数理解析研究所講究録
第 462 巻 1982 年 166-186

Quasi-static な塑性問題の可解性について

熊本大 理学部　　三好 哲彦

はじめに。　塑性問題は変分不等式の視点からある程度扱う事ができるが、この方向では種々の理論的、又は工学的な問題を考える際に不便が生じる事がある。それは変分不等式的な接近法では塑性問題のわくの中では問題が扱えなくなり、塑性問題を他の"穏やかな"問題の極限としてとらえざるを得なくなるというところに根本的な原因がある。塑性理論のわく組みの中でとらえる事が望ましいが、それには塑性問題における最も本質的な問題"状態の決定"を避けて通る事ができない。すなわち、$t=t_0$ で(初期値)問題を設定するためには、$t>t_0$ で、考えている場所が elastic となるか plastic となるかを事前に決定しなければならない。この事が可能であってはじめて方程式が(その形が)定まるからである。離散的かつ動的な問題においてはこれが可能である事を[1][2]で示したが、準静的な問題ではその方法が使えないため全く異った方法を工夫しなければならない。本稿ではこの

"状態の決定"という事に話題をしぼって述べたいと思う．エネルギー評価を得て連続的な問題の解を構成する事は[1]，[2]の場合と全く同様にやればよいので本稿では触れない．

1．準静的な多質点系

問題の性格，"状態の決定"のメカニズムを例示するためまずN個の質点系の弾・塑性問題を考える．u_i, ε_i, σ_i, α_i ($i=1\sim N$) をそれぞれ，変位，ひずみ，応力，降伏面の中心とし，次の方程式をみたすこれらを求めるという問題を考えよう。

(1)a $$\sigma_i - \sigma_{i+1} = b_i(t) \qquad i = 1 \sim N$$

(1)b $$\begin{cases} \dot{\sigma}_i = k\dot{\varepsilon}_i \quad \dot{\alpha}_i = 0 & \text{if } |\sigma_i - \alpha_i| < \bar{\sigma} \text{ or } |\sigma_i - \alpha_i| = \bar{\sigma} \ \& \ \mathrm{sgn}(\sigma_i - \alpha_i)\dot{\varepsilon}_i < 0 \\ \dot{\sigma}_i = (1-\xi)k\dot{\varepsilon}_i \quad \dot{\alpha}_i = \dot{\sigma}_i & \text{if } |\sigma_i - \alpha_i| = \bar{\sigma} \ \& \ \mathrm{sgn}(\sigma_i - \alpha_i)\dot{\varepsilon}_i \geqq 0 \end{cases}$$

(1)c $$\varepsilon_i = u_i - u_{i-1}$$

ここで $b_i(t)$ は連続な関数で区分的には解析的，$k(>0)$, $\bar{\sigma}$, ξ ($0 \leqq \xi < 1$) は与えられた定数，$u_0 = u_{N+1} = \cancel{\cdots} = 0$ とする．我々の問題は(1)を初期条件 (t=0で) $u_i = \sigma_i = \alpha_i = 0$ のもとで満たす(絶対連続な) $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ を求める事である．—できれば"区分的には解析的"なものが欲しいので絶対連続をカッコ付きとした—．

まず $t=0$ の近くでは(1)b の1ばん目の式を使用しても σ, α は小さい値をとるから，(1)b の付帯条件が解に対して要求さ

れるとすれば $\sigma-\varepsilon$ relation としては elastic rule, すなわち

$$\sigma_i = k\varepsilon_i \quad , \quad \dot{\alpha} = 0$$

が使用されなければならない. したがってこのとき (1)a は

$$k(-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1}) = b_i(t) \qquad i=1\sim N$$

となり, この式が一意解を持つ事は明らかである. すなわちある t_0 でどっ質点かが $|\sigma_i|=\bar{\sigma}$ となるまで (1) は一意的解析解 $(u,\varepsilon,\sigma,\alpha)$ を持つ.

いま E 及び E_1 で全質点の集合及び $t=t_0$ で $|\sigma_i|=\bar{\sigma}$ となる質点の集合を表わす. $E-E_1$ の質点は $t=t_0$ を越えても elastic である (注. 質点にたいし, (1)b の上の式 i.e. $\sigma_i=k\varepsilon_i$, $\dot{\alpha}_i=0$ が使用される時, この質点は elastic であるという, 他の式が使用される時, plastic であるという. この時 (1) の解は勿論その付帯条件を満たしていなければならない)

問題は E_1 の質点に対し, $t>t_0$ で (1)b のいずれの関係式を使用すべきかである. E_1 の質点の個数を M とすれば状態の可能な組み合わせは 2^M 個ある. したがってこの中に

(1) (1)b の付帯条件を t_0 以後の微少時間のあいだ満足させるような elastic − plastic の組み合わせが存在するか。

(2) この組みあわせはただ一つであるか。

という事が問われなければならない。本稿で示したいのはこのいずれもが yes であるという事の証明である. 以下この事を順を追って説明する.

まず(1)$_b$ の条件をみたすような組合わせが存在したとし、その組み合わせに従って(1)の問題を $t>t_0$ で解いたとき その解にたいし $\dot{\varepsilon}_i(t_0+0)$ の符号がどうなるかを考える。このために次の方程式をみたす $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ を求める事を考える。

(2)$_a$ $$\sigma_i^* - \sigma_{i+1}^* = \dot{b}_i(t_0+0) \qquad i=1\sim N$$

ただし σ_i^* は u_i^* より次の式から決定されるとする。

(2)$_b$ $$\sigma_i^* = k\varepsilon_i^* \qquad \text{for } E-E,$$

(2)$_c$ $$\begin{cases} \sigma_i^* = k\varepsilon_i^* & \text{in } D^1_{-i} = \{u^* \in E^N ; \operatorname{sgn}[\sigma(t_0)](u_i^* - u_{i-1}^*) < 0\} \\ \sigma_i^* = (1-\xi)k\varepsilon_i^* & \text{in } D^1_{+i} = \{u^* \in E^N ; \operatorname{sgn}[\sigma(t_0)](u_i^* - u_{i-1}^*) \geq 0\} \end{cases}$$

(2)$_d$ $$\varepsilon_i^* = u_i^* - u_{i-1}^*, \qquad u_0^* = u_{N+1}^* = \cancel{\sigma_{N+1}^*} = 0$$

(1)の解が $t>t_0$ で存在すれば、その解にたいする $(\dot{u}, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma})(t_0+0)$ は問題(2)の解になっていなければならない。

<u>定理 1.</u> (2)の問題は一意解 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ を持つ。この解は

$$F_1(u^*) = \frac{1}{2}\langle \sigma^*, \varepsilon^* \rangle - \langle \dot{b}(t_0+0), u^* \rangle \qquad \left(\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \beta_i \right)$$

を付帯条件(2)$_b$~(2)$_d$ のもとで最小化するものとして求まる。

<u>証明</u> $F^i \equiv \frac{1}{2}\sigma_i^* \cdot \varepsilon_i^* - \dot{b}_i(t_0+0)u_i^*$ とすると F^i は u^* に関する C^1 クラスの関数であり、従って $F_1 = \sum_{i=1}^{N} F^i$ も C^1 クラスである。

i) E$_1$の点について、D^1_{-i} では $\sigma_i^* \cdot \varepsilon_i^* = k(\varepsilon_i^*)^2$ であるから、D^1_{-i} では

(3)$_a$ $$\partial F^i / \partial u_p^* = \sigma_i^* \cdot \partial \varepsilon_i^* / \partial u_p^* - \dot{b}_i(t_0+0)\delta_{ip}$$

同様に、D^1_{+i} では次式が成立する。

(3)$_b$ $$\partial F^i / \partial u_p^* = (1-\xi)k\varepsilon_i \cdot \partial \varepsilon_i^* / \partial u_p^* - \dot{b}_i(t_0+0)\delta_{ip} = \sigma_i^* \cdot \partial \varepsilon_i^* / \partial u_p^* - \dot{b}_i(t_0+0)\delta_{ip}$$

ところが σ_i^* は D_i^1 と D_{i+1}^1 との境界上では連続であるから F^1 は C^1 である. 次に, $0 \leq \xi < 1$ であるから $F_1(u^*)$ は下に有界であり, 従って最小点を持つが, これは同時に停留点にもなっている. ところが, u^* が F_1 の停留点であれば $(3)_a$, $(3)_b$ より $\sigma^* = \sigma^*(u^*)$ は

$$\partial F_1 / \partial u_i^* = \sigma_i^* - \sigma_{i+1}^* - \dot{b}_i(t_0+0) = 0$$

をみたさねばならない. したがって問題(2)の解が存在するという事が証明された. 同時に, 問題(2)の解 u^* は $F_1(u^*)$ の停留点になっているという事もわかる. したがって(2)の解の一意性を示すには $F_1(u^*)$ の停留点の一意性を示せばよい. このために, E_1 の点に対応して超平面 $\Pi_i = \{u^* \in E^N ; \mathrm{sgn}(\sigma(t_0))(u_i^* - u_{i-1}^*) = 0\}$ を考え, これらの超平面による E^N の分割を $\{R_j\}$ とする. 各 $\overline{R_j}$ ではすべての質点について σ_i^* と ε_i^* との関係は一定であり, またここでは $F_1(u^*)$ は正定値2次形式であって, その停留点が存在してもたかだか一つである. さて, E^N 内に $F_1(u^*)$ の停留点がただ一つだという事を示す. $\underline{u}^* \in R_i$ と $u^* \in R_j$ $(i \neq j)$ 2つあるとする. 直線

$$l :\ \underline{u}^* + t(u^* - \underline{u}^*) \qquad t \in [0,1]$$

を考える. t が 0 から 1 へと動くとき, l はすくなくとも2つの $\{R_j\}$ 内の領域を通過する. この直線上, すなわち, $f(t) = F_1(\underline{u}^* + t(u^* - \underline{u}^*))$ は各領域内では退化しない2次式であり, $[0,t]$ で C^1 クラスである. したがって $\underline{u}^*$ が $F_1(u^*)$ の停留点,

したがって u^* を含む $\{R_j\}$ のある領域内での最小点であれば，$f(t)$ は [0,1]で t の狭義の増加関数とならなければならない。これは u^* が別の停留点という仮定に反する。（定理1の証明終）

$(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ を (2) の解とする。E_1 の点にたいし $\mathrm{sgn}[\sigma(t_0)](u_i^* - u_{i-1}^*)$ の符号が従って判明する。E_1 の点~~にたいし~~を，この符号が負又は非負に従って，elastic 又は plastic に分類する。（この分類はさしあたりこの段階では仮の分類である）この分類で elastic となったものを E_1^e，plastic となったものを E_1^p とする。$t=t_0$ で設定された次の初期値問題を考えよう。

(4)a $$\sigma_i - \sigma_{i+1} = b_i(t) \qquad i = 1 \sim N$$

(4)b $$\begin{cases} \dot\sigma_i = k\dot\varepsilon_i & \dot\alpha_i = 0 \quad \text{for } E - E_1^p \\ \dot\sigma_i = (1-\xi)k\dot\varepsilon_i & \dot\alpha_i = \dot\sigma_i \quad \text{for } E_1^p \end{cases}$$

(4)c $$\varepsilon_i = u_i - u_{i-1}, \quad (u,\sigma,\alpha)(t_0) = (u,\sigma,\alpha)(t_0-0), \text{ etc.}$$

<u>補題2.</u> 初期値問題(4)は一意解を持つ。又，その解に対し $(\dot u, \dot\sigma, \dot\varepsilon)(t_0+0) = (u^*, \sigma^*, \varepsilon^*)$（= (2)の解）が成立する。

<u>証明.</u> (4)a 及び(4)cの第一式 の両辺を形式的に微分すると問題(4)は $(\dot u, \dot\varepsilon, \dot\sigma, \dot\alpha)$ に関する方程式となる（これを今問題(4)$'$ とする）が $0 \le \xi < 1$ という条件より (4)$'$ は明らかに一意解を持つ。この解を積分したものが(4)の一意解である。一方，(2)の解 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ は E_1^p の作り方からいって $t=t_0+0$ での (4)$'$ の解になっている。しかし (4)$'$ の解

は $t=t_0+0$ においても一意的に定まるから補題が成立する．

E_1^p の節点のうち，(4) の解が $\dot{\varepsilon}_i(t_0+0)=0$ となるもの全体を E_2 で表わす．E_2 が空集合であれば E_1^e，E_1^p の点は t_0 以後 $(1)_b$ の条件をみたすように，すくなくともある微少時間のあいだは動く．したがって我々が行った E_1 の分類は正しかったことがわかり，E の点の t_0 以後の状態が完全に定まって，問題(1)の解が $t=t_0$ を越えて接続される．しかし E_2 が空集合でない場合には E_2 に属す点の t_0 以後の状態はまだ不明であり，$\dot{\varepsilon}_i(t_0+0)$ だけでは推定できない．又 E_2 の t_0 以後の状態の定め方によっては，すでに定まった E_1-E_2 の点の状態にも影響があるかもわからないが，この可能性は否定される．次の補題は重要である．

<u>補題3.</u> E_2 が空集合でないとき，E_2 の節点の全部又は一部を E_1^e に入れ，新しい E_1^p に関して問題(4)を解いたとする．このとき一意解 $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ が $t>t_0$ で存在するが，$(\dot{u},\dot{\varepsilon},\dot{\sigma})(t_0+0)$ は再び(2)の解 $(\dot{u}^*,\dot{\varepsilon}^*,\dot{\sigma}^*)$ に等しい．すなわち，$(\dot{u},\dot{\varepsilon},\dot{\sigma})(t_0+0)$ は E_2 の節点の t_0 以後の状態 (elastic or plastic) の選定とは独立に決定される．

<u>証明.</u> 補題2により E_2 の節点に対しては $\dot{\varepsilon}_i^*=0$ が成立する．したがって(2)の解 $(\dot{u}^*,\dot{\varepsilon}^*,\dot{\sigma}^*)$ は新しい E_1^p に関する次の方程式の

解でもある。（$t=t_0+0$ における）

(5)$_a$ $\quad \dot\sigma_i - \dot\sigma_{i+1} = \dot b_i(t) \qquad i=1\sim N$

(5)$_b$
$$\begin{cases} \dot\sigma_i = k\dot\varepsilon_i & \text{for } E-E_1^p \\ \dot\sigma_i = (1-\xi)k\dot\varepsilon_i & \text{for } E_1^p \end{cases}$$

(5)$_c$ $\quad \dot\varepsilon_i = \dot u_i - \dot u_{i-1} \qquad$ etc.

この問題は一意解を持ち (4) ー新しい E_1^p に関するーの解の導関数と一致するから補題が成立する。

E_2 が空集合でないとき それに属す点の t_0 以後の状態を定めるには $\ddot\varepsilon_i(t_0+0)$ を推測できればよい。これには上に使った論法をくり返せばよい。すなわち、その手順は次のとおり。

(1) E_2の点にたいしても (1)$_b$ の条件を t_0 以後みたすような状態の組み合せがあったとして、そのとき $\ddot u(t_0+0)$ が従うべき方程式を考える。未知数を $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ とする。

(2) 上の方程式が一意解を持つという事を最小化問題に帰着させて示す。

(3) 上の方程式の解にたいし、$\mathrm{sgn}(\sigma_i(t_0))\varepsilon_i^*$ の正負に従って E_2 を分類し、その分類に従って (4) に相当する初期値問題を解く。解を $(u,\varepsilon,\sigma,\alpha)$ とする。

(4) $(u^*,\varepsilon^*,\sigma^*) = (\ddot u,\ddot\varepsilon,\ddot\sigma)(t_0+0)$ を示す。

(5) E_2 の点で $\varepsilon_i^*=0$ となるものがあっても、$(\ddot u,\ddot\varepsilon,\ddot\sigma)(t_0+0)$ はそれらの点の t_0 以後の状態とは独立に定められることを示す。

多軸の場合の一般論を述べるときの都合上，この論法を一般化しておこう。 いま質点の集合 Ξ_{k+1} ($k\geq 1$) があって，それは空集合であるか，又は空集合でなければ次の条件をみたすとする。

(A) E のすべての点について，その t_0 以後の状態が指定されており，その指定に従って $\sigma-\varepsilon$ 関係を選んで方程式

$$\sigma_i - \sigma_{i+1} = b_i(t) \qquad i=1\sim N$$

を $t\geq t_0$ において解く。その解を (u,ε,σ) とすれば

$$\frac{d^l}{dt^l}(u_i,\varepsilon_i,\sigma_i)(t_0+0) \qquad \forall i,\ (\forall l\leq k)$$

は Ξ_{k+1} の t_0 以後の状態とは独立に定まる。

(B) $\Xi_1 - E_{k+1}$ の点にたいしては，その点に依存した n_i ($1\leq n_i \leq k$) があって，$\frac{d^l}{dt^l}\varepsilon_i(t_0+0)=0$ ($1\leq \forall l < n_i$)，$\varepsilon_i^{(n_i)} = \frac{d^{n_i}}{dt^{n_i}}\varepsilon_i(t_0+0)\neq 0$ であり，その点の t_0 以後の状態は $\mathrm{sgn}[\sigma(t_0)]\,\varepsilon_i^{(n_i)}$ が負のとき elastic 正のとき plastic と指定されている。

(C) E_{k+1} の点にたいしては $\frac{d^l}{dt^l}\varepsilon_i(t_0+0)=0$ ($1\leq \forall l\leq k$) である。

$k=1$ のとき上に定義した E_2 はこれらの条件をみたしている。すなわち，$E-E_1$ の点は elastic，E_1 の点は $\mathrm{sgn}(\sigma(t_0))\,\dot{\varepsilon}_i$ の正負に従ってその状態を指定した。この指定に従って問題(4)を解き，その解 (u,ε,σ) にたいして補題3が成立した。したがって(イ)が成立する。E_2 は Ξ_1 のうち $\dot{\varepsilon}_i(t_0+0)=0$ となるもの

であったから(B), (C)が成立する.

さて, E_{k+1}が空集合でないとき, それに属す点のt_0以後の状態はまだ仮に指定してあるだけであって確定したものではない. これは次の手続きで定められる. (推定される)

[1st step] 次の方程式をみたす$(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$を求める.

$$(6)_a \qquad \sigma_i^* - \sigma_{i+1}^* = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} b_i(t_0+0) \qquad i=1\sim N$$

$$(6)_b \qquad \begin{cases} \sigma_i^* = k\varepsilon_i^* & (E-E_{k+1} \text{ の elastic point に対して}) \\ \sigma_i^* = (1-\gamma)k\varepsilon_i^* & (\quad \text{〃} \quad \text{plastic point} \quad \text{〃} \quad) \end{cases}$$

E_{k+1}に対しては

$$(6)_c \qquad \begin{cases} \sigma_i^* = k\varepsilon_i^* & \text{in } D_- = \{u^* ; \operatorname{sgn}(\sigma_i(t_0))\varepsilon_i^* < 0\} \\ \sigma_i^* = (1-\gamma)k\varepsilon_i^* & \text{in } D_+ = \{u^* ; \operatorname{sgn}(\sigma_i(t_0))\varepsilon_i^* \geqq 0\} \end{cases}$$

$$(6)_d \qquad \varepsilon_i^* = u_i^* - u_{i-1}^* \qquad (u_0^* = u_{N+1}^* = \cancel{\sigma_{N+1}^*} = 0).$$

<u>補題4.</u> 問題(6)の解は一意的に存在し, 解u^*は次の汎関数の最小化点として求められる。((6)$_b$~(6)$_d$の条件下での)

$$F_{k+1}(u^*) = \frac{1}{2}\langle \sigma^*, \varepsilon^* \rangle - \langle \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} b(t_0+0), u^* \rangle$$

[2nd step] (6)の解$(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$を使い$E_{k+1}$を次のように分類する. $E_{k+1}^e = \{E_{k+1}$の点であって, $\operatorname{sgn}(\sigma(t_0))\varepsilon_i^* < 0\}$, $E_{k+1}^p = \{E_{k+1}$の点であって, $\operatorname{sgn}(\sigma(t_0))\varepsilon_i^* \geqq 0\}$. 前者に属す点を仮に elastic, 後者のそれを plastic と新しく仮定呼ぶ. この分類に関して次の方程式を解く. その解を(u, ε, σ)としよう. (勿論$t > t_0$で考える).

$(7)_a$ $\qquad \sigma_i - \sigma_{i+1} = b_i(t) \qquad i = 1 \sim N$

$(7)_b$ $\begin{cases} \dot{\sigma}_i = k\dot{\varepsilon}_i & E - E_{k+1} \text{ の elastic point 及び } E_{k+1}^{e} \text{ に対し.} \\ \dot{\sigma}_i = (1-\xi)k\dot{\varepsilon}_i & E - E_{k+1} \text{ の plastic point 及び } E_{k+1}^{p} \text{ に対し} \end{cases}$

$(7)'_c$ $\qquad \varepsilon_i = u_i - u_{i-1} \qquad (u_0 = u_{N+1} = 0,\ u(t_0+0) = u(t_0-0) \text{ etc.})$

<u>補題5.</u> (6)の解$(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$と(7)の解$(u, \varepsilon, \sigma)$に関し次が成立。

(a) $\dfrac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}(u, \varepsilon, \sigma)(t_0+0) = (u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$

(b) $\dfrac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}(u, \varepsilon, \sigma)(t_0+0)$は、$E_{k+1}^{p}$の点であって$\varepsilon_i^* = 0$となるものの$t_0$以後の状態とは独立に決定される.

補題4と補題5はそれぞれ補題2、補題3と全く同様に証明される。そこで、補題5におけるE_{k+1}^{p}の点であって、$\varepsilon_i^* = 0$となるもの全体をE_{k+2}と定義する. E_{k+2}は空集合であるか、又は空集合でなければ前述の(A),(B),$\overbrace{\text{(C)}}^{k \to k+1 として}$を満たす. なぜならば

(A)は、k次以下の導関数の値は、$E_{k+2} \subset E_{k+1}$であるから仮定(A)によってE_{k+2}のt_0以後の状態とは独立であり、$k+1$次のそれは補題5の(b)によって同じく独立であることより従う.

(B)は、$E_1 - E_{k+1}$の点については、t_0以後の状態の指定は前と同じであるが、仮定(A)及び$E_{k+2} \subset E_{k+1}$より(B)の条件を満たすように指定されている. 又E_{k+1}の点に対しては補題5の(a)より同様に指定されている.

(C)は補題5の(a)及びE_{k+2}の定義より明らかである.

[3rd step]　E_{k+2} が空集合であればすべて終り．空集合でなければ同様の手続きで E_{k+3} が空となるかどうかを調べる．

もしこのサイクルが有限の k で終らないという事が仮にあったとき，そのような点の t_0（全体を E_∞ とする）以後の状態は plastic という事にする．なぜならばこの様に指定しておけば，ともかくすべての E の点にたいし t_0 以後の状態の指定が終った事になるが，この $\sigma-\varepsilon$ 関係によって問題 $(1)_a$ を $t>t_0$ で解けば，すべての点が $(1)_b$ の条件を満たし，特に E_∞ の点は $\dot{\varepsilon}_i \equiv 0$ を満たし $(1)_b$ の2番目の条件に合っているからである．

以上により我々の最初の目的，すなわち E_1 の点のすべてに対し $t>t_0$ での状態を決定するという事が達成された．2^n 個の elastic－plastic の組み合わせの内，物理的に許容出来る組み合わせ，すなわち $(1)_b$ をみたすものがたしかに存在する．このようなものがただ1つしか存在しないという事は(1)の解が一意であるという事からわかる．（一意性の証明は省略）．

2．平面応力問題

当初の目的であった多軸の場合について考えよう．話を簡単にするために，平面応力問題を区分的一次の有限要素を使って近似した離散系をとり上げる．前述の一軸の場合と異なるのは ε にあたるものが σ と α の非線型関数になっており，最小化

問題の汎関数の形が導関数の階数に応じて異るという事である。 Ωを平面内の多角形領域とし，Ωは要素と呼ばれる三角形から構成されているとする。$\{\varphi_p\}$をこの分割に対応した区分的一次の通常の有限要素basisとし，変位を

$$u_i(t) = \sum_{p \in P} u_i^p(t)\, \varphi_p(x) \qquad (i = 1, 2)$$

の形で近似する。Pは三角形の頂点であって，そこでは変位境界条件（はu=0とする）が与えられていないものの全体を表わす。 $u_i^p(t)$は次の式より決定される。

(1)$_a$
$$\sum_{j=1}^{2} (\sigma_{ij}, \varphi_{p,j})_{L^2(\Omega)} = (b_i, \varphi_p)_{L^2(\Omega)} \qquad p \in P$$

(1)$_b$
$$\begin{cases} \dot{\sigma} = D\dot{\varepsilon}, \quad \dot{\alpha} = 0 & \text{if } f(\sigma-\alpha) < \bar{\sigma} \text{ or } f(\sigma-\alpha) = \bar{\sigma} \;\&\; \partial f^t \dot{\sigma} < 0 \\ \dot{\sigma} = (D - D')\dot{\varepsilon}, \quad \dot{\alpha} = (\sigma-\alpha)\dfrac{\partial f^t \dot{\sigma}}{f} & \text{if } f(\sigma-\alpha) = \bar{\sigma} \;\&\; \partial f^t \dot{\sigma} \geq 0 \end{cases}$$

ただし， $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$，$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$，$\alpha = (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12})$ $(\sigma_{12} = \sigma_{21})$，$f(\sigma) = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2$，$D' = D\partial f \partial f^t D / (Z + \partial f^t D \partial f)$ $(Z > 0$, 定数$)$，$\partial f = (\partial f/\partial\sigma_{11}, \partial f/\partial\sigma_{22}, \partial f/\partial\sigma_{12})$ etc である。

さて，u_iは要素上1次式であるから，$(\varepsilon_{11} = u_{1,1}$ $\varepsilon_{22} = u_{2,2}$ $\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1})$ で定義されているεは要素上定数となる。従って(1)$_b$から定められるσ, αも各要素上で定数となりtだけの関数である。 我々の問題はb_iに区分的解析性を要求して(1)をみたす$(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$を初期条件$(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)(0) = 0$のもとで求める事である。

$\sigma - \varepsilon$関係が(1)$_b$の第一式（第二式）をみたすとき，その

要素は elastic (plastic) であると呼ぶ。一軸の場合と同じくある時刻 $t=t_0$ である要素が $f(\sigma)=\bar{\sigma}$ を満たすまでは，すべての要素は elastic である。この条件をみたす要素全体の集合を E_1 とし $t>t_0$ で E_1 の要素が elastic となるか plastic となるかを問題としよう。一軸の場合の $\dot{\varepsilon}$ にあたるものはこの問題では $\partial f^t\dot{\sigma}$ であるが，$\partial f^t\dot{\sigma}|_{t_0+0}$ が，又はその符号が定まるかどうかをまず考えねばならない。ところが $t>t_0$ では

$$\partial f^t\dot{\sigma} = \partial f^t D\dot{\varepsilon} \quad \left(\partial f^t D\dot{\varepsilon}\left[1-\frac{\partial f^t D\partial f}{\lambda+\partial f^t D\partial f}\right]\right) \quad \text{if elastic (plastic)}$$

であるから $\partial f^t\dot{\sigma}$ の正負と $\partial f^t D\dot{\varepsilon}$ の正負は対応している。この事を考慮して，一軸の場合の問題(2)に対応する次の方程式を考える。

$$(2)_a \qquad \sum_j(\sigma^*_{ij}, \varphi_{p,j}) = (\dot{b}_i(t_0+0), \varphi_p) \qquad p\in P$$

$$(2)_b \qquad \sigma^* = D\varepsilon^* \qquad \text{for } E-E_1$$

$$(2)_c \qquad \left.\begin{cases} \sigma^* = D\varepsilon^* & \text{in } D_- = \{u^*;\ \partial f^t D\varepsilon^* < 0\} \\ \sigma^* = (D-D')\varepsilon^* & \text{in } D_+ = \{u^*;\ \partial f^t D\varepsilon^* \geq 0\} \end{cases}\right\} \text{for } E_1$$

$$(2)_d \qquad \varepsilon^*_{11} = u^*_{1,1} \quad \varepsilon^*_{22} = u^*_{2,2} \quad \varepsilon^*_{12} = u^*_{1,2} + u^*_{2,1}$$

$$(2)_e \qquad u^*_i = \sum_{p\in P} \overset{(*)}{u}{}^p_i\, \varphi_p \;, \qquad (\,D' = D'(t_0+0)\,)$$

勿論(1)の解が $t>t_0$ で存在すればその解にたいする $(\dot{u},\dot{\varepsilon},\dot{\sigma})(t_0+0)$ が(2)の解 $(u^*,\varepsilon^*,\sigma^*)$ になっている。前と同じく

<u>定理 6.</u> (2)の問題は一意解 $(u^*,\varepsilon^*,\sigma^*)$ を持つ。この解は

$$F_1(u^*) = \frac{1}{2}(\sigma^*,\varepsilon^*)_{L^2(\Omega)} - (\dot{b}(t_0+0), u^*)_{L^2(\Omega)}$$

を付帯条件$(2)_b$〜$(2)_e$のもとで最小化するものとして求まる.

<u>証明</u>　定理1の証明と原理的には全く同様にやればよい。

$F_1(u^*)$の正定値性はKornの不等式及び$\varepsilon>0$より従う.

$(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$を(2)の解とする．$E_1$の要素に対しては$\partial f^{t} D\varepsilon^{*}$の$t=t_0+0$での符号が定まる．この符号が負又は非負に応じて$E_1$の要素をelasticな又はplasticなにわける．（勿論,仮の分類である）前者の集合をE_1^e，後者をE_1^pとし，$t=t_0+0$で次の初期値問題を解く.

$(3)_a$
$$\sum_j (\dot\sigma_{ij}, \varphi_{p,j}) = (\dot b_i, \varphi_p) \qquad p \in P$$

$(3)_b$
$$\begin{cases} \dot\sigma = D\dot\varepsilon & \dot\alpha = 0 & \text{for } E - E_1^p \\ \dot\sigma = (D-D')\dot\varepsilon & \dot\alpha = (\sigma-\alpha)\dfrac{\partial f^{t}\dot\sigma}{f} & \text{for } E_1^p \end{cases}$$

$(3)_c$
$$\dot\varepsilon = \varepsilon(\dot u)$$

<u>補題7</u>. 初期値問題(3)は解析的な解$(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$を$t_0$の近傍で一意的に持ち，$(\dot u, \dot\varepsilon, \dot\sigma)(t_0+0) = (u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$が成立する.

<u>証明</u>　$(3)_a$の両辺を微分した式$(3)_a'$と$(3)_b$，$(3)_c$を併せたものを$(3)'$とする．$(3)_b$の$\dot\sigma-\dot\varepsilon$関係式を$(3)_a'$に代入すれば$(3)_a'$は$\dot u$に関して解く事ができる($\dot u = \dot u(\sigma, \alpha, t)$という形で求まる)．従って$(3)'$は実質的には次の形の微分方程式と考えてよい。

$$\frac{d}{dt}(\sigma, \alpha) = X(\sigma, \alpha, t)$$

ここでXは，すくなくともt_0の近くでは解析的であるからこ

の方程式は t_0 の近くで解析解を持つ. この解より $\dot{u} = \dot{u}(\sigma, \alpha, t)$ を定めそれを積分したものが(3)の解 $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ である. また, $t = t_0 + 0$ では次の方程式が成立している.

$$(4)_a \qquad \sum_j (\dot{\sigma}_{ij}, \varphi_{pj}) = (\dot{b}_i, \varphi_p) \qquad p \in P$$

$$(4)_b \qquad \begin{cases} \dot{\sigma} = D\dot{\varepsilon} & \text{for } E - E_1^p \\ \dot{\sigma} = (D - D')\dot{\varepsilon} & \text{for } E_1^p \end{cases}$$

この式は(2)の解 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ が満たしているが, (4)の解は一意的 ($(\dot{u}, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma})$ について) であるから補題が成立する.

E_1^p の要素のうち $\partial f^t D \dot{\varepsilon}(t_0+0) = 0$ となるもの全体を E_2 とする. E_2 が空集合であれば $t > t_0$ での状態はすべて決定されている. なぜならば, $E - E_1$ の要素については問題ないが, E_1 についても, E_1^e にたいしては $f^2(\sigma) - f^2(\sigma(t_0)) = 2\int_{t_0}^{t} f(t)\, \partial f^t \dot{\sigma}\, ds < 0$, E_1^p にたいしては, $\partial f^t \dot{\sigma} = \partial f^t D \dot{\varepsilon}(1-\theta) > 0$ かつ $f(\sigma - \alpha) = \bar{\sigma}$ が t_0 後の微小時間のあいだは成立するので, 先の E_1 の分類は正当であった事がわかるからである. E_2 が空でないときは一軸の場合と同様 $\frac{d}{dt}(\partial f \dot{\sigma})\Big|_{t_0+0}$ の符号を推定しなければならない。この際にも補題3に相当する次の事実が成立する.

<u>補題8.</u> E のすべての要素について $(\dot{u}, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma}, \dot{\alpha})(t_0+0)$ は E_2 の t_0 以後の状態と独立に決定される.

<u>証明</u> E_2 の要素の全部又は一部を E_1^e に入れ, 新しい E_1^p に対し

て問題(4)を考える．$\underbrace{}_{\text{(それを(4)'とする)}}$ E_2の要素に対しては$D'\varepsilon^* = \dfrac{D\partial f \partial f^t D\varepsilon^*}{2\tau + \partial f^t D \partial f} = 0$であるから，問題(2)の解$(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$はこの新しい$E_1^p$にたいする(4)'の解にもなっている。(4)'の解は一意であるが，(4)'は，新しいE_1^pで問題(3)を考えたとき，$t = t_0+0$で$\overbrace{(\dot u, \dot\varepsilon, \dot\sigma)}^{\text{その解にたいする}}$が満たすべき方程式である．したがって$(\dot u, \dot\varepsilon, \dot\sigma)(t_0+0) = (u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$が成立．$\dot u$は$\dot\sigma$が定まれば定まるので補題が成立する．

この補題により，$E-E_2$の要素はt_0以後$(1)_b$の付帯条件を満たすように振舞う事が保障されたので，それ等については考える必要がなくなった。さて，E_2の要素に対してはt_0以後の状態をどう仮定して問題を解いてみても，常に$\partial f^t \dot\sigma \big|_{t_0+0} = 0$であるから，適当な状態を仮定すれば，elastic要素にたいしては$\dfrac{d}{dt}(\partial f^t \dot\sigma)\Big|_{t_0+0} < 0$，plastic要素にたいしては$\dfrac{d}{dt}(\partial f^t \dot\sigma)\Big|_{t_0+0} \geqq 0$と出来るかどうかを検討する以外にはない。$E_2$においては$t = t_0+0$で

$$\frac{d}{dt}(\partial f^t \dot\sigma) = \frac{d}{dt}\left[\partial f^t D \dot\varepsilon (1-\theta)\right] = \frac{d}{dt}(\partial f^t D \dot\varepsilon)\cdot(1-\theta) \quad (0 \leqq \theta < 1)$$

であるから，次の問題をまず考えよう．

$$(5)_a \qquad \sum_j (\sigma^*_{ij}, \varphi_{p,j}) = \left(\frac{d^2}{dt^2} b_i(t_0+0), \varphi_p\right) \qquad p \in \underline{P}$$

$$(5)_b \quad \begin{cases} \sigma^* = D\varepsilon^* & E-E_2 \text{ の elastic 要素} \\ \sigma^* = \left\{(D-D')\varepsilon^* - \dfrac{d}{dt}(D')\cdot\dot\varepsilon\right\}_{t_0+0} & E-E_2 \text{ の plastic 要素} \end{cases}$$

E_2の要素に対しては

$$(5)_c \quad \begin{cases} \sigma^* = D\varepsilon^* & \text{in } D_- = \{u^* ; [\partial f^t D \varepsilon^* + \frac{d}{dt}(\partial f^t) D \dot{\varepsilon}]_{t_0+0} < 0\} \\ \sigma^* = \{(D-D')\varepsilon^* - \frac{d}{dt}(D')\cdot\dot{\varepsilon}\}_{t_0+0} & \text{in } D_+ = \{u^* ; [\partial f^t D \varepsilon^* + \frac{d}{dt}(\partial f^t) D \dot{\varepsilon}]_{t_0+0} \geq 0\} \end{cases}$$

$$(5)_d \quad \varepsilon^*_{11} = u^*_{1,1} \qquad \varepsilon^*_{22} = u^*_{2,2} \qquad \varepsilon_{12} = u^*_{1,2} + u^*_{2,1}$$

補題9　問題(5)は一意解$(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$を持つ．$u^*$は次の汎関数の最小化点（$(5)_b \sim (5)_d$の条件下での）として求められる．

$$F_2(u^*) = \frac{1}{2}(\sigma^*, \varepsilon^*)_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}(\theta_2, \bar{\varepsilon})_{L^2(\Omega)} - \left(\frac{d^2}{dt^2} b(t_0+0), u^*\right)_{L^2(\Omega)}$$

ただし，$\theta_2 = \left(\frac{d}{dt}(D')\dot{\varepsilon}\right)_{t_0+0}$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{cases} 0 \ (\text{resp. } \varepsilon^*) & E - E_2 \text{ の elastic (resp. plastic) 要素に対し.} \\ \left.\begin{array}{ll} \varepsilon^*_0 & \text{in } D_- \\ \varepsilon^* & \text{in } D_+ \end{array}\right\} & E_2 \text{ の要素に対し.} \end{cases}$$

ε^*_0 ;　$[\partial f^t D \varepsilon^* + \frac{d}{dt}(\partial f^t) D \dot{\varepsilon}]_{t_0+0} = 0$ の任意の解.

証明　まず$F_2(u^*)$がu^*の関数として連続であること．$E - E_2$の要素上での積分に関しては明らかであるが，E_2の要素上ではこれは

$$F_e \equiv \frac{1}{2}(\sigma^*, \varepsilon^*)_e - \frac{1}{2}(\theta_2, \bar{\varepsilon})_e - \left(\frac{d^2}{dt^2} b(t_0+0), u^*\right)_e$$

であるが，これが不連続を生じ得るのは超平面 π_e ; $[\partial f^t D \varepsilon^* + \frac{d}{dt}(\partial f^t) D \dot{\varepsilon}]_{t_0+0} = 0$ 上だけである．ところが $t = t_0+0$ では

$$(6) \quad D'\varepsilon^* + \frac{d}{dt}(D')\dot{\varepsilon} = \frac{D\partial f \partial f^t D}{\ell + \partial f^t D \partial f}\varepsilon^* + \frac{D\partial f \frac{d}{dt}(\partial f^t) D}{\ell + \partial f^t D \partial f}\dot{\varepsilon}$$

$$= \frac{D\partial f}{\ell + \partial f^t D \partial f}\left(\partial f^t D \varepsilon^* + \frac{d}{dt}(\partial f^t) D \dot{\varepsilon}\right) = 0$$

であるから，σ^*はu^*の連続関数であり，F_eの不連続はその第二項からのみ生じ得る．この第二項の，超平面π_e上での不連続は$\frac{1}{2}(\theta_2, \varepsilon^*_0 - \varepsilon^*)_e$であるが，$\varepsilon^*_0$も$\varepsilon^*$も共に$\pi_e$上にあれば(6)より

$D'(\varepsilon_0^* - \varepsilon^*) = 0$ が成立し，D' が対称行列という事を考慮して

$$(\theta_2, \varepsilon_0^* - \varepsilon^*)_e = -(D'\varepsilon^*, \varepsilon_0^* - \varepsilon^*)_e = -(\varepsilon^*, D'[\varepsilon_0^* - \varepsilon^*])_e = 0$$

を得る．従って F_2 は連続である．F_2 が C^1 であること，最小化点が (5) の解になること等は一軸の場合と全く同じである．（証明終）

$(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ を (5) の解とする．E_2 の要素のうち $\left[\partial\psi^{t_0} D\dot{\varepsilon}^* + \frac{d}{dt}(\partial\psi^{t_0}) D\dot{\varepsilon}\right]_{t_0+0}$ が負となるもの $(=E_2^e)$ は elastic，非負となるもの $(=E_2^p)$ を plastic として (3) を解く（ただし勿論 E_1^p を $(E_2^p + E_1^p - E_2)$ でおきかえる）．その解を $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ とする．$(\dot{u}, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma}, \dot{\alpha})(t_0+0)$ は以前の解に対するものと同じである（補題8）．

<u>補題10</u>　$(\ddot{u}, \ddot{\varepsilon}, \ddot{\sigma})|_{t_0+0} = (u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$，さらに

$$E_3 = \left\{ 要素 \in E_2 \,;\, \left[\frac{d}{dt}(\partial\psi^{t_0} D\dot{\varepsilon})\right]_{t_0+0} = 0 \right\}$$

とすれば，すべての要素について $(\ddot{u}, \ddot{\varepsilon}, \ddot{\sigma}, \ddot{\alpha})|_{t_0+0}$ は E_3 の t_0 以後の状態と独立に定まる．

<u>証明</u>　(4) の両辺を微分し，E_1^p を $(E_2^p + E_1^p - E_2)$ でおきかえた問題（それを (4′) とする）は $(\ddot{u}, \ddot{\varepsilon}, \ddot{\sigma})$ が t_0+0 で満たすべきものである．一方 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ もこの (4)′ を満たし，その解は一意であるから前半の主張が成立する．後半は E_3 の要素に対しては $D'\varepsilon^* + \frac{d}{dt}(D)\dot{\varepsilon} = 0$ が t_0+0 で成立ので補題8と同じである．」

E_3 が空でないときはこの論法をくり返せばよい。一軸の

場合との対応は次のとおりである.

$$E_{k+1} \equiv \left\{ e \in E_k \; ; \; \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (\partial f^t D \dot{\varepsilon}) \Big|_{t_0+0} = 0 \right\}$$

$$\gamma_{k+1} \equiv \left\{ \frac{d^k}{dt^k} (\partial f^t D \dot{\varepsilon}) - \partial f^t D \frac{d^k}{dt^k} \dot{\varepsilon} \right\}_{t_0+0}$$

$$\theta_{k+1} \equiv \left\{ \frac{D \partial f}{2 + \partial f^t D \partial f} \right\}_{t_0+0} \cdot \gamma_{k+1}$$

$(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ $\overbrace{\text{を次の問題の解とする.}}^{t_0+0\text{で考えた}}$

$$(7_a) \qquad \sum_j (\sigma^*_{ij}, \varphi_{p,j}) = \left(\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} b_i, \varphi_p\right) \qquad p \in \Omega$$

$$(7)_b \begin{cases} \sigma^* = D\varepsilon^* & E - E_{k+1} \text{ の elastic elements} \\ \sigma^* = (D - D')\varepsilon^* - \theta_{k+1} & E - E_{k+1} \text{ の plastic elements} \end{cases}$$

E_{k+1} の要素に対しては

$$(7)_c \begin{cases} \sigma^* = D\varepsilon^* & \text{in } D_- = \{u^* ; \partial f^t D \varepsilon^* + \gamma_{k+1} < 0\} \\ \sigma^* = (D - D')\varepsilon^* - \theta_{k+1} & \text{in } D_+ = \{u^* ; \partial f^t D \varepsilon^* + \gamma_{k+1} \geq 0\} \end{cases}$$

<u>補題11.</u> 問題(7)は一意解 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ を持つ. この解は汎関数

$$F_k(u^*) = \frac{1}{2}(\sigma^*, \varepsilon^*) - \frac{1}{2}(\theta_{k+1}, \bar{\varepsilon}) - \left(\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} b(t_0+0), u^*\right)$$

を $(7)_b \sim (7)_c$ の条件下で最小化するものとしてえまる. ただし

$$\bar{\varepsilon} = \begin{cases} 0 \ (\text{resp. } \varepsilon^*) & E - E_{k+1} \text{ の elastic (resp. plastic) elements} \\ \left.\begin{array}{ll} \varepsilon_0^* & \text{in } D_- \\ \varepsilon^* & \text{in } D_+ \end{array}\right\} & E_{k+1} \text{ の elements} \end{cases}$$

ε_0^* は $\partial f^t D \varepsilon^* + \gamma_{k+1} = 0$ の任意の解である.

以上をまとめると次の補題となる。

<u>補題12.</u> Eの各要素にたいし $t>t_0$ での状態が一意的に定まり問題(1)は、ある $\delta>0$ に対して $(t_0, t_0+\delta)$ で解析的な解を一意的に持つ。

以上の議論が、除荷の可能性がある場合にも使用できる事は明らかである。又、u が不連続になり得るのはどの要素かの state が変わる場合のみであり、そのような t は、正の長さを持つ時間区間の左端となっているから、問題(4)に対して次の結論が成立する。区間 $I=[0,T]$ で考える。

<u>定理13.</u> 問題(4)の方程式を高々可算個の $t\in I$ を除いて満たすような絶対連続な関数 $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ が一意的に存在する。

<u>注意</u>：エネルギー不等式は動的な場合と全く同様に導かれる。

[1] Miyoshi, T. Elastic-plastic vibration of a rod, R.I.M.S. Kyoto Univ. Vol.16 No.2 (1980)

[2] 〃 On existence proof in plasticity theory, Kumamoto J. Sci. (Math.) Vol. 14, No. 1 (1980)