

Van der Corput 列に基づく 補間法の数値的安定性

名古屋大学工学部 島居 達生

1. はじめに

区間 $(0, 1)$ 上に一様分布する数列は、多く知られてゐるが Van der Corput 列は、その数列を 2 で打切) ても、分布の等間隔性 (一様性) がよいこと、その構成が 2 進法演算で正確にできることによる特長がある¹⁾。区間 $(0, 1)$ 上の Van der Corput 列を複素平面上の単位円周上に写し、これに補間点とする補間法を考える。補間多項式をべき級数で表示すると複数が 2 べきの高速 Fourier 変換の合成により手間少なくて済む。本文では、この補間法の数値的安定性について述べる。したがって Lebesgue 定数の評価が本質的な問題となる。

2 進法表示の正の整数

$$k = k_1 2^0 + k_2 2^1 + \dots + k_n 2^{n-1}, \quad k_n = 1 \quad (1)$$

長さ n ビットの k に対し, 双対写射を

$$k^* = k_1 2^{-1} + k_2 2^{-2} + \dots + k_n 2^{-n}, \quad n \geq 1$$

$$0^* = 0, \quad n = 0$$

で定義する. $\{k^*\}$ を Van der Corput 列という.

k が n ビットの整数のとき, k^* は正確に n ビットの小数と
なる.

例. $\{k^*\}$ の始めの部分の 2 進表示は次の通りである.

k	k の 2 進表示	k^* の 2 進表示	k^*
0	000	0.000	0
1	001	0.100	1/2
2	010	0.010	1/4
3	011	0.110	3/4
4	100	0.001	1/8
5	101	0.101	5/8

2. Van der Corput 列.

Van der Corput 列のつくり方を示す.

1) 定義にしたがい n ビットの正の整数をビット反転し
 n ビット右に桁移動し, 小数化する.

2)

$$(2k+1)^* = (1+k^*)/2, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$3) \quad (k+2^n)^* = k^* + 2^{-n-1} \\ 0 \leq k < 2^n, \quad n=0, 1, \dots$$

区間 $[0, 1)$ 上に分布する l 個の実数 $\{k^*; 0 \leq k < l\}$ を $\lambda_k = \exp(2\pi i k^*)$ によって, 複素平面上の単位円周にうつし, l 個の零点を

$$\omega_l(z) \equiv \prod_{0 \leq k < l} (z - e^{2\pi i k^*}) = \prod (z - \lambda_k) \quad (2a)$$

とすれば, これは高々 n 個の円周等分多項式の積

$$\omega_l(z) = \prod_{\nu=1, \nu \neq 0}^n (z^{2^\nu} + \lambda_l^{2^{\nu-1}}) \quad (2b)$$

ただし $l = l_1 2^0 + l_2 2^1 + \dots + l_n 2^{n-1}$, $l_n = 1$ として表すことができる²⁾.

簡単のため $\zeta = \lambda_l z$ と変数変換すれば

$$\omega_l(z) = \lambda_l^l \prod_{\nu=1, \nu \neq 0}^n (\zeta^{2^\nu} + 1) \quad (2c)$$

となる. (したがって $|\omega_l(z)|$ の最大値は $z = \lambda_l$ ($\zeta = 1$) のとき達成される. 上式より $\omega_l(z)$ の根が単位円周上一様分布することは明らかであり, Van der Corput 列の最大の特長は (2c) の表示にあるといつてよい.

補間法の数値的安定性は Lagrange 多項式

$$l_k(z) = \frac{\omega_l(z)}{(z - \lambda_k) \omega_l'(\lambda_k)}, \quad 0 \leq k < l$$

の大き士によつて支配士れる。

以下 Lagrange 多項式の幾何平均, 算術平均にうつして述べるとする。

3. Lagrange 多項式の幾何平均

単位円周上の l 個の標本値 $\lambda_k, 0 \leq k < l$ に対し l 次の Vandermonde の行列式 V_l

$$V_l(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^{l-1} & \lambda_1^{l-1} & \dots & \lambda_{l-1}^{l-1} \end{bmatrix}$$

と書けば, よく知らぬように

$$= \prod_{0 \leq i < j < l} (\lambda_j - \lambda_i).$$

また

$$V_{l+1}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l) = \omega_l(\lambda_l) V_l(\lambda_0, \dots, \lambda_{l-1}).$$

単位円周上における $\omega_l(z)$ の絶対値最大を M_l とおけば

(2c) より

$$M_r \equiv \max_{|z|=1} |\omega_r(z)| = |\omega_r(\lambda_r)| = 2^{\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k} \quad (3)$$

よって左辺は r のビット 1 の個数だけ定まる。

よって

$$\prod_{0 \leq k < r} l_k(z) = \frac{\omega_r(z)^{r-1}}{\prod_{j \neq k} (\lambda_j - \lambda_k)}$$

$$= (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \omega_r^{r-1}(z) / \prod_{j \neq k} (\lambda_j - \lambda_k)^2$$

よって Lagrange 多項式の幾何平均 $G_r(z)$

$$G_r(z) \equiv \left\{ \prod_{0 \leq k < r} |l_k(z)| \right\}^{1/r}$$

の最大値 G_r は, $z = \lambda_r$ のとき達成される

$$G_r = |G_r(\lambda_r)| = \left(M_r^{r-1} / \prod_{0 \leq k < r} M_k^2 \right)^{1/r} \quad (4)$$

が成立する。

右辺は標本数 r だけに依存するが, さらに小さく見ると
行列式 $\prod_{k=0}^{r-1} (\lambda_k - \lambda_j)$ を評価する。

よって

$$\left| \prod_{k=0}^{r-1} (\lambda_k - \lambda_j) \right| = \prod_{0 \leq k < r} M_k$$

に注意する。右辺の M_0, M_1, \dots, M_r に対し高々 n ビット
の $r+1$ 個の整数 $0 \leq k \leq r$ を $r+1$ 行 n 列の行列で表現

表示する。この長方形行列の要素は 0, 1 であり、ほぼ等しく
に分布している。1 の個数が Van der Monde 行列式の値を
決定する。長方形行列は $l+1$ 次元の列ベクトル $\begin{pmatrix} l \\ l \end{pmatrix}$ から成ると
見る。最後尾の n 列では

$$(0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \)^T$$

と分布する。0 と 1 の個数の差は、要素の総数 $l+1$ の偶奇に
依って 0, 1 と成る。これが $l = (2^0 \text{ の方が } 2^0 = 1 \text{ 個}$
だけ多い。 $n-1$ 列は $(00 \ 11 \ 00 \ 11 \ \dots \)^T$ と分布
し、 $l = \text{無関係} = 0$ の方が、 1 の方が $2^1 = 2$ 個多い。

以下同様。 l から l までの整数の 2 進表示の 1 の個数を
 $\mu(l)$ とおけば、前述したことから

$$\frac{1}{2} \{ (l+1)n - 2^{n+1} \} \leq \mu(l) \leq \frac{1}{2} (l+1)n \quad (5)$$

$$\text{ただし } n = \lceil \log_2 l \rceil + 1.$$

l の桁数だけ成るビット 1 の個数

$$\beta(l) = \sum_{v=1}^n l_v$$

や、その位置が判るとすれば、お存かし

$$l = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \dots + 2^{i_m}, \quad m = \beta(l)$$

ならば

$$\mu(\ell) = \rho(\ell) + \sum_{1 \leq k \leq \rho(\ell)} \left(\rho(\ell) - k + \frac{1}{2} \right) 2^{1-k}$$

が得られる。(証明略)

例. $\ell = 6$ ならば $6 = 2^1 + 2^2$. (したがって $\rho(6) = 2$,
 $\mu(6) = 2 + (2-1+\frac{1}{2})2^1 + (2-2+\frac{2}{2})2^2 = 2+3+4=9$.)

実際, 1 から 6 までは 2 進表示すれば

$$1, 10, 11, 100, 101, 110$$

であり, ビット1の個数は9個である.

以上の議論から次の結果を得る.

定理1. 単位円周上に分布する ℓ 個の点 $\lambda_k = e^{2\pi i k/\ell}$,
 $0 \leq k < \ell$ から作られる Lagrange 多項式の幾何平均 $G_\ell(z)$
 の単位円周上における最大値 G_ℓ は, $z = \lambda_\ell$ のとき達成される
 と

$$\bullet \quad G_\ell = 2^{\rho(\ell)(1+1/\ell)} / 2^{2\mu(\ell)/\ell}$$

と表わされる.

不等式(5)を用いて, G_ℓ の上下からの評価を得る.

系1.

$$\left(2^{\rho(\ell)-n} \right)^{1+1/\ell} < G_\ell < \left(2^{\rho(\ell)-(n-1)} \right)^{1+1/\ell}$$

l が十分大きければ

$$2^{\beta(l)-n} \lesssim G_l \lesssim 2^{\beta(l)-n+1}$$

と簡単化される。

標本数 l のビット 1 の個数は, 1 以上高々 n であるから

$$2^{-(n-1)} \lesssim G_l \lesssim 2$$

となる。左辺の不等式が成り立つのは $\beta(l) = 1$ となる

l が 2 のべき 2^{n-1} の場合であり, 右辺の不等式が成り立つ場合は $\beta(l) = n$, となる l のビットがすべて 1 のときである。 $\beta(l)$ を一定とし $2n$ を 1 増せば, となる l を $2l$ と倍加すれば, G_{2l} は G_l の約 $1/2$ となる。

以上のことを補間法の数値的安定性の立場から解釈すれば, 標本数は, それを 2 進表示したときビット 1 の個数が少なくなるように標本数が取ることが望ましい。たとえば 2 のべき, あるいはその 3 倍, 5 倍等の数である。Lagrange 多項式の幾何平均が, その次数に無関係に有界であるという事実は単位円周上の一様分布列の著しい特徴である。

4. Lagrange 多項式の算術平均。— Lebesgue 定数 —
前節に用いた l 次多項式 $\omega_l(z)$ は, 高々 $[\log_2 l] + 1$ 個の円周等分多項式の積に分解されることを述べたので, 以下

$$\omega_\ell(z) = \prod_{\nu=1, \lambda_\nu \neq 0}^n (z^{2^{\nu-1}} + 1) \quad (6)$$

と仮定する. 1) また $\nu \leq n$ Lagrange 多項式は

$$l_\lambda(z) = \frac{\omega_\ell(z)}{(z-\lambda)\omega'_\ell(\lambda)}, \quad \lambda \in \{\omega_\ell(\lambda) = 0\}$$

である. Lebesgue 関数

$$\Lambda_\ell(z) = \sum_{\lambda} |l_\lambda(z)|, \quad |z|=1$$

を単位円周上で評価することが問題である.

等間隔分布の場合, 右から $\Lambda_\ell(1) = \frac{2}{\pi} \log \ell + O(1)$ で発散することが知られている³⁾. Lebesgue 関数の最大値は等間隔分布する標本点の丁度中点で実現される.

等間隔分布する場合の標本数をあらためて N とおき, どのような関数を λ カしおとき, $\Lambda_N(z)$ とおきかえてみる. いま, $\lambda \in \{\lambda^N + 1 = 0\}$ であるから, λ カの関数として

$$\frac{|l_\lambda(1)|}{l_\lambda(1)} = \frac{|1-\lambda|}{1-\lambda} = \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

とすればよい. 平方根は正の実軸にカットを入れ上半平面の値をとるものとする. 三角関数の選定直交関係より

$$\Lambda_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{0 \leq k < N} \frac{z^k}{\sin \frac{\pi}{N}(k+\frac{1}{2})}, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{N}$$

が得られる。

任意の定積分 $\int_0^1 f(t) dt$ に対する 2^n 項の中実公式による積分を $\int_0^1 f(t) d\mu_n(t)$ で表わせば、

$$\Lambda_N(1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\lambda \sin N\theta|}{\lambda \sin \theta} d\mu_n(\theta), \quad N=2^n \quad (7)$$

と書ける。

この等間隔分布の場合を予備として、“準等間隔分布”の場合を考える。標本実は円周等分多項式 $z^{2^v} + 1$ の零点の積集合であるから Lebesgue 関数の最大値は、これらの共通の中実、たとえば $z=1$ と考えられる。直観的には殆んど明らか（実験的にも多くの例で確かめた）であるが証明できないので、本論文ではこの事実として仮定する。

再び多項式 (6) に即して考える。 $\lambda \in \{\lambda^{2^{v-1}} + 1 = 0\}$ ならば

$$\omega'_\lambda(\lambda) = \left(\prod_{k>v, \lambda_k \neq 0} 2 \cdot \prod_{k<v, \lambda_k \neq 0} (1 + \lambda^{2^{k-1}}) \right) \cdot 2^{v-1} \lambda^{2^{v-1}-1}$$

であるから Lagrange 多項式は

$$L_\lambda(z) = \frac{\omega'_\lambda(z)}{z^{2^{v-1}} + 1} \cdot \left\{ \frac{1}{2^{v-1}} \cdot \frac{z^{2^{v-1}} + 1}{1 - z\lambda} \cdot \prod_{\substack{k>v \\ \lambda_k \neq 0}} 2 \cdot \prod_{\substack{k<v \\ \lambda_k \neq 0}} (1 + \lambda^{2^{k-1}}) \right\}$$

と表わされる。ただし積 \prod_k には z の番号 k が動く集合が空ならば、この積は 1 とする。以下同様、

こゝより $\lambda = e^{it}$ とおけば

$$|\ell_\lambda(1)| = \frac{1}{2^{\nu-1} \sin \frac{t}{2}} \cdot \prod_{\substack{k < \nu \\ \lambda_k \neq 0}} \left| \cos 2^{k-1} \frac{t}{2} \right|$$

標本数 ℓ の 2 進展開を

$$\ell = 2^{p-1} + \ell_{p+1} 2^p + \dots + 2^{\nu-1} + \ell_{\nu+1} 2^\nu + \dots + 2^{n-1}, \quad p \geq 1$$

とすると

$$\sin 2^{p-1} \theta \prod_{k=p}^{\nu-1} \cos 2^{k-1} \theta = 2^{-\nu+p} \sin 2^{\nu-1} \theta$$

こゝを用いて

$$|\ell_\lambda(1)| = \frac{2^{\nu-p} \left| \sin 2^{p-1} \frac{t}{2} \right|}{2^{\nu-1} \sin \frac{t}{2}} \prod_k \left| \cos 2^{k-1} \frac{t}{2} \right|$$

ただし k の動く範囲は $p \leq k < \nu$ かつ $\lambda_k = 0$ である。

したがって

$$\begin{aligned} \sum_\lambda |\ell_\lambda(1)| &= \frac{2^{\nu-p}}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin 2^{p-1} \theta|}{\sin \theta} \prod_k |\cos 2^{k-1} \theta| d\mu_{\nu-1}(\theta) \\ &= 2^{\nu-p} \prod_k |\cos 2^{k-1} \theta_3| \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin 2^{p-1} \theta|}{\sin \theta} d\mu_{\nu-1}(\theta) \end{aligned} \quad (8)$$

こゝで積分に関する平均値の定理を用いた。 θ_3 は

$\frac{\pi}{2^\nu} < \theta_3 < \pi - \frac{\pi}{2^\nu}$ を満たす適当な値である。中身公式の標本値は $\frac{\pi}{2^{\nu-1}} (j + \frac{1}{2})$, $0 \leq j < 2^{\nu-1}$ であることが

$$\prod_k \sin 2^{k-\nu-1} \frac{\pi}{2} < \prod_k |\cos 2^{k-1} \theta_3| < \prod_k \cos 2^{k-\nu-1} \frac{\pi}{2}$$

~~中身~~ $\in C_{p,\nu}$ とおけば、これは $|\ell_\lambda(1)|$ の正数である。
中身項

ただし、次の狭く範囲が空集合でないであることに注意。

さらに簡単のため

$$f_{m,n} \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin 2^m \theta|}{\sin \theta} d\mu_n(\theta) \quad (9)$$

とおく。明らかに

$$f_{0,n} = 1, \quad n \geq 0$$

$$f_{n,n} = A_{2^n}(1), \quad f_{n-1,n} = f_{n,n} / \sqrt{2}$$

である。この計算結果を示す。

$f_{m,n}$ の数表

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7
1	1.4142						
2	1.3066	1.8478					
3	1.2815	1.6172	2.2870				
4	1.2753	1.5678	1.9288	2.7278			
5	1.2738	1.5559	1.8556	2.2408	3.1689		
6	1.2734	1.5530	1.8381	2.1438	2.5528	3.6102	
7	1.2733	1.5523	1.8338	2.1207	2.4320	2.8648	4.0514
8		1.5521	1.8327	2.1151	2.4034	2.7203	3.1768
9			1.8325	2.1136	2.3964	2.6862	3.0085
10					2.3946	2.6798	2.9689

この数値例からみると $f_{m,n}$ は、 $m, n=1$ から、 n が

は単調減少, 単調増加の傾向を示す.

以上のことから次の結果を得る.

標本数 l の 2 進表示を

$$l = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \dots + 2^{\nu_m}$$

とすると Lebesgue 定数は

$$\Lambda_l(1) = 2^{-\nu_1} \sum_{\kappa=1}^m 2^{\nu_\kappa} C_{\nu_1, \nu_\kappa} \mathcal{J}_{\nu_1, \nu_\kappa} \quad (10)$$

と表わすことができる.

上式を簡略化するための特別な場合を述べる.

1) $l = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ のとき, $\mathcal{J}_{0, \kappa} = 1$,

$C_{0, \kappa} = 1$ となるから

$$\Lambda_{2^n-1}(1) = 2^n - 1.$$

2) $l = 2^\nu + 2^{\nu+1} + \dots + 2^n$, $\nu < n$ のとき, $C_{\nu, \kappa} = 1$,

$\kappa > \nu$ となるから

$$\Lambda_{2^{n+1}-2^\nu}(1) = 2^{-\nu} \sum_{\kappa=\nu}^n 2^\kappa \mathcal{J}_{\nu, \kappa}.$$

$\nu < 1$ $l = 3 \cdot 2^{n-1}$ のとき

$$\Lambda_{3 \cdot 2^{n-1}}(1) = 2^{-(n-1)} (2^{n-1} \mathcal{J}_{n-1, n-1} + 2^n \mathcal{J}_{n-1, n})$$

$$= \mathcal{J}_{n-1, n-1} + 2 \mathcal{J}_{n-1, n}$$

$$= \Lambda_{2^{n-1}}(1) + \sqrt{2} \Lambda_{2^n}(1).$$

3) $l = 1 + 2 + \dots + 2^{\nu-1} + 2^n = 2^n + 2^\nu - 1$, $\nu \leq n$ のとき

$$\Lambda_{2^n + 2^\nu - 1}(1) = 2^\nu - 1 + 2^\nu \Lambda_{2^{n-\nu}}(1)$$

が得られる。とくに興味があるのは $2^n + 1$ のときであって

$$\Lambda_{2^n + 1}(1) = 1 + 2 \Lambda_{2^{n-1}}(1).$$

(これは $2^n - 1$ の場合と比べるより小さい。

標本数を倍々に増してゆくとき, Lebesgue 定数の漸近的増大の傾向は, 標本数 n のビットパターンによって著しく異なる。任意の 2 のべき乗と互いに素な数を基準にして, それを 2 倍にしたときの Lebesgue 定数と "階差" を求めたのが次の Lebesgue 定数表である。

標本数を 2 倍にしたときの階差は一定と存するで, 標本数を倍々に増すとき Lebesgue 定数は対数オーダーで発散する。

階差が小さい順序にビットパターン (p の 2 進表示) を列挙すれば $p = 1, 3, 5, 9, \dots$ である。いずれもビット 1 の個数 $\beta(p)$ が小さい程階差^も小さい。

これらのことは Lebesgue 定数の一般的表示 (10) から判ることはである。Lebesgue 定数の増大が対数オーダーから線形^的オーダーに変わるのは $\Lambda_{2^n - 1}(1) = 2^n - 1$ の場合である。

Lebesgue 定数表 $\Lambda_{p,2^k}$

k	2^k	Λ_{2^k}	$\Delta \Lambda$	$\Lambda_{3 \cdot 2^k}$	$\Delta \Lambda$	$\Lambda_{5 \cdot 2^k}$	$\Delta \Lambda$
0	1	1.000		3.000		3.828	
			0.414		1.027		1.211
1	2	1.414		4.027		5.039	
			0.434		1.055		1.243
2	4	1.848		5.082		6.282	
			0.439		1.063		1.253
3	8	2.287		6.145		7.535	
			0.439		1.064		1.256
4	16	2.728		7.209		8.791	
			0.441		1.065		1.257
5	32	3.169		8.274		10.048	
			0.441		1.066		1.256
6	64	3.610		9.340		11.304	
			0.441		1.065		
7	128	4.051		10.405			

k	2^k	$\Lambda_{7 \cdot 2^k}$	$\Delta \Lambda$	$\Lambda_{9 \cdot 2^k}$	$\Delta \Lambda$	$\Lambda_{11 \cdot 2^k}$	$\Delta \Lambda$
0	1	7.000		4.696		8.657	
			2.153		1.393		2.584
1	2	9.153		6.089		11.241	
			2.200		1.434		2.643
2	4	11.353		7.523		13.884	
			2.214		1.446		2.659
3	8	13.567		8.969		16.543	
			2.217		1.450		
4	16	15.784		10.419			
			2.218		1.450		
5	32	18.002		11.869			
			2.219				
6	64	20.221					

前節で述べた Lagrange 多項式の幾何平均との関連で算術平均 $A_\ell \equiv \Lambda_\ell(1) / \ell$ について $\ell \rightarrow \infty$ ならば、上界は $1/2$ 、下界は $O(\log \ell / \ell)$ である。

5. おわりに

単位円周上に分布する Vander Corput 列の中実 (前節では一例として $\alpha = 1/2$ とした) の Lebesgue 定数は最大値をとるといふ推測の下で Lebesgue 定数を探めた。この推測は杉浦洋君の数多い数値実験より生れたものである。

参考文献

- 1) L. Kuipers and H. Niederreiter: Uniform Distribution of Sequences, Chap. 2, John Wiley and Sons, Inc. (1974)
- 2) 島田達生, 長谷川武夫, 二宮幸三: 等差数列的に標本数 ε 領域を補完的自動積分法, 情報処理, Vol. 19, pp 248-255 (1973)
- 3) A. Zygmund: Trigonometric Series, vol. II, chap. 10, Cambridge at the University Press (1959), second edition.