数理解析研究所講究録
第 460 巻 1982 年 242-255

2人零和マルコフ・ゲームについて

新潟大 理　　田辺 信男

1 導入

ここでは，特別な形の確率微分方程式で表されるシステムの下での2人零和マルコフ・ゲームについて考える.

費用関数は，2次項と双線形項の期待値からなり，各プレイヤーの戦略空間は，ユークリッド空間の単位球をなしている。1人のプレイヤーは費用関数を最大に，もう一人は最小にするものとする。このとき，ある仮定の下で，鞍点が純粋戦略として存在し，純粋戦略として存在しない場合，ある2つの純粋戦略を確率化することにより得られるatomic-混合戦略が鞍点となることを示す。atomic-混合戦略の構成法は2人零和2次ゲームに対するWilson [6] の方法による。

2，2人零和マルコフ・ゲームの構成

システムの状態が，次の確率微分方程式で与えられる2人零和マルコフ・ゲームを考える。 $t\in[0,T]$ に対して

$$dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u(t,x) + C(t)v(t,x)]\,dt + \sigma(t)dW(t)$$
$$x(0) = x_0$$

ここで，$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ はtに関して連続で，それぞれ $n\times n$, $n\times p$, $n\times q$ 行列，$a(t) = \sigma(t)\cdot\sigma(t)'$ は $n\times n$ 対称~~正~~定値行列でtに関して連続，$W(t)$ はn次元標準ブラウン運動とする。C を $[0,T]$ から R^n への連続関数の空間とし，(t,x) を $t\in[0,T]$ とtにおける $x\in C$ の値の組とする。$[0,T]\times R^n$ の σ-field $\mathcal{D}$ を $\mathcal{B}([0,T])\times\mathcal{B}(R^n)$ とする。ここで $\mathcal{B}([0,T])$ は $[0,T]$ の Lebesgue σ-field，$\mathcal{B}(R^n)$ は R^n のボレル σ-field を表す。プレイヤー u と v は，協力することなく，現在のシステムの状態を観測し，それぞれ行動 $u\in U = \{u\in R^p : |u|^2 \leq 1\}$,
$v\in V = \{v\in R^q : |v|^2\leq 1\}$ を選ぶものとする。
$\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ をそれぞれ U と V のボレル部分集合の σ-field とする。各プレイヤーの許容純粋戦略は次のような可測関数である：

$$u : [0,T]\times R^n \longrightarrow U \quad , \quad v : [0,T]\times R^n \longrightarrow V .$$

$C(U)$ を U 上のすべての実数値連続関数の集合とすると，sup norm により導かれる距離により separable-空間となる。$F(U)$ を $C(U)$ により導かれる弱位相をもつ，$(U, \mathcal{U}_1)$ 上のすべての signed measure の集合とする。すると，U 上のすべてのボレル確率測度の集合 $P(U)$ は $F(U)$ の部分空間となり，さらに $F(U)$ の compact convex 距離部分空間として距離化できる。

同様に $P(V)$ も $F(V)$ の Compact convex 距離空間となる。

プレイヤー u と v の許容混合戦略は次のような可測関数である： $u:[0,T]\times R^n \to P(U)$, $v:[0,T]\times R^n \to P(V)$

しかし，以後主にでてくる混合戦略は，純粋戦略の有限集合のそれぞれに正の確率を指定する atomic-混合戦略である。1つの純粋戦略に集中している確率測度を $\delta(\cdot)$ で表すと，各 $(t,x)\in[0,T]\times R^n$ に対して，確率 ν_k, $\nu_k>0$, $\sum_{k=1}^{p}\nu_k=1$ で純粋戦略 u^k, $k=1,2,\cdots p$ を選ぶ混合戦略は $\sum_{k=1}^{p}\nu_k\delta(u^k)$ で表される。次に，費用関数は次のように与えられる。

$$J(u,v)=E_{(u,v)}\Big\{\int_0^T[x'(t)Q(t)x(t)+u'(t,x)R(t)u(t,x)$$
$$+v'(t,x)S(t)v(t,x)+u'(t,x)M(t)v(t,x)]dt$$
$$+x'(T)F(T)x(T)\Big\}$$

ここで $Q(t)$, $R(t)$, $S(t)$ は対称で，t に関して連続であり，それぞれ，$n\times n$, $P\times P$, $q\times q$ 行列で，$F(T)$ は対称 $n\times n$ 行列，$M(t)$ は t に関して連続で $P\times q$ 行列とする。

もし，すべての戦略 u, v について

$J(u,v^*)\leqq J(u^*,v^*)\leqq J(u^*,v)$ を満たす組 (u^*,v^*) が存在するならば，この (u^*,v^*) をゲームの鞍点と呼ぶ。

3．純粋戦略における鞍点

ここでは $R(t)$ が negative semi definite で，$S(t)$ が positive semi definite のとき，ゲームが純粋戦略をもつことを示す。

$\forall p \in R^n$ に対して

$$H(t, x, u, v, p) = p'(A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v) + L(t, x, u, v)$$

$$L(t, x, u, v) = x'(t)Q(t)x(t) + u'R(t)u + v'S(t)v + u'M(t)v$$

とおく。

$$W(t, x) = x'(t)K(t)x(t) + 2g(t)x(t) + h(t)$$

かつ，$W(T, x) = x'(T)F(T)x(T)$ とする.

ここで，$K(t)$ は t に関して微分可能な $n \times n$ 行列；$g(t)$ は t に関して微分可能な n 次元ベクトル，$h(t)$ は t に関して微分可能な実数値関数とする。

$H(t, x, u, v) = H(t, x, u, v, \frac{\partial W(t,x)}{\partial x})$ とおく.

補助定理 3.1

もし $R(t)$ が negative semidefinite で，$S(t)$ が positive semi-definite であるならば，次のような可測関数 u^*, v^* が存在する.：　各 $(t, x) \in [0, T] \times R^n$ に対し，任意の純粋戦略 u, v について，

$$H(t, x, u, v^*) \leqq H(t, x, u^*, v^*) \leqq H(t, x, u^*, v)$$

証明　U と V は convex で compact であり，$R(t)$ が negative semi-definite であるから，関数：$u \to u'R(t)u$ は concave，よって $H(t, x, u, v)$ は固定した v, (t, x) に対して，u に関して concave であり，また $S(t)$ が

positive semi-definite であるから，関数：$v \to v'S(t)v$ は convex，よって $H(t,x,u,v)$ は固定した u，(t,x) に対して v に関して convex となる。また $H(t,x,u,v)$ は固定した (t,x) に対して u と v に関して連続である。従って，角谷の不動点定理から，各 (t,x) に対して，次のような u°，v° が存在する：すべての $u\in\mathcal{U}$，$v\in\mathcal{V}$ に対して

$$H(t,x,u,v^\circ) \leqq H(t,x,u^\circ,v^\circ) \leqq H(t,x,u^\circ,v)$$

また，この u°，v° が可測関数 $u^*;[0,T]\times R^n \to \mathcal{U}$，$v^*:[0,T]\times R^n \longrightarrow \mathcal{V}$ で置き換えられる。なぜならば $H(t,x,u,v^\circ)$ は u に関して連続で，$\mathcal{U}$ は separable より，任意の実数 a に対して

$$\left\{(t,x):\max_{u\in\mathcal{U}} H(t,x,u,v^\circ) < a\right\} = \bigcap_{u\in S_1}\left\{(t,x);H(t,x,u,v^\circ)<a\right\}$$

S_1 は $\mathcal{U}$ の可算な稠密部分集合とする．

よって，$\max_{u\in\mathcal{U}} H(t,x,u,v^\circ)$ は $\mathfrak{D}$ に関して可測である。従って Beneš [1] の Lemma 1 から 次のような可測関数 $u^*:[0,T]\times R^n \to \mathcal{U}$ が存在する：

$$\max_{u\in\mathcal{U}} H(t,x,u,v^\circ) = H(t,x,u^*,v^\circ)$$

同様に，次のような可測関数 $v^*:[0,T]\times R^n \to \mathcal{V}$ が存在する．

$$\min_{v\in\mathcal{V}} H(t,x,u^\circ,v) = H(t,x,u^\circ,v^*)$$

従って 各 (t,x) に対して

$$H(t,x,u,v^*) \leqq H(t,x,u^*,v^*) \leqq H(t,x,u^*,v) \quad \square$$

次に，[6]の Theorem 2.2 から，組$(u^*(t,x), v^*(t,x)) \in U \times V$ が補助定理3.1を満たすための必要十分条件は，次のような $\lambda(t) \geq \lambda^*(t)$，$\mu(t) \leq \mu_*(t)$ が存在することである；

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
&2(R(t)-\lambda(t))\,u^*(t,x) + M(t)v^*(t,x) + B'(t)\cdot W_x(t,x) = 0\\
&M'(t)\,u^*(t,x) + 2(S(t)-\mu(t))\,v^*(t,x) + C'(t)\cdot W_x(t,x) = 0\\
&\lambda(t)\cdot\left(1-|u^*(t,x)|^2\right) = 0\\
&\mu(t)\cdot\left(1-|v^*(t,x)|^2\right) = 0
\end{aligned}
$$

ここで，$\lambda^*(t) = \max\left(\max_{|u|^2=1} u' R(t) u,\ 0\right)$

$\mu_*(t) = \min\left(\min_{|v|^2=1} v' S(t) v,\ 0\right)$

以下この章では，次のことを仮定する

A1．ほとんどすべての$(t,x) \in [0,T] \times R^n$に対して

$$
(2)\quad W_t(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\, W_{x_i x_j}(t,x) + H(t,x,u^*,v^*) = 0
$$

ここで，$a_{ij}(t)$ は $a(t) = \sigma(t)\cdot\sigma(t)'$ の(i,j)成分

$W_t(t,x) = \frac{\partial W(t,x)}{\partial t}$，$W_x(t,x) = \frac{\partial W(t,x)}{\partial x}$，$W_{x_i x_j}(t,x) = \frac{\partial^2 W(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}$，

(u^*, v^*) は，補助定理 3.1 の戦略とする。

関数 $W(t,x)$ に Ito stochastic differentiable rule を適用し，$E_{(u,v)}\left[\int_0^T |W_x(t,x)\sigma(t)|^2 dt\right] < \infty$ を用いて，

$$
(3)\quad W(0,x_0) = E_{(u,v)}\left\{\int_0^T \Big[-W_t(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(t,x) - W_x(t,x)'\big(A(t)x(t) + B(t)u(t,x) + C(t)v(t,x)\big)\Big]dt + W(T,x)\right\}
$$

を得る

定理 3.1　ゲームは，純粋戦略の鞍点をもつ

証明　(3) で (u^*, v) とし，(2) と補助定理 3.1 から

$$W(0,x_0) \leqq E_{(u^*,v)}\left[\int_0^T L(t,x,u^*,v)\,dt + W(T,x)\right]$$

また (3) で (u, v^*) とし，(2) と補助定理 3.1 から

$$W(0,x_0) \geqq E_{(u,v^*)}\left[\int_0^T L(t,x,u,v^*)\,dt + W(T,x)\right]$$

また (3) で (u^*, v^*) とし，(2) から

$$W(0,x_0) = E_{(u^*,v^*)}\left[\int_0^T L(t,x,u^*,v^*)\,dt + W(T,x)\right]$$

よって $L(t,x,u,v)$ の定義と，上のことから

任意の純粋戦略 u，v に対して

$$\begin{aligned}
&E_{(u^*,v)}\Big[\int_0^T [x'(t)Q(t)x(t) + u^{*\prime}(t,x)R(t)u^*(t,x) \\
&\qquad + v'(t,x)S(t)v(t,x) + u^{*\prime}(t,x)M(t)v(t,x)]\,dt + W(T,x)\Big] \\
&\geqq E_{(u^*,v^*)}\Big\{\int_0^T [x'(t)Q(t)x(t) + u^{*\prime}(t,x)R(t)u^*(t,x) \\
&\qquad + v^{*\prime}(t,x)S(t)v^*(t,x) + u^{*\prime}(t,x)M(t)v^*(t,x)]\,dt + W(T,x)\Big\} \\
&\geqq E_{(u,v^*)}\Big\{\int_0^T [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t,x)R(t)u(t,x) \\
&\qquad + v^{*\prime}(t,x)S(t)v^*(t,x) + u'(t,x)M(t)v^*(t,x)]\,dt + W(T,x)\Big\}
\end{aligned}$$

従って，すべての純粋戦略 u，v に対して

$$J(u,v^*) \leqq J(u^*,v^*) \leqq J(u^*,v) \qquad \square$$

4. 混合戦略における鞍点

$R(t)$ と $S(t)$ に仮定のない一般の場合，$R(t)-\lambda^*(t)$ は常に，*negative semi definite* となり，$S(t)-\mu_*(t)$ は常に *positive semi definite* となる。

そこで，$H(t, x, u, v)$ を次のように修正する；

(4) $H^*(t, x, u, v) = H(t, x, u, v) - \lambda^*(t)|u|^2 - \mu_*(t)|v|^2$

すると，$R(t) - \lambda^*(t)$ が *negative semi definite*，$S(t) - \mu_*(t)$ が *positive semi definite* であるから，補助定理3.1から，

次のような純粋戦略(u^*, v^*)が存在する；

各$(t, x) \in [0, T] \times R^n$ と任意の純粋戦略 u, v に対して

(5) $H^*(t, x, u, v^*) \leqq H^*(t, x, u^*, v^*) \leqq H(t, x, u^*, v)$

(1)から，このような(u^*, v^*)と各(t, x)に対して

次のような $\lambda(t) \geqq \lambda^*(t)$，$\mu(t) \leqq \mu_*(t)$ が存在する；

$$2(R(t) - \lambda(t))u^*(t, x) + M(t)v^*(t, x) + B'(t)W_x(t, x) = 0$$

(6)
$$M'(t)u^*(t, x) + 2(S(t) - \mu(t))v^*(t, x) + C'(t)W_x(t, x) = 0$$

$$\{\lambda(t) - \lambda^*(t)\} \cdot (1 - |u^*(t, x)|^2) = 0$$

$$\{\mu(t) - \mu_*(t)\} \cdot (1 - |v^*(t, x)|^2) = 0$$

以後この章では，次のことを仮定する

(A.2) ほとんどすべての$(t, x) \in [0, T] \times R^n$に対して

(7)
$$W_t(t, x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)W_{x_i x_j}(t, x) + H^*(t, x, u^*, v^*) = 0$$

ここで(u^*, v^*)は(6)における戦略である。

次に，(6)における(u^*, v^*)を用いて混合戦略を作る。

各$(t, x) \in [0, T] \times R^n$に対して，2つの場合を考える。

(a) もし $|u^*(t, x)| = 1$ または $\lambda^*(t) = 0$ ならば

$u_1(t, x) = u_2(t, x) = u^*(t, x)$ とする

(b) 他の場合 i.e. $|u^*(t,x)|<1$ かつ $\lambda^*(t)>0$ のとき

$\{u\in R^p : |u|^2=1\}$ は, R^p の compact 部分集合であり, $\lambda^*(t)$ の定義から, 次のような $\hat{u}(t)\in R^p$ が存在する；

(8) $|\hat{u}(t)|^2=1$, $\hat{u}'(t)R(t)\hat{u}(t)=\lambda^*(t)$

さらに, $\beta=\beta_1(t,x)$ と $\beta=\beta_2(t,x)$ を次の方程式の解とする。

(9) $|u^*(t,x)+\beta\hat{u}(t)|^2=1$

そして

$$u_1(t,x)=u^*(t,x)+\beta_1(t,x)\hat{u}(t)$$

$$u_2(t,x)=u^*(t,x)+\beta_2(t,x)\hat{u}(t)$$ とする

$\nu_1(t,x),\nu_2(t,x)\in[0,1]$ で, 次のようなものがとれる：

(10) $\sum_{k=1}^{2}\nu_k(t,x)=1$, $\sum_{k=1}^{2}\nu_k(t,x)u_k(t,x)=u^*(t,x)$

そして

$\sigma^*(t,x)=\nu_1(t,x)\delta(u_1(t,x))+\nu_2(t,x)\delta(u_2(t,x))$ とおく

(a)の場合, $\sigma^*(t,x)$ は, 純粋戦略 $\delta(u^*(t,x))$ として選べる。

同様に,

(c) $|v^*(t,x)|^2=1$ または $\mu_*(t)=1$ ならば

$$v_1(t,x)=v_2(t,x)=v^*(t,x)$$

(d) 他の場合, $|\hat{v}(t)|^2=1$, $\hat{v}'(t)S(t)\hat{v}(t)=\mu_*(t)$ を満たす $\hat{v}(t)\in R^q$ が存在し, $\alpha=\alpha_1(t,x)$ と $\alpha=\alpha_2(t,x)$ を

(11) $|v^*(t,x)+\alpha\hat{v}(t)|^2=1$ の解とし,

$$v_1(t,x)=v^*(t,x)+\alpha_1(t,x)\hat{v}(t)$$

$v_2(t,x) = v^*(t,x) + \alpha_2(t,x)\,\hat{v}(t)$ とおき

$\xi_k(t,x)$, $k=1,2$, を次のようにとれる；

$$\sum_{k=1}^{2} \xi_k(t,x) = 1 \quad , \quad \sum_{k=1}^{2} \xi_k(t,x)\, v_k(t,x) = v^*(t,x)$$

$\tau^*(t,x) = \xi_1(t,x)\,\delta(v_1(t,x)) + \xi_2(t,x)\,\delta(v_2(t,x))$ とする

以後，$\sigma^*(t,x)$, $\tau^*(t,x)$ の (t,x) を省略して σ^*, τ^* と書く．

混合戦略 σ^*, τ^* が用いられたときの，$H^*(t,x,\sigma^*,\tau^*)$ は次のようになる；

$$H^*(t,x,\sigma^*,\tau^*) = H(t,x;\sigma^*,\tau^*) - \lambda^*(t)\int_U |u|^2 d\sigma^*(u) - \mu_*(t)\int_V |v|^2 d\tau^*(v)$$

$$= \int_{U\times V} H(t,x,u,v)\,d\sigma^*(u)\,d\tau^*(v) - \lambda^*(t)\int_U |u|^2 d\sigma^*(u) - \mu_*(t)\int_V |v|^2 d\tau^*(u)$$

補助定理 4.1　すべての $u \in U$ と $v \in V$ に対して

$$H^*(t,x,\sigma^*,\delta(v)) = H^*(t,x,u^*,v)$$

$$H^*(t,x,\delta(u),\tau^*) = H^*(t,x,u,v^*)$$

証明　2つの場合を考える

(a) もし $|u^*(t,x)|^2 = 1$ または $\lambda^*(t) = 0$ ならば

$$H^*(t,x,\sigma^*,\delta(v)) = H^*(t,x,u^*,v)$$

(b) 他の場合

$$H^*(t,x,\sigma^*,\delta(v)) = H^*(t,x,u^*,v) + 2\sum_{k=1}^{2}\beta_k(t,x)\,v_k(t,x)\,u^{*\prime}(t,x)\big(R(t) - \lambda^*(t)\big)\hat{u}(t)$$

$$+\sum_{k=1}^{2} \nu_k(t,x)\left(\beta_k(t,x)\right)^2 \widetilde{u}'(t)\left(R(t)-\lambda^*(t)\right)\widetilde{u}(t)$$

(10)から，$\sum_{k=1}^{2} \nu_k(t,x)\beta_k(t,x)=0$

(8)から　$\sum_{k=1}^{2} \nu_k(t,x)\left(\beta_k(t,x)\right)^2 \widetilde{u}(t)'\left(R(t)-\lambda^*(t)\right)\widetilde{u}(t)=0$

従って

$$H^*(t,x,\sigma^*,\delta(v)) = H^*(t,x,u^*,v)$$

(a)，(b)，どちらの場合とも成り立つ。

$H^*(t,x,\delta(u),\tau^*) = H^*(t,x,u,v^*)$ も同様に得られる　□

(9)と(11)から　$|u_k(t,x)|^2=1$，$|v_k(t,x)|^2=1$

補助定理4.1から

$$H(t,x,\sigma^*,\tau^*) = H^*(t,x,\sigma^*,\tau^*) + \lambda^*(t)\int_U |u|^2 d\sigma^*(u) + \mu_*(t)\int_V |v|^2 d\tau^*(v)$$

$$= H^*(t,x,\sigma^*,\tau^*) + \lambda^*(t)\sum_{k=1}^{2}\nu_k(t,x)|u_k(t,x)|^2 + \mu_*(t)\sum_{k=1}^{2}\zeta_k(t,x)|v_k(t,x)|^2$$

$$= H^*(t,x,\sigma^*,\tau^*) + \lambda^*(t) + \mu_*(t)$$

$$= H^*(t,x,u^*,v^*) + \lambda^*(t) + \mu_*(t)$$

一方

$$H^*(t,x,u^*,v^*) + \lambda^*(t) + \mu_*(t)$$

$$\leqq H^*(t,x,u^*,v) + \lambda^*(t) + \mu_*(t) \qquad \forall v \in V$$

$$= H(t,x,u^*,v) + \lambda^*(t)\left\{1-\sum_{k=1}^{2}\nu_k(t,x)|u_k(t,x)|^2\right\} + \mu_*(t)\left(1-|v|^2\right)$$

$\mu_*(t)\leqq 0$ かつ $|v|^2\leqq 1$，$\sum_{k=1}^{2}\nu_k(t,x)|u_k(t,x)|^2=1$ から

//

$$\leqq H(t,x,\sigma^*,\delta(v))$$

よって両辺を v に関して積分して，$\forall\tau\in P(V)$ に対して

(12) $H^*(t,x,u^*,v^*)+\lambda^*(t)+\mu_*(t)\leqq H(t,x,\sigma^*,\tau)$

同様に $H^*(t,x,u^*,v^*)+\lambda^*(t)+\mu_*(t)\geqq H(t,x,\sigma,\tau^*)$, $\forall\sigma\in P(U)$

定理4.1，(σ^*,τ^*) は，混合戦略における鞍点である．

証明 (A2) と (4) から

$$W_t(x,t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t)W_{x_ix_j}(x,t)+H(t,x,\sigma^*,\tau^*)$$

$$=W_t(x,t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t)W_{x_ix_j}(x,t)+H^*(t,x,\sigma^*,\tau^*)+\lambda^*(t)+\mu_*(t)$$

$$=W_t(x,t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t)W_{x_ix_j}(x,t)+H^*(t,x,u^*,\tau^*)+\lambda^*(t)+\mu_*(t)$$

$$=\lambda^*(t)+\mu_*(t)$$

よって，$W_t(x,t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t)W_{x_ix_j}(x,t)+H(t,x,\sigma^*,\tau^*)=\lambda^*(t)+\mu_*(t)$

従って，(3) から

$$W(0,x_0)=E_{(\sigma^*,\tau^*)}\left\{\int_0^T[L(t,x,\sigma^*,\tau^*)dt+W(T,x)]\right\}-\left(\int_0^T\lambda^*(t)dt\right)-\left(\int_0^T\mu_*(t)dt\right)$$

一方 (12) と A2 から，$\forall\tau\in P(V)$ に対して

$$\lambda^*(t)+\mu_*(t)=W_t(x,t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t)W_{x_ix_j}(t,x)+H^*(t,x,u^*,v^*)+\lambda^*(t)+\mu_*(t)$$

$$\leqq W_t(x,t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t)W_{x_ix_j}(t,x)+H(t,x,\sigma^*,\tau)$$

よって

$$W(0,x_0)\leqq E_{(\sigma^*,\tau)}\left\{\int_0^T[L(t,x,\sigma^*,\tau)dt+W(T,x)\right\}-\left(\int_0^T\lambda^*(t)dt\right)-\left(\int_0^T\mu_*(t)dt\right)$$

同様に

$$\lambda^*(t) + \mu_*(t) = W_t(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(t,x) + H^*(t,x,u^*,v^*) + \lambda^*(t) + \mu_*(t)$$
$$\geqq W_t(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(t,x) + H(t,x,\sigma,\tau^*)$$

よって

$$W(0,x_0) \geqq E_{(\sigma,\tau^*)}\left\{ \int_0^T L(t,x,\sigma,\tau^*)\,dt + W(T,x) \right\}$$
$$-\left(\int_0^T \lambda^*(t)\,dt \right) - \left(\int_0^T \mu_*(t)\,dt \right)$$

$W(T,x) = x'(T) F(T) x(T)$ であるから，

$J(\sigma,\tau^*) \leqq J(\sigma^*,\tau^*) \leqq J(\sigma^*,\tau)$

Reference

[1] Beneš, V. E., Existence of optimal strategies based on specific information for a class of stochastic decision problem, SIAM J. Control and Optimization 8 (1970) 178 – 188

[2] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and stochastic optimal control, Springer-Verlag, Berlin, 1975

[3] Friedoman, A., Stochastic differential equations and application, Vol. I, II, Academic press, New York, 1975

[4] Kakutani, S, A generalization of Brouwer's fixed-point theorem, Duke Math. J. 8 (1941), 457 – 459

[5] Tanaka, K., Report on Research under Financial support of the National Sciences Council, Taiwan, Republic of China, 1980

[6] Wilson, D.J., Mixed strategy solutions for quadratic games, J. Optimization Theory and Applications, 13 (1974) 319 – 333