,\cdots,0)$

$(5.2)\qquad \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0,\qquad i=1,2,\cdots,m$

$(5.3)'\qquad 0 \in \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \partial g_i(0) + T(Q;\bar{x})^p$

(証明)

Lemma 5.1 と同様の Lemma として

$F_0 \cap G_0 \cap T(Q;\bar{x}) = \phi\qquad$ if $I(\bar{x}) \neq \phi$

$F_0 \cap T(Q;\bar{x}) = \phi\qquad$ if $I(\bar{x}) = \phi$

を用意し, Thm 5.1 と同様の方針で証明できる。

§6 あとがき

本報告では，準方向微分といういわば性質だけを道具にして局所解の必要条件を導いた。結果として問題(P_2)に対しては，従来個々に別々の入口から入って必要条件に到達していたものが完全に統一された。しかしながら問題(P_1)に対しては必しもそうではない。その理由は (i) 等式制約関数に Fréchet 微分

可能を仮定した，(ii) 制約集合に内点条件を課した．による。(i),(ii) の条件をゆるめて統一的に論じることは今後の問題である。

参考文献

[1] F. H. Clarke, A new approach to Lagrange multipliers, Math. Opns. Res. 1, 165-174 (1976).

[2] A. D. Ioffe and V. M. Tihomirov, Theory of Extremal Problems, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[3] M. Minami, Weak Pareto optimality of multiobjective problems in a locally convex linear topological space, J. Optim. Theory and Appl. 34, 469-484 (1981).

[4] L. W. Neustadt, An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems I, General theory, SIAM J. Control 4, 505-527 (1966).

[5] L. W. Neustadt, An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems II, Applications, SIAM J. Control 5, 90-137 (1967).

[6] A. W. Roberts and D. E. Varberg, Convex Functions, Acad. Press, 1973.