数理解析研究所講究録
第464巻 1982年 138-157

2つの凸な物体に対するSCATTERING MATRIXのPoleについて.

阪大 理学部　井川 満

§1. はじめに.　$\mathcal{O}$を$\mathbb{R}^3$の中の有界な開集合で、その境界Γは十分滑かとする。

$$\Omega = \mathbb{R}^3 - \overline{\mathcal{O}}$$

とおく。この時Ωは連結であると仮定する。次の問題を考える。

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (-\infty, \infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{on } \Gamma \times (-\infty, \infty), \end{cases}$$

ここで　$\Delta = \sum_{j=1}^{3} \partial^2/\partial x_j^2$　とする。この問題に対するscattering matrixを$\mathcal{S}(\sigma)$で表す。scattering matrixの定義に関しては Lax-Phillips [9]を参照されたい（例えば9頁）。$\mathcal{S}(\sigma)$は$L^2(S^2)$のunitary operatorに値をとる$\sigma \in \mathbb{R}$で定義された連続関数であるが、次の性質をもっている。

Theorem 5.1 of Chapter V of [9]. $\mathcal{S}(\sigma)$ は $L^2(S^2)$ からそれ自身への有界作用素を値にとる関数で $\mathrm{Im}\, z \leq 0$ で holomorphic，を全平面で meromorphic な関数 $\mathcal{S}(z)$ に拡張される。

$\mathcal{S}(\sigma)$ と obstacle $\mathcal{O}$ との関連については次の定理がある。

Theorem 5.6 of Chapter V of [9]. scattering matrix は scattering を決定する。すなわち $\mathcal{O}$ と $\tilde{\mathcal{O}}$ を二つの obstacles とし，それぞれに対応する scattering matrix を $\mathcal{S}(\sigma)$, $\tilde{\mathcal{S}}(\sigma)$ とする。もし、$\mathcal{S}(\sigma)=\tilde{\mathcal{S}}(\sigma)$, $\forall\sigma\in\mathbb{R}$ ならば $\mathcal{O}=\tilde{\mathcal{O}}$ が従う。

本講演で考察したい問題は，obstacle の幾何学的性質と scattering matrix の解析的性質の具体的な関連についてである。この問題の一つの取扱いとして，$\mathcal{O}$ を nontrapping と仮定して，$\sigma \longrightarrow \pm\infty$ の時の phase shift と $\mathcal{O}$ の関係を調べた仕事がある（[11], [8], [15]）が今回はこれについてはふれない。ここで考えたい問題は具体的には次のものである。

問題　meromorphic function $\mathcal{S}(z)$ の pole は $\mathcal{O}$ にどのように関連しているか。より問題を制限すれば、$\mathcal{S}(z)$ の pole の位置と $\mathcal{O}$ の幾何学的性質が関連しているか。

§2. これまでの結果. まず $\mathcal{O}$ の幾何学的性質として trapping あるいは nontrapping の概念を定義しておく。

Definition. $\Omega_R = \Omega \cap \{x ; |x| < R\}$ とおく. $\mathcal{O}$ が nontrapping であるとは, $\forall R > 0$ に対し, ある定数 $T(R)$ があって, Ω_R の点より出る幾何光学の法則によって出来る折れ線の Ω_R にとどまる部分の長さはすべて $T(R)$ 以下である場合をいう。そうでない場合を trapping という。

上記の問題については、まず次の結果がある。

Theorem 2.1. $\mathcal{O}$ が nontrapping であれば, $\exists \alpha > 0$, $\{z ; \operatorname{Im} z \leq \alpha\}$ の範囲には $\mathcal{S}(z)$ の pole は存在しない。

この証明には Lax-Phillips [9] の Th. 5.2 of chapter V の証明と nontrapping obstacle に対する local enery の uniform decay の結果 (Morawetz, Ralston and Strauss [14], 及び Melrose [12]) を合せれば直ちに従う。上の定理はさらに次の強い形に改良された。

Theorem 2.2. (Lax-Phillips [10]) $\mathcal{O}$ が nontrapping であれば, ある定数 $a, b > 0$ があって

$$\{z ; \operatorname{Im} z \leq a \log(|z|+1) + b\}$$

には $\mathcal{S}(z)$ の pole は存在しない。

trapping obstacle については [9] に次の conjecture がのせられている。

<u>Conjecture.</u>　$\mathcal{O}$ が trapping であれば，その real 軸にいくらでも近い pole が存在する。

この conjecture は Theorem 2.1 と合せて考えると $\mathcal{O}$ が trapping かどうかの特徴づけとして $\mathcal{S}(z)$ の pole がいくらでも実軸の近くに存在することであるという事が予想されていることがわかる。

nontrapping の obstacle に対する pole の非存在の範囲の評価については Theorems 2.1, 2.2 に記したが、pole の存在については上記の conjecture にかかわらず最近までほとんどなかったと思われる。特に nontrapping obstacle に対しては、現在もなお pole は存在するかどうかすら（1ヶ pole が存在することがいえれば、多分無限個の存在も従うであろうが）完全に open の問題であるようである。

$\mathcal{O}$ が trapping である場合の最も簡単な場合は、$\mathcal{O}$ が二つの交わらない凸な物体 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ から成っているときであるが，その場合に $\mathcal{S}(z)$ の pole の存在が証明された。

<u>Theorem 2.3. (Bardos, Guillot and Ralston [1]).</u>
$\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, $\overline{\mathcal{O}_1} \cap \overline{\mathcal{O}_2} = \phi$ で $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ は共に strictly

convex とする。ここで strictly convex とは boundary の Gaussian curvature がどこででも消えていない事を意味するものとする。その時、任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\{z\,;\ \mathrm{Im}\, z \leq \varepsilon \log(|z|+1)\}$$

は無限個の pole を含んでいる。

この結果と Theorem 2.2 を比べると pole の分布のうちに、trapping と nontrapping の違いをみることが出来る。一方、Ikawa [4] の結果より、直ちに次のことがいえる。

Theorem 2.4. (Ikawa [4]) $\mathcal{O}$ は上の Theorem と同じ仮定を満している。ある定数 $\alpha > 0$ があって

$$\{z\,;\ \mathrm{Im}\, z \leq \alpha\}$$

には $\mathcal{S}(z)$ の pole は存在しない。

従って、Lax-Phillips の conjecture は一般には正しくないことが結論出来る。従って $\mathcal{O}$ が trapping の特徴づけとしては "対応する scattering matrix $\mathcal{S}(z)$ の pole で実軸にいくらでも近いものがある" は放棄しなければならない。

§3. ここで示したい定理.

Theorem 1. $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, $\overline{\mathcal{O}_1} \cap \overline{\mathcal{O}_2} = \phi$ であって, $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ は共に strictly convex とする。このとき $\mathcal{O}$ より決まる定数 $c_0, c_1 > 0$, 及び $C > 0$ があって

(i) $\mathcal{S}(z)$ は

$$\{z \,;\, \mathrm{Im}\, z \leq c_0 + c_1\} - \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \{z \,;\, |z - z_j| \leq C(1+|j|)^{-1/2}\}$$

では holomorphic である。ただし $d = \mathrm{dis}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$

$$z_j = i c_0 + \frac{\pi}{d} j \;,\quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots \;.$$

(ii) すべての $j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$ に対して

$$\{z \,;\, |z - z_j| \leq C(1+|j|)^{-1/2}\}$$

に必ず $\mathcal{S}(z)$ の pole は存在する。

c_0, c_1 について. $a_1 \in \Gamma_1$, $a_2 \in \Gamma_2$ で $\mathrm{dis}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = |a_1 - a_2|$ となるものとする。c_0 は d 及び a_1, a_2 における Γ_1, Γ_2 の主曲率及び主曲率方向によって決まる。c_1 は

$$\frac{c_0}{2} - \varepsilon < c_1 < \frac{c_0}{2}$$

$\varepsilon > 0$ は任意, ととることが出来る。

Theorem 2. θについて Theorem 2 の仮定に加えて、a_1, a_2 は Γ_1, Γ_2 のヘソ点であるとする。その時 $\mathcal{S}(z)$ は

$$\{z ; \operatorname{Im} z < 2c_0\} - \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \{z ; |z - z_j| \leq C(1+|j|)^{-1/2}\}$$
$$- \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \{z ; |z - \tilde{z}_j| \leq C(1+|j|)^{-1/2}\}$$

で holomorphic である。ただし、z_j は前定理のもので、$\tilde{z}_j$ は

$$\tilde{z}_j = i\frac{3}{2}c_0 + \frac{\pi}{d}j = \frac{c_0}{2}i + z_j$$

である。

Remark. Theorem 1 における c_1 の評価より、θ_1, θ_2 に制限を加えた場合には、Theorem 2 は Theorem 1 の拡張になっている。すなわち $\operatorname{Im} z \geq c_0 + c_1$ での $\mathcal{S}(z)$ の性質を示している。しかし $\{z ; |z - \tilde{z}_j| \leq C(1+|j|)^{-1/2}\}$ の中に pole の存在を示さなければ、Theorem 2 の意味はあまりない。例えば Γ_1, Γ_2 が a_1, a_2 で球面に十分近ければ、

$$\{z ; \operatorname{Im} z < 2c_0\} - \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \{z ; |z - z_j| \leq C(1+|j|)^{-1/2}\}$$

がいえる。Theorem 2 の証明の感じからすれば、a_1, a_2 で Γ_1, Γ_2 が球に高次の接触をしていなければ、$\tilde{z}_j$ は $\mathcal{S}(z)$ の pole を近似しているようである。

§4. 証明の方針

Theorem 1 は [5, 6] に，Theorem 2 は [7] に完全な証明があるのと，それがいささか長いので、その方針のみを簡単に記すことにする。

まず、複素 parameter μ をもった境界値問題

$$
(4.1) \qquad \begin{cases} (\mu^2 - \Delta) u(x) = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{on } \Gamma \end{cases}
$$

を考える。ここで $g(x) \in C^\infty(\Gamma)$ とする。 $\mathrm{Re}\,\mu > 0$ にかぎると (4.1) は $\bigcap_{m \geq 0} H^m(\Omega)$ の中に解をもち，そこでは一意であることがわかっている。それを

$$
u(x) = (U(\mu) g)(x)
$$

と記すことにしよう。$U(\mu)$ は $\mathrm{Re}\,\mu > 0$ で $\mathcal{L}(C^\infty(\Gamma), \bigcap_{m \geq 0} H^m(\Omega))$ に値をとる holomorphic function である。従って $U(\mu)$ は $\mathcal{L}(C^\infty(\Gamma), C^\infty(\bar{\Omega}))$-valued holomorphic function でもある。$U(\mu)$ を $\mathcal{L}(C^\infty(\Gamma), C^\infty(\bar{\Omega}))$-valued function とみなした時，例えば、Mizohata [13] によって $U(\mu)$ は $\mathrm{Re}\,\mu \geq 0$ で holomorphic，μ 全平面で meromorphic がわかっている。$U(\mu)$ の pole と $\mathcal{S}(z)$ の pole の間には，次の関係がある。z が $\mathcal{S}(z)$ の pole ならば，iz は $U(\mu)$ の pole である。逆も成り立つ（Lax-Phillips [9, Theorem 5.1 of Chapter V)．

従って $S(z)$ の pole の位置を調べることは，$U(\mu)$ の pole を調べることに帰着される。よって以後 $U(\mu)$ の性質をどのような手順で調べるかを記す。

$g(x) \in C^\infty(\Gamma)$, $m(t) \in C_0^\infty(0,1)$ とし，

$$
(4.2) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) w(x,t) = 0 & \text{in } \Omega \times (-\infty, \infty) \\ w(x,t) = g(x) m(t) & \text{on } \Gamma \times (-\infty, \infty) \\ \operatorname{supp} w \subset \{t > 0\} \end{cases}
$$

を考える。解の energy estimate より $\mathrm{Re}\,\mu > 0$ に対して Laplace transform

$$\hat{w}(x,\mu) = \int e^{-\mu t} w(x,t)\,dt$$

は収束して

$$
\begin{cases} (\mu^2 - \Delta)\,\hat{w}(x,\mu) = 0 & \text{in } \Omega \\ \hat{w}(x,\mu) = g(x)\,\hat{m}(\mu) & \text{on } \Gamma \end{cases}
$$

を満している。従って $\hat{m}(\mu) \neq 0$ に対しては

$$U(\mu) g = \frac{\hat{w}(x,\mu)}{\hat{m}(\mu)}$$

なる表現を得る。よって (4.2) の解 $w(x,t)$ を詳しく調べることによって $U(\mu)$ を調べることが出来る。(4.2) の方が、(4.1) よりも $C^\infty(\bar{\Omega})$ では取り扱いやすい。

$\Gamma\times\mathbb{R}$ 上の関数は Fourier transformation を用いることにより次の形の boundary data の super position で表されるので, parameter $k\geqq 1$ をもった boundary data

$$(4.3)\quad \begin{cases} m(x,t;k)=e^{ik(\psi(x)-t)}\,f(x,t) \\ f(x,t)\in C_0^\infty(\Gamma\times(0,1)) \end{cases}$$

に対する mixed problem (4.2) の $k\to\infty$ の時の asymptotic solution を構成する事が中心となる。

L を a_1, a_2 を通る直線とし, 円柱 $\{x;\ \mathrm{dis}(x,L)<\delta\}$ が, Γ_j からきりとる部分で a_j を含む連結成分を $S_j(\delta)$ と記し, 円柱が $S_1(\delta)$ と $S_2(\delta)$ できりとられる部分を $\omega(\delta)$ とする。二、三の補助的な考察によって, (4.2) の asymptotic solution を調べるには, $\delta>0$ を十分小さくとって

$$(4.4)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)w=0 & \text{in } \omega(\delta)\times(-\infty,\infty) \\ w(x,t)=m(x,t;k) \\ \mathrm{supp}\, w\subset\{t;\ t>0\} \end{cases}$$

を満すものを構成すればよいのがわかる。 $\Omega_j=\mathbb{R}^3-\overline{\mathcal{O}_j}$, $j=1,2$ とおく。 $v_j(x)$ を support は $S_j(\delta)$ の十分近くで, $S_j(\delta)$ 上では値が 1 となる $C^\infty(\Gamma_j)$ の元とする。まず,

$$u_0(x,t;k)=e^{ik(\varphi_0(x)-t)}\sum_{j=0}^{N} v_{j0}(x,t)k^{-j}$$

の形で，$k \to \infty$ のとき

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u_0 = 0 & \text{in} \quad \Omega_1 \times \mathbb{R} \\ u_0(x,t;k) = m(x,t;k) & \text{on} \quad S_1(\delta) \times \mathbb{R} \\ \operatorname{supp} u_0 \subset \{t > 0\} & \end{cases}$$

を asymptotically に満すものをもとめる。それには

$$\begin{cases} |\nabla \varphi_0|^2 = 1 & \text{in } \Omega_1 \\ \varphi_0 = \psi, \quad \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial n} > 0 & \text{on } \Gamma_1 \end{cases}$$

を満し、かつ

$$T_0 = 2\frac{\partial}{\partial t} + 2\nabla\varphi_0 \cdot \nabla + \Delta\varphi_0$$

とおくとき

$$\begin{cases} T_0 v_{00} = 0 & \text{in } \Omega_1 \times \mathbb{R} \\ v_{00} = f & \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R} \end{cases}$$

$j \geqq 1$ に対し

$$\begin{cases} T_0 v_{j0} = \dfrac{1}{i} \square v_{j-1,0} & \text{in } \Omega_1 \times \mathbb{R} \\ v_{j0} = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R} \end{cases}$$

を満せばよい。次に u_1 として

$$u_1(x,t;k) = e^{ik(\varphi_1(x) - t)} \sum_{j=0}^{N} v_{j1}(x,t) k^{-j}$$

の形で、

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u_1 = 0 & \text{in } \Omega_2 \times \mathbb{R} \\ u_1 = v_2 u_0 & \text{on } S_2(\delta) \times \mathbb{R} \end{cases}$$

を asymptotically に満すものをもとめる。それには

$$\begin{cases} |\nabla \varphi_1| = 1 & \text{in } \Omega_2 \\ \varphi_1 = \varphi_0, \quad \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial n} & \text{on } S_2(\delta) \end{cases}$$

かつ

$$T_1 = 2\frac{\partial}{\partial t} + 2\nabla\varphi_1 \cdot \nabla + \Delta\varphi_1$$

とおくとき

$$\begin{cases} T_1 v_{j1} = \dfrac{1}{i} \Box v_{j-1,1} & \text{in } \Omega_2 \times \mathbb{R} \\ v_{j1} = v_2 v_{j0} & \text{on } \Gamma_2 \times \mathbb{R} \end{cases}$$

を満すようにとればよい。ただし，$v_{-1,1} \equiv 0$ とする。以下

inductive に

$$u_q(x,t;k) = e^{ik(\varphi_q(x) - t)} \sum_{j=0}^{N} v_{jq}(x,t) k^{-j}$$

の形で

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u_q = 0 & \text{in } \Omega_\epsilon \times \mathbb{R} \\ u_q = v_\epsilon u_{q-1} & \text{on } \Gamma_\epsilon \times \mathbb{R} \end{cases}$$

を漸近的に満すものをつくる。ここで $\epsilon = \frac{1}{2}(1+(-1)^{q+1}) + 1$.

ここで $q \longrightarrow \infty$ となるときの u_q の形について調べる。まず phase function の列 $\{\varphi_q\}_{q=0}^{\infty}$ について

Proposition 4.1. $|\nabla\varphi_\infty|=1$ in Ω_1, $|\nabla\tilde{\varphi}_\infty|=1$ in Ω_2 を満す C^∞ function φ_∞, $\tilde{\varphi}_\infty$, 定数 d_∞, $\tilde{d}_\infty$ があって，ある $0<\alpha<1$ に対し

$$|\varphi_{2q}(x)-(\varphi_\infty(x)+2dq+d_\infty)|\leq C\alpha^{2q}$$

$$|\varphi_{2q+1}(x)-(\tilde{\varphi}_\infty(x)+d(2q+1)+\tilde{d}_\infty)|\leq C\alpha^{2q}$$

が成り立つ。

次に amplitude function の列 $\{v_{jq}\}_{q=0}^{\infty}$, $j=0,1,\cdots,N$, の収束を調べる。$j\geq 1$ の場合は $j=0$ の結果より導かれるのであるが、記述が複雑になるので $j=0$ のときのみを書く。

Proposition 4.2. 定数 $0<\lambda,\tilde{\lambda}<1$, C^∞-functions $a(x)$, $\tilde{a}(x)$ 及び $j_\infty(x)$, $\tilde{j}_\infty(x)$ があって

$$|v_{0,2q}(x,t)-(\lambda\tilde{\lambda})^q a(x)f(A,t-j_\infty(x)-2dq)|\leq C(\alpha\lambda\tilde{\lambda})^q$$

$$|v_{0,2q+1}(x,t)-\lambda^{q+1}\lambda^q\tilde{a}(x)f(A,t-\tilde{j}_\infty(x)-d(2q+1))|\leq C(\alpha\lambda\tilde{\lambda})^q$$

が成り立つ，ここで $A\in S_1(\delta)$ で ψ より決まる。

(4.4) の近似解が u_q のつくり方より

$$(4.5)\qquad w(x,t;k)=\sum_{q=0}^{\infty}\{u_{2q}(x,t;k)-u_{2q+1}(x,t;k)\}$$

$$=\sum_{j=0}^{N}k^{-j}\sum_{q=0}^{\infty}\{e^{ik(\varphi_{2q}-t)}v_{j,2q}(x,t)-e^{ik(\varphi_{2q+1}-t)}v_{j,2q+1}\}$$

で得られることを注意しておこう。上の式の k^{-j} の係数の $t \to \infty$ での形をもとめることが大切であるが，k^0 の係数のみを考察することにする。

$$F_0(x,t;k) = e^{ik(\varphi_\infty(x)+d_\infty - t)}\, a(x)\, f(A, t - j_\infty(x))$$

とおくと Propositions 4.1, 4.2 より

$$\left| e^{ik(\varphi_{2q}(x)-t)}\, v_{0,2q}(x,t) - (\lambda\tilde{\lambda})^q F(x, t-2qd) \right| \leq C k (\lambda\tilde{\lambda}\alpha)^q$$

が従う。$v_{0,2q}$ の support を考慮すれば

$$c_0 = -\frac{1}{2d}\log\lambda\tilde{\lambda}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2d}\log\alpha$$

とおくと

$$(4.6) \quad z_0(x,t;k) = \sum_{q=0}^{\infty}\left\{ e^{ik(\varphi_{2q}-t)}\, v_{0,2q} - (\lambda\tilde{\lambda})^q F_0(x, t-2dq)\right\}$$

は

$$(4.7) \quad |z_0(x,t;k)| \leq C k e^{-(c_0+c_1)t}$$

なる評価をもつ。

さて $U(\mu)$ を調べるには (4.4) の解の Laplace transfom を考えねばならなかった。ある種の評価を行えば (4.4) の exact solution の Laplace transfom はその近似解 (4.5) の Laplace transform で近似される（$\mathrm{Re}\,\mu > -c_0 - c_1$ の範囲で）ことがわかるので、(4.5) の Laplace transform を行う。

この場合も k^0 の係数のみ考えることとする。

$$(4.8)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu t}\left(\sum_{q=0}^{\infty} e^{ik(\varphi_{2q}(x)-t)}\, v_{0,2q}(x,t)\right)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu t} \sum_{q=0}^{\infty} (\lambda\tilde{\lambda})^{q} F_0(x, t-2dq)\,dt$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu t} z_0(x,t;k)\,dt$$

これらのすべての項は $\mathrm{Re}\,\mu>0$ では収束する。又 (4.7) の評価より右辺第二項は $\mathrm{Re}\,\mu>-c_0-c_1$ で収束する。よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu t} z_0(x,t;k)\,dt = \hat{z}_0(x,\mu;k)$$

は $\mathrm{Re}\,\mu>-c_0-c_1$ で holomorphic. (4.8) の右辺第一項は $\mathrm{Re}\,\mu>0$ で考えると

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu t} \sum_{q=0}^{\infty} (\lambda\tilde{\lambda})^{q} F_0(x, t-2qd)\,dt$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} (\lambda\tilde{\lambda})^{q} e^{-2qd\mu}\, \hat{F}_0(x,\mu)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2d\mu}\lambda\tilde{\lambda}}\, \hat{F}_0(x,\mu).$$

$\hat{F}_0(x,\mu)$ は entier function であるので，これは全平面で meromorphic で pole は $1-\lambda\tilde{\lambda}e^{-2d\mu}=0$ の点，すなわち

$$\mu=\mu_j=-c_0+\frac{\pi}{d}j\sqrt{-1},\quad j=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

である。従って(4.8)の左辺は $\mathrm{Re}\,\mu > -c_0 - c_1$ で meromorphic でそこでの pole は μ_j, $j=0,\pm 1, \cdots$ のみである。

すべて省略してきたが、この考察を k^{-j} の係数にも行えば、近似解の Laplace transform の $\mathrm{Re}\,\mu > -c_0 - c_1$ における具体的な形を得ることが出来る。これより Theorem 1 の前半が従う。Theorem 1 の後半はこのやり方で得られた $U(\mu)$ の近似解の μ_j のまわりでの偏角の変化をしらべることより示す。

Theorem 2 は、Proposition 4.1, 4.2 に示された近似解の収束をより高い order まで求めることによって示す。

§5. おわりに.

私が現在この問題に関して関心をもっていることを二、三記すのを許されたい。

まず §3 に書いた通り、$\tilde{z}_j$ が $\mathcal{S}(z)$ の pole を近似していることを示さなければ、本質的には Theorem 1 より発展していないので、これはやらなければならないと思う。この時、a_1, a_2 がへソ点でない場合も $\mathrm{Im}\, z \geq c_0 + c_1$ での pole の分布をも考察出来ればと思う。

§2 に記したように、Lax-Phillips の conjecture は正しくないことがわかったが、それでは $\mathcal{O}$ が trapping という性質は $\mathcal{S}(\sigma)$ の pole の位置を通じてはどのように特徴づけられ

ると予想出来るだろうか。まず Lax-Phillips [10] と，Bardos-Guillot-Ralston [1] を考え合せると

<u>Conjecture 1.</u>　$\mathcal{O}$ が nontrapping である必要かつ十分な条件はその scattering matrix $\mathcal{S}(z)$ はある $a, b>0$ に対しては

$$\{z;\ \mathrm{Im}\, z \le a \log(|z|+1)+b\}$$

には pole をもたない。

この conjecture に関しては残っている部分は $\mathcal{O}$ が trapping であれば任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$\{z;\ \mathrm{Im}\, z \le \varepsilon \log(|z|+1)\}$$

に $\mathcal{S}(z)$ の pole は無限個あることをいえばよい。

Theorem 1 を考え合せると次も確からしく思われる。

<u>Conjecture 2.</u>　$\mathcal{O}$ が nontrapping である必要かつ十分な条件は，その scattering matrix $\mathcal{S}(z)$ は任意の $\alpha>0$ に対し

$$\{z;\ \mathrm{Im}\, z \le \alpha\}$$

には pole を有限個しかもたない。

断わるまでもないことであるが，これについては，$\mathcal{O}$ が

trapping ならば，ある定数 $\alpha_0 < +\infty$ があって

$$\{z;\ \mathrm{Im}\, z \leq \alpha_0\}$$

に pole は無限個あることをいえばよい。

Lax－Phillips の conjecture は一般には正しくなかったが，我々の定理1，2 の条件をみたす $\mathcal{O}$ は trapping obstacles の中でも例外的に trapping の弱いものである。大部分の trapping な obstacle については彼等の conjecture は正しいと思われるが，まだ real 軸にいくらでも近い pole をもつような例は証明されていない。従って，

問題． $\mathcal{S}(z)$ の pole で real 軸にいくらでも近いものがあるような $\mathcal{O}$ の例を示せ。

Theorem 1 の証明の中で c_0 を決める式のみをみれば a_1, a_2 における主曲率がすべて0になると $c_0 = 0$ となる。これより上の問題の答としては $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が convex で a_1, a_2 でのみ主曲率は0となるものが考えられるが，Theorem 1 の方法はこの場合は全く役に立たない。従って証明は全く別の方向より行わなければならないように思われる。

References

[1] C.Bardos, J.C.Guillot and J.Ralston, La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application à la théorie de la diffusion, to appear in Comm. Partial Diff.Equ.

[2] M.Ikawa, Mixed problems for the wave equation, IV. The existence and the exponential decay of solutions, J.Math. Kyoto Univ., 19(1979), 375-411.

[3] ———, Mixed problems for the wave equation, Proc.NATO Advanced Study Institute, Singularitites in boundary value problems, edited by G.H.Garnir (1981), 97-119.

[4] ———, Decay of solution of the wave equation in the exterior of two convex obstacles, Osaka J,Math., 19(1982) 459-509.

[5] ———, On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles, to appear in J.Math.Kyoto Univ.

[6] ———, On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles, Addendum, to appear.

[7] ———, On the distribution of the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles, in preparation.

[8] T.Kato and A.Jensen, Asymptotic behavior of the scattering phase for exterior domains, Comm. Partial Diff.Equ., 3(1978),1165-1195.

[9] P.D.Lax and R.S.Phillips, Scattering theory, Academic press, New York, 1967.

[10] ————————, A logarithmic bound on the

location of the poles of the scattering matrix, Arch.Rat. Mech.and Anal., 40(1971), 268-280.

[11] A.Majda and J.Ralston, An analogue of Weyl's formula for unbounded domain, I, II and III, Duke Math.J., 45(1978) 183-196, 45(1978), 513-536 and 46(1979),725-731.

[12] R.Melrose, Singularities and energy decay in acoustical scatterin, Duke Math.J., 46(1979), 43-59.

[13] S.Mizohata, Sur l'analyticité de la fonction spectrale de l'opérateur Δ relatif au problème extérieur, Proc. Japan Acad.,39(1963), 352-357.

[14] C.S.Morawetz, J.Ralston and W.A.Strauss, Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles, Comm Pure Appl.Math.,30(1977),447-508.

[15] V.Petkov and G.Popov, Asymptotic behavior of the scattering phase for non-trapping obstacles, to appear.

[16] J.Ralston, Propagation of singularities and the scattering matrix, Proc.NATO Advanced Study Institute, Singularities in boundary value problems (1981), Reidel Publ.