数理解析研究所講究録
第 464 巻 1982 年 70-82

2次元Dirac方程式の経路積分について

北大 理　一瀬 孝

要旨.

時空2次元Dirac方程式の解の経路積分(path integral)表示を与える. それは熱方程式に対するFeynman-Kac公式と類似点を持つが, 構成した, 経路の空間上のmeasureは, Wiener measureとは別のものである.

§1では, Feynman経路積分及びFeynman-Kac公式について概説し, §2では, 時空2次元Dirac方程式の解の経路積分表示を与え, §3では, §2の結果の証明の概略を述べる.

§1. 序

Feynman [3, 4]は, potential $V(x)$の中で運動する質量mの粒子に対するSchrödinger方程式(Planck定数$\hbar$を1とする)

$$(1.1)\quad \begin{cases} i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = \left[-\frac{1}{2m}\Delta + V(x)\right]\varphi(t,x), & t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^3 \\ \varphi(0,x) = g(x) \end{cases}$$

の解を物理的直観から次のように書き下した：

$$(1.2)\quad \varphi(t,x) = \int e^{i\int_0^t\left[\frac{m}{2}\dot{X}(\tau)^2 - V(X(\tau))\right]d\tau} g(X(0))\,\mathcal{D}(X(\cdot)).$$

ここに，$\mathcal{D}(X(\cdot))$ は時刻0に$\mathbb{R}^3$のある点$X(0)$を出発し時刻tにxに至る経路$X(\tau)$達の空間上の一様"測度"であって，形式的には，

$$\mathcal{D}(X(\cdot)) = \prod_{0\le\tau\le t} dX(\tau)$$

である．これが Feynman 経路積分である．数学的には，(1.2)の"積分"及び"測度"$\mathcal{D}(X(\cdot))$の意味が曖昧で，事実このような一様測度は存在しない．しかし，この表示は，捨て難たき美しさを持ち，形式的な議論によってではあるが，色々なことを直接説明する威力を持っているので，今日まで多くの数・物理学者の興味を引いてきた．

Feynman 経路積分の数学的定式化の問題は，$\mathcal{D}(X(\cdot))$ が経路の空間上の一様測度としては存在し得ないので，(1.2)の適当な近似であって極限に於て表示(1.2)を回復していると見られるようなものを考えることになる．例えば，Trotter 積公式を用いる方法（Nelson [9]），Feyman-Kac 公式からの解析接続による方法（Nelson [9]），一般化された複素測度

による方法（K. Itô [7]）又は，Fresnel 積分による方法（Albeverio & Høegh-Krohn [1]），有限次元振動積分による近似（Fujiwara [5]）は，このような考え方に基いている．他方，Brown運動の微分の2次の汎関数を用いるStreit-Hida [10] は，経路積分としての測度を特に意識したものである．

さて，(1.1)，(1.2) に於て，所謂Euclid化と云う手続 $dt \to (-i)dt$ を施せば，Schrödinger 方程式 (1.1) は，熱方程式

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = \left[\frac{1}{2m}\Delta - V(x)\right]\varphi(t,x) \\ \varphi(0,x) = g(x) \end{cases}$$

に移り，"積分"(1.2) は，

$$(1.4)\qquad \varphi(t,x) = \int e^{-\int_0^t \left[\frac{m}{2}\dot{X}(\tau)^2 + V(X(\tau))\right]d\tau} g(X(0)) \prod_{0\le\tau\le t} dX(\tau)$$

に移る．もし，(1.4) に於て，連続ではあるが微分不可能な経路 $X(\tau)$ を主に考慮しなければならないとすれば，$e^{-\int_0^t \frac{m}{2}\dot{X}(\tau)^2 d\tau} = 0$ と考えられるので，$\prod_{0\le\tau\le t} dX(\tau)$ の ∞ と合わせたものを考えれば，経路の空間上の真の測度が構成されるのではないか．事実これは可能であって，こうして作られたものが Brown運動の経路の空間上の Wiener measure $\mu_{t,x}$ であり，それを用いると，(1.3) の解は，

$$(1.5)\qquad \varphi(t,x) = \int_{C([0,t];\mathbb{R}^3),\, X(t)=x} e^{-\int_0^t V(X(\tau))d\tau} g(X(0))\; d\mu_{t,x}(X)$$

と exact に表示することができる．これは，ふつう Feynman-Kac 公式（[8]）と呼ばれている次式

$$(1.6)\qquad \varphi(t,x)=\int_{C([0,t];\mathbb{R}^3),\ X(0)=x} e^{-\int_0^t V(X(\tau))\,d\tau}\, g(X(t))\, d\mu_{0,x}(X)$$

とは，少し異なるが，その一種と見なすことができる．

(1.3) の $V(x)$ が t-dependent のとき（$V(t,x)$ のとき），(1.5) は，$\int_0^t V(X(\tau))\,d\tau$ を $\int_0^t V(\tau,X(\tau))\,d\tau$ とおき換えれば，(1.3) の解を与えるが，(1.6) では，$\int_0^t V(X(\tau))\,d\tau$ を $\int_0^t V(t-\tau, X(\tau))\,d\tau$ とおき換えなければならない．

本講演では，Dirac 方程式に対して，経路の空間上の countably additive measure を構成するが，それは，(1.5), (1.6) を得たと同じ観点から行われるのである．

§2. Dirac 方程式．

Dirac 方程式は，4次元時空相対論的量子力学の方程式である．ここでは，時空2次元 Dirac 方程式を次の形で考える：

$$(2.1)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)=\left[-\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}-i A_1(t,x)\right)-im\beta+iA_0(t,x)\right]\varphi(t,x),$$
$$t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}.$$

α, β は，2x2 Hermitean symmetric 行列であって，$\alpha^2=\beta^2=1$，$\alpha\beta+\beta\alpha=0$ を満たすものである．m は粒子の静止質量であり，光速度 c，Planck 定数 $\hbar$ は 1 とした．$A_1(t,x)$,

$A_0(t,x)$ は，$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の実数値関数である．

(2.1) に於て変数変換 $t\to x_0$，$x\to x_1$ をして，然る後改めて $x=(x_0,x_1)$ とおくと，

(2.2) $$iH\psi(x) \equiv \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - iA_0(x)\right) + \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - iA_1(x)\right) + im\beta\right]\psi(x) = 0, \quad x\in\mathbb{R}^2$$

を得る．$A(x)=(A_0(x),A_1(x))$ とおく．

我々の目的は，(2.2) の Green 関数の経路積分表示を与えることである．その為に proper time s を次のように導入し Cauchy 問題

(2.3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\psi(s,x) = iH\psi(s,x), & s\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^2 \\ \psi(0,x) = g(x) \end{cases}$$

を考えよう．連続経路 $X:[0,s]\to\mathbb{R}^2$ 全体の Banach 空間を $C([0,s];\mathbb{R}^2)$ で表わす．

(2.3) の解に対して，次のような経路積分表示を与えることができる ([6]).

<u>Theorem</u>. $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を C^1 とする．$g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^2$ とする．そのとき，任意の固定した $(s,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$，$s>0$，に対して $C([0,s];\mathbb{R}^2)$ 上に一意的な countably additive, 2x2 matrix valued measure $\nu_{t,x}$ が存在して，

$$(2.4)\quad \psi(s,x) = (e^{isH}g)(x) = \int_{C([0,s];\mathbb{R}^2)} d\nu_{s,x}(X)\, e^{i\int_0^t A(X(\tau))\,dX(\tau)}\, g(X(0))$$

が成立する．$\nu_{s,x}$ の support は，

$$(2.5)\quad \left\{ X\in C([0,s];\mathbb{R}^2);\ \begin{array}{l} X(s)=x, \text{ and } X(b)-X(a) = -(b-a), \\ |X_1(b)-X_1(a)| \le |b-a| \text{ for } 0\le {}^\forall a < {}^\forall b \le s \end{array} \right\}$$

の上にある．但し，$X(\tau) = (X_0(\tau), X_1(\tau))$．特に，$\mathrm{supp}\,\nu_{s,x}$ は，Lipschitz連続な経路$X(\tau)$達（Lipschitz定数$\sqrt{2}$）の上にある．$m=0$ならば，(2.5)に於て，$|X_1(b)-X_1(a)| = |b-a|$となる．

(2.2)のGreen関数に関しては，(2.4)をLaplace変換することにより，次の系を得る．

<u>Corollary</u>. 次の両辺のうちの一方が存在すれば他方も存在して

$$(2.6)\quad i(H^{-1}g)(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^\infty e^{-\varepsilon s}ds \int_{C([0,s];\mathbb{R}^2)} d\nu_{s,x}(X)\, e^{i\int_0^s A(X(\tau))\,dX(\tau)}\, g(X(0))$$

が成立する．

<u>Remarks</u> 1. 証明がやや複雑になるが，(2.2), (2.3)のHの中の係数Aは，s-dependentであってもよい．従って，(2.1)に対するCauchy問題（$\psi(0,x) = g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^2$）の解も次のような経路積分表示ができる：

任意の固定した $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$, $t>0$, に対して, $C([0,t];\mathbb{R})$ 上に一意的な countably additive, 2×2 matrix valued measure $\nu_{t,x}$ が存在して,

$$(2.7)\qquad \varphi(t,x)=\int_{C([0,t];\mathbb{R})} d\nu_{t,x}(X)\, e^{i[\int_0^t A_1(\tau,X(\tau))dX(\tau)+\int_0^t A_0(\tau,X(\tau))d\tau]}\, g(X(0))$$

が成立する. $\nu_{t,x}$ の support は,

$$(2.8)\quad \left\{X\in C([0,t];\mathbb{R});\ \begin{array}{l} X(t)=x, \text{ and } |X(b)-X(a)|\le|b-a| \\ \text{for } 0\le{}^\forall a<{}^\forall b\le t\end{array}\right\}$$

の上にある. $m>0$ なら, $\operatorname{supp}\nu_{t,x}$ は, その傾きが光速度1以下の Lipschitz 連続な経路 $X(\tau)$ 達の上にあり, $m=0$ なら, その傾きが丁度光速度1に等しい Lipschitz 連続な経路 $X(\tau)$ 達の上にある. これは, 電子の Zitterbewegung の一つの解釈を示唆しているようにも思われる.

2. phase space path integral 又は Hamiltonian path integral の考え方から出発する heuristic argument によって, Dirac 方程式の経路積分が (2.4), (2.7) の形になることを示すことができる.

3. Daletskii [2] では, 似た問題を扱っている. quasi-measure は考えられているが, countably additive measure は構成されていない.

4. Klein-Gordon 方程式, 波動方程式を system 化したも

のに対しても同じような考察ができる.

§3. 証明の概略.

3.1. 経路の空間上の measure の構成.

方法は, Nelson [9] が Wiener measure の構成に用いた方法に従う.

$\dot{R}^2 = R^2 \cup \{\infty\}$ を R^2 の一点 compact 化とする. $\mathbf{X}_s = \prod_{[0,s]} \dot{R}^2$ を $\dot{R}^2$ の非可算無限直積とする. $\mathbf{X}_s$ は, $[0,s]$ 上の $\dot{R}^2$ 値関数全体であり, 従って不連続経路, ∞ を通る経路も含む. 積位相を与えれば, Tychonoff の定理により, $\mathbf{X}_s$ は, compact Hausdorff 空間になる. $C(\mathbf{X}_s)$ を $\mathbf{X}_s$ 上の複素数値連続関数全体のなす Banach 空間とし, $C_{fin}(\mathbf{X}_s)$ を $C(\mathbf{X}_s)$ の元 Φ であって, 区間 $[0,s]$ のある有限分割 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = s$ と, $(\dot{R}^2)^{n+1}$ 上のある有界連続関数 $F(x^0, x^1, \cdots, x^n)$ に対して,

$$\Phi(X) = F(X(s_0), X(s_1), \cdots, X(s_n))$$

と表わされるものの全体とする. $C_{fin}(\mathbf{X}_s)$ は, Stone-Weierstrass の定理により, $C(\mathbf{X}_s)$ で稠密である.

$K(s,x)$ を free Dirac equation の Cauchy 問題

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}\psi_0(s,x) = \left[\frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha\frac{\partial}{\partial x_1} + im\beta\right]\psi_0(s,x) \\ \psi_0(s,x) = g(x) \end{cases}$$

の基本解とする: $\psi_0(s,x) = \int_{R^2} K(s,x-y)\, g(y)\, dy$,

$$K(s,x)=\frac{1}{2}\delta(x_0+s)\left[\frac{\partial}{\partial s}+\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}+im\beta\right]\left(J_0(m(s^2-x_1^2)^{\frac{1}{2}})\theta(s-|x_1|)\right),\quad s>0.$$

$J_0(t)$は，order zero の Bessel関数であり，$\theta(t)$は，Heaviside関数である（$\theta(t)=0,\ t<0\ ;\ =1,\ t>0$）.

<u>X_s上の measure の構成.</u>　先ずX_s上に measure を構成する．任意の固定した$(s,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$，$s>0$，に対して，次のような$C_{fin}(X_s)^2$上の$\mathbb{C}^2$値線型汎関数$L_{s,x}$を考えよう：

(3.2) $$L_{s,x}(\Phi)=\overbrace{\int_{\mathbb{R}^2}\cdots\int_{\mathbb{R}^2}}^{n}K(s_n-s_{n-1},x^n-x^{n-1})\cdot\ldots\cdot K(s_2-s_1,x^2-x^1)\cdot K(s_1-s_0,x^1-x^0)F(x^0,x^1,\ldots,x^n)\,dx^0dx^1\cdots dx^{n-1}$$

ここに　$x_n=x$，$s_n=s$，$s_0=0$ である．

次の補題が決定的な役割を果たす．

<u>Lemma</u> 1.（i）$L_{s,x}(\Phi)$は，Φに対応するFの選び方に依らない．（ii）ある，sに無関係な定数Cが存在して

(3.3) $$|L_{s,x}(\Phi)|\leq C\,e^{ms}\,\|\Phi\|_\infty$$

が成立する．

Lemma 1 の証明について，（i）は e^{isH} の semigroup property から従う．（ii）の証明の為には，free Dirac equation の Cauchy 問題(3.1)が L^∞ well-posed であること，即ち，次の事実に注意せよ：

任意の $g \in C^1(\mathbb{R}^2)^2$ に対して，(3.1)の一意解 $\psi_0 \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)^2$ が存在して，

$$|N\psi_0(s,x)| \le e^{ms}\|Ng\|_{L^\infty(R_0^{(s,x)})}$$

が成立する．ここに，Nは 2×2 行列で，$N\alpha N^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$を満たすものとする．$R_0^{(s,x)}$は $K(s-r,x-y)$の変数(r,y)に関するsupport

$$\Gamma^{(s,x)}=\left\{(r,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2;\ \begin{array}{l}0\le r\le s, \text{ and for } {}^\forall\omega\in\mathbb{R}^2,\ |\omega|=1,\\ C_-(\omega)(s-r)\le(x-y)\cdot\omega\le C_+(\omega)(s-r)\end{array}\right\}$$

where

$$C_+(\omega)=\max(-\omega_1-\omega_2,\ -\omega_1+\omega_2),\qquad \omega=(\omega_1,\omega_2)$$
$$C_-(\omega)=\min(-\omega_1-\omega_2,\ -\omega_1+\omega_2)$$

の $r=0$ に於ける切口：$R_0^{(s,x)}=\Gamma^{(s,x)}\cap\{r=0\}\subseteq\mathbb{R}^2$ である．

Lemma 1を認めると，$C_{fin}(X_s)$が$C(X_s)$で稠密であることから，$L_{s,x}$は $C(X_s)^2$上の$\mathbb{C}^2$値連続線型汎関数に拡張できる．従って Rieszの表現定理により，X_s上に一意的にregular，2×2 matrix valued Borel measure $\nu_{s,x}$が存在して，

$$L_{s,x}(\Phi)=\int_{X_s} d\nu_{s,x}(X)\,\Phi(X),\qquad \Phi\in C(X_s)^2$$

が成立する．

<u>measure $\nu_{s,x}$ の support</u>．$\nu_{s,x}$ の support を決定しよう．Theoremの集合(2.6)は，集合

$$G(s)=\left\{X\in \mathfrak{X}_s;\ \begin{array}{l} X(s)=x, \text{ and for } 0\le {}^\forall a<{}^\forall b\le s \text{ and } {}^\forall \omega\in\mathbb{R}^2, |\omega|=1, \\ C_-(\omega)(b-a)\le (X(b)-X(a))\cdot\omega \le C_+(\omega)(b-a) \end{array}\right\}$$

に一致することに注意せよ．従って $\operatorname{supp}\nu_{s,x}\subseteq G(s)$ を証明すればよい。$G(s)$の補集合は，

$$G(s)^c=\bigcup_{0\le {}^\forall a<{}^\forall b\le s}\ \bigcup_{|\omega|=1}\left(E(s,x)\cup E(a,b;\omega)\right)$$

となる．ここで，

$$E(s,x)=\{X\in\mathfrak{X}_s;\ X(s)\neq x\},$$

$$E(a,b;\omega)=\left\{X\in\mathfrak{X}_s;\ \begin{array}{l}\text{either [both } X(b) \text{ and } X(a) \text{ are finite, and} \\ C_-(\omega)(b-a)>(X(b)-X(a))\cdot\omega \text{ or } (X(b)-X(a))\cdot\omega>C_+(\omega)(b-a)] \\ \text{or } [X(b)=\infty \text{ or } X(a)=\infty] \end{array}\right\}$$

は，共に$\mathfrak{X}_s$の開集合である．従って，measureのlocalization principleにより，$\nu_{s,x}$ が $G(s)^c$上で vanish することを示すには，各$E(s,x)$，$E(a,b;\omega)$ 上で vanishすることを示せばよい．後者は，基本解$K(s,x)$ のsupportの性質と関係(3.2)を用いて証明することができる。

3.2．経路積分表示．

Cauchy問題(2.3)の解の表示は，3.1.で構成したmeasure $\nu_{s,x}$ を用いて次の手順で行なわれる．

先ず，$g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^2$ に対して　作用素

$$(T(r)g)(x)=\int_{\mathbb{R}^2}K(r,x-y)\,e^{iA(y)(x-y)}g(y)\,dy$$

を導入する.

<u>Lemma</u> 2. $\dfrac{\partial T(r)g}{\partial r} \xrightarrow[(r\downarrow 0)]{} iHg$ in $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Lemma 2 を用いると, 次の補題を証明することができる.

<u>Lemma</u> 3. $T(\frac{s}{n})^n g \xrightarrow[(n\to\infty)]{} e^{isH}g$ in $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

経路積分表示(2.4)の証明を完結しよう. $T(r)$の定義と$\nu_{s,x}$の構成法から, $x^n = x$, $s_j = js/n$ として,

$$
\begin{aligned}
(T(\tfrac{s}{n})^n g)(x) &= \overbrace{\int_{\mathbb{R}^2}\cdots\int_{\mathbb{R}^2}}^{n} K(\tfrac{s}{n}, x^n - x^{n-1})\cdot\cdots\cdot K(\tfrac{s}{n}, x^1 - x^0)\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot e^{i\sum_{j=1}^n A(x^{j-1})(x^j - x^{j-1})} g(x^0)dx^0 dx^1\ldots dx^{n-1} \\
&= \int d\nu_{s,x}(X)\, e^{i\sum_{j=1}^n A(X(s_{j-1}))(X(s_j) - X(s_{j-1}))} g(X(0))
\end{aligned}
$$

が成立する. $n\to\infty$ とすると, Lemma 3 より, 左辺は$L^\infty(\mathbb{R}^2)$で $e^{isH}g$ に収束し, 右辺は, Lebesgueの有界収束定理から, $\int d\nu_{s,x}(X)\, e^{i\int_0^s A(X(\tau))\,dX(\tau)} g(X(0))$ に収束する.

REFERENCES

[1] Albeverio,S.A.,and Høegh-Krohn,R.J., Mathematical Theory of Feynman Path Integrals, Lecture Notes in Math. No.523, Springer 1976.

[2] Daletskii,Yu.L., Continual integrals and the characteristics connected with a group of operators, Soviet Math. Dokl. 2, 1634-1637(1961); Functional integrals connected with operator evolution equations, Russ. Math. Surveys 17, 1-107(1962).

[3] Feynman,R.P., Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, Rev. Mod. Phys. 20, 367-387(1948).

[4] ------- and Hibbs,A.P., Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill 1965.

[5] Fujiwara,D., A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation, J.Analyse Math. 35, 41-96(1979); Remarks on convergence of the Feynman path integrals, Duke Math. J. 47, 559-600 (1980).

[6] Ichinose,T., Path integral for the Dirac equation in two space-time dimensions, to appear in Proc. Japan Acad.

[7] Itô,K., Generalized uniform complex measure in Hilbert metric spaces and their applications to the Feynman path integrals, Proc. 5th Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, Vol.2, Part 1, 145-161, Univ. of California Press 1967.

[8] Kac,M., On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proc. Second Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, 189-214(1951).

[9] Nelson,E., Feynman integrals and the Schrödinger equation, J. Math. Phys. 5, 332-343(1964).

[10] Streit,L.,and Hida,T., Generalized Brownian functionals and the Feynman integral, to appear in Stochastic Processes and their Applications.