数理解析研究所講究録
第 465 巻 1982 年 24-36

Noether 一様連接環について

日大 文理 後藤四郎

1. 序文.

A は可換環として, $\mathbb{N}$ によって自然数の全体のなす集合をあらわす。A-加群 M に対して, $v_A(M)$ により M を生成するのに必要な元の最小の個数をあらわす。各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$\varphi_A(n) = \sup_{0 \neq f \in \mathrm{Hom}_A(A^n, A)} v_A(\mathrm{Ker}\, f)$$

とおき, この $\varphi_A(n)$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ について有限であるとき, A は一様連接であるということにする。一様連接であれば, 連接である。付値環や絶対平坦環は, 必ずしも Noether ではない, 一様連接環の典型的なものではある。もっとも, この講演では Noether 一様連接環を主に, とりあつかう。

一様連接の概念は, Soublin [8] により導入され,

環 A が一様連接であるためには，直積 $A^{\mathbb{N}}$ が連接であることが必要にして十分であることが示された。Quentel [6] は，Soublin の研究を引き継いで，もし A が Noether 一様連接であれば，

$$\sup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \nu_A(\mathfrak{p}) \leqq \varphi_A(1) + \varphi_A(4)$$

なることを指摘した。($\sup \nu_A(\mathfrak{p})$ が有限という性質は，非常に強い条件であって，次元が3以上の Noether 環でこの性質をもつものは，知られていない。) Quentel の証明は，Noether 環の素イデアルは，三つの元で生成されたイデアルの素因子になるという Gulliksen [3] の結果の応用であって，私は他にこの Gulliksen の定理の応用例を知らない。Quentel は更に，一次元の Noether 局所環は一様連接であると指摘している。後に，Sally [7] によって，これは2次元以下で常に正しいことが示された。

上に述べた様に，A が一様連接であれば，A の素イデアルの生成元の個数には，上限がある。従って，Macaulay の有名な例が示す様に，体 k の上の多項式環 $k[X_1, \ldots, X_d]$ や巾級数環 $k[[X_1, \ldots, X_d]]$ は $d \geqq 3$ なら一様連接ではないのだから，Noether 一様連接環の次元は高々2であると予想するのは大変に自

然であって，この講演の目的も，このことを証明することにある。結果は，

<u>定理(1.1).</u> Noether 環 A について，次の二つの条件は同値である。

(1) A は一様連接である。

(2) $\dim A \leqq 2$ であってかつ，すべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\sup_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} \rho_{A_\mathfrak{m}}(n)$$

は有限である。

上の定理の条件(2)の後半は，一般には，不可欠である（例を第3節で与える。）が，A に適当な有限性の仮定を付加しておけば，代りにこの部分をとり除くことができる。

<u>系(1.2).</u> A は semi-local であるか，体の上の有限生成代数であると仮定せよ。すると，

$$A\text{が一様連接である} \iff \dim A \leqq 2$$

となる。

(1.1) と (1.2) の証明は，次の節ですることにしよう。

2次元以下の局所環が一様連接であるという事実は，Sally [7] の中にも応用例があるが，鈴木の講演内にも決定的に使われている。もともとは，そこから本研究が出発したのであるから，興味をお持ちの読者は，是非参照されたい。

以下 A は可換環を，$\mathbb{N}$ は自然数の全体のなす集合をあらわす。

2. 定理 (1.1) の証明.

まず Quentel [6] による，次の二つの結果を記録しておく。((2.2) のくわしい証明が，Sally [7] の中に再録されている。)

<u>(2.1).</u> S は A 内の乗法系とすれば，すべての n について，

$$\varphi_{S^{-1}A}(n) \leqq \varphi_A(n)$$

である。とくに，A が一様連接であれば，$S^{-1}A$ もそうなる。

<u>(2.2).</u> $A \xrightarrow{\rho} B$ は可換環の射で，B は，有限表示 (*finitely presented*) な A-加群になっているものと仮定せよ。このとき，A が一様連接であれ

ば，Bも一様連接である。更に，もしも $\mathrm{Ker}\,\rho$ が巾零でかつ A-加群として有限表示であれば，逆も正しい。

さてしばらくの間，Aは極大イデアルが $\mathfrak{m}$ の局所環で $\dim A = 3$ のものとする。$\underline{a} = a_1, a_2, a_3, a_4$ は $\mathfrak{m}$ の元の列で $\dim A/(\underline{a}) = 0$ のものとせよ。$K = K(\underline{a}\,;A)$ によって，$\underline{a}$ によって得られる Koszul 複体を，$H(\underline{a}\,;A)$ によりその homology をあらわす。今 $f : A^4 \longrightarrow A$ を，A-加群の射で $f(e_i) = a_i$ なるもの（$\{e_i\}_{1\leqq i\leqq 4}$ は A^4 の自然な基底をあらわす。）とする。もちろん，

$$\nu_A(H_1(\underline{a}\,;A)) \leqq \nu_A(\mathrm{Ker}\,f) \leqq \nu_A(H_1(\underline{a}\,;A)) + 6$$

である。

$$s(A) = \sup_{\underline{a}} \nu_A(H_1(\underline{a}\,;A))$$

とおく。$s(A) = \infty$ なら，Aは一様連接ではないことに注目せよ。

<u>補題</u>(2.3). ① $\hat{A}$ を A の完備化とすると，$s(\hat{A}) = s(A)$ である。

② A内に正則局所環 R が部分環として含まれていて，

A は R-加群として有限型でかつ $R \mathrel{\lessdot\!\!\!\!\oplus} A$ ならば，$s(A) = \infty$ である。

証明．① $\underline{b} = b_1, \cdots, b_4$ は $\mathfrak{m}\hat{A}$ の元で，$\underline{b}\hat{A}$ は $\mathfrak{m}\hat{A}$-primary なものとすれば，$\underline{a} = a_1, \cdots, a_4$ は $\mathfrak{m}$ の元で $\underline{a}\hat{A} = \underline{b}\hat{A}$ となるものが必ずとれる。もちろん，$K(\underline{a}; \hat{A}) \cong K(\underline{b}; \hat{A})$ だから，

$$H_1(b; \hat{A}) \cong \hat{A} \otimes_A H_1(\underline{a}; A)$$

である。よって $U_{\hat{A}}(H_1(b; \hat{A})) = U_A(H_1(\underline{a}; A))$．従って，$s(\hat{A}) \leqq s(A)$．逆向きの不等号も同様にして示される。

② $\underline{a}$ を R の元の列であるとせよ。すると，$K(\underline{a}; R) \mathrel{\lessdot\!\!\!\!\oplus} K(\underline{a}; A)$ だから

$$\begin{aligned} U_R(H_1(\underline{a}; R)) &\leqq U_R(H_1(\underline{a}; A)) \\ &\leqq U_R(A) \cdot U_A(H_1(\underline{a}; A)). \end{aligned}$$

故に $s(R) \leqq U_R(A) \cdot s(A)$．従って $s(R) = \infty$ を示せば十分である。

$\mathfrak{m}$ により R の極大イデアルをあらわし，$\mathfrak{m} = (x, y, z)$ とかいておく。$n \geqq 5$ は ~~奇数~~ として，H_n によって n 次の交代行列で次のように定まるものを表せ：

$$[H_n]_{ij} = \begin{cases} x & (i \text{ odd } \text{で } j=i+1) \\ y & (i \text{ even } \text{で } j=i+1) \\ z & (i+j=n+1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$(1 \leq i < j \leq n+1)$. I_n により H_n の $n-1$ 次の Pfaffian 全体の生成する R のイデアルをあらわす。すると I_n は $\mathfrak{m}$-準素 $(I_n \ni x^{\frac{n-1}{2}}, y^{\frac{n-1}{2}}, z^{\frac{n-1}{2}})$ であるから [1] により、R/I_n は Gorenstein で $\nu_R(I_n) = n$ である。$J_n = (f_n, g_n, h_n) : I_n$ とおく。(但し f_n, g_n, h_n は I_n の極小生成系の一部で R-列をなすものとする。もちろん $f_n = x^{\frac{n-1}{2}}$, $g_n = y^{\frac{n-1}{2}}$, $h_n = z^{\frac{n-1}{2}}$ ととってよい。) すると、[5] により、$\nu(R/J_n) = n-3$ でその上 $\nu_R(J_n/(f_n, g_n, h_n)R) = 1$ がわかる。従って、R/J_n は次の形の minimal free resolution

$$0 \to R^{n-3} \to R^n \to R^4 \xrightarrow{f} R \to R/J_n \to 0$$

をもつことがわかる。よって

$$\nu_R(\operatorname{Ker} f) = n$$

で、従って

$$\nu_R(H_1(f_n, g_n, h_n, l_n; R)) \geq n-6$$

(但し $J_n = (f_n, g_n, h_n, l_n)$ とかく。). よって $s(R) = \infty$. //

命題(2.4). Aは、depth A $\geqq 2$ でかつ $H^2_m(A)$ が有限生成であると仮定せよ。 a, b, c は A のパラメーター系で $(a, b)\cdot H^2_m(A) = (0)$ であるとする。このとき すべての $n \geqq 2$ について、

$$(a^n, b^n, c^n) : (abc)^{n-1} = [(a, c) : b] + [(b, c) : a] + [(a, b) : c^{n-1}].$$

証明. まず

① $(a^l, b^m) : c^n = (a^l) + b^{m-1}[(a^l, b) : c^n]$ $(l, m, n > 0)$

を示す。 f は左辺の元として、 $c^n f = a^l g + b^m h$ とかくと、 $h \in (a^l, c^n) : b^m$ である。 b の選び方により、 $(a, c^n) : b^m = (a, c^n) : b$ だから、 $bh = a^l x + c^n y$ とかける。よって $c^n(f - b^{m-1}y) \in (a^l)$. 従って $f - b^{m-1}y \in (a^l)$.

すなわち $f \in (a^l) + b^{m-1}[(a^l, b) : c^n]$

② $(a^l, b^m) : c^n = (a^l, b^m) + a^{l-1}b^{m-1}[(a, b) : c^n]$.

これは、a, b の対称性より、①に従う。

さて $f \in A$ で $(abc)^{n-1}f = a^n x + b^n y + c^n z$ とかけているとしよう。すると $(ab)^{n-1}[f - cz] \in (a^n, b^n) : c^{n-1}$ だから、②より $(ab)^{n-1}[f - cz] \in (a^n, b^n) + (ab)^{n-1}[(a, b) : c^{n-1}]$.

よって $g \in (a, b) : c^{n-1}$ をとって $(ab)^{n-1}(f - g) \in (a^n, b^n) + (c)$ とできる。 A/cA では、 $(\bar{a}^n, \bar{b}^n) : (\bar{a}\bar{b})^{n-1} = [(\bar{a}) : \bar{b}] + [(\bar{b}) : \bar{a}]$

であることは，比較的容易にたしかめられるので，

$$f \in [(a,c):b] + [(b,c):a] + [(a,b):c^{n-1}].$$

//

系(2.5)[*)] (2.4)の状況下で，

$$(abc)^{n-1} \notin (a^n, b^n, c^n) \qquad (n>0).$$

定理(1.1)の証明

(2) $\Rightarrow$ (1)　$f: A^n \to A$ を A-加群の射とすれば，仮定により $\nu_{A_\mathfrak{m}}(\mathrm{Ker}(A_\mathfrak{m} \otimes_A f)) \leqq s(n)$ がすべての $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}A$ について正しい。但し

$$s(n) = \sup_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}A} \mathcal{S}_{A_\mathfrak{m}}(n).$$

よって[2]の Satz 2 によれば，$\nu_A(\mathrm{Ker} f) \leqq s(n)+2$.

(1) $\Rightarrow$ (2)　(2.1)より後半をうる。一方でもし $\dim A \geqq 3$ であれば，(2.1)より $\dim A = 3$ でかつ A は局所として反例があるはずである。$\mathfrak{m}$ を A の

---

*) (1.1)の証明に必要なのは(2.5)のみである。この事実は，Direct summand conjecture の研究に従事したことのある人にはよく知られていることであるらしい（吉野）。

極大イデアルとせよ。もし $\hat{A}$ が体を含むなら，k を $\hat{A}$ の係数体とし，x, y, z を A のパラメーター系として

$$R = k[[x, y, z]] \subset \hat{A}$$

を考えると，R は $\hat{A}$ の直和因子である（[4]）。よって $s(A) = \infty$ が (2.3) に従う。故に $\hat{A}$ は体を含まない。

$p = \mathrm{ch}\, A/m$ とおき $0 \neq p \in m$ に注目せよ。(2.2) によれば，A/pA も一様連接だから，上の結果より $\dim A/pA \leqq 2$．$\mathfrak{p}$ は $\hat{A}$ の素イデアルで，$\dim \hat{A}/\mathfrak{p} = 3$ にとって，B により $\hat{A}/\mathfrak{p}$ の正規化をあらわせば，B は (2.4) の仮定をみたすので，A のパラメーター系 p, x, y をとって これが B 内で x, y について (2.4) の仮定をみたす様にできる。W を $\hat{A}$ の係数環として $R = W[[x, y]] \subset \hat{A}$ とおくと，R は B に対しては，(2.5) と [4] の主定理より，直和因子である。故に $R \bigoplus \hat{A}$．従って (2.3) より $s(A) = \infty$．すなわち A は一様連接でない（矛盾）。 //

<u>系 (2.6).</u> A は regular とせよ。このとき，

A が一様連接である $\iff \dim A \leqq 2$.

証明. $\Rightarrow$) は (1.1) による。 $\Leftarrow$) は, Soublin[8] に示されている。 //

系 (1.2) の証明

Aが semi-local のときは (1.1) そのもの。 Aは体 k 上の有限生成代数とする。 $d = \dim A$ とおくと, 正規化定理より, $x_1, \cdots, x_d \in A$ をとって, Aは多項式環 $R = k[x_1, \cdots, x_d]$ 上加群として有限生成にできる。 (2.2) によれば, Aが一様連接であることと, Rが一様連接であることとは, 同値であって (2.6) によれば後者は $d \leqq 2$ と同値である。 //

3. 例.

k を代数閉体とせよ。すると Noether 整域 A を, k を含むようにつくって, その上次の性質をもつ様にできる。

① Aは可算無限個の極大イデアル $\{\mathfrak{m}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をもつ。

② $\dim A_{\mathfrak{m}_n} = 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

③ すべての $n \in \mathbb{N}$ について A-加群の射 f_n: $A^2 \longrightarrow A$ が存在して,

$$v_A(\mathrm{Ker}\, f_n) = v_{A_{\mathfrak{m}_n}}(\mathrm{Ker}(A_{\mathfrak{m}_n} \otimes_A f_n)) = n+1$$

となっている。

この例によって 我々は (1.1)の条件②の後半が,
一般には, 不可欠であることを知る。

構成のあらすじ

$n \in \mathbb{N}$ とすると 多項式環 $S = k[X_1, X_2, X_3, X_4]$
内に斉次素イデアル P_n をみつけて, $\dim S/P_n = 2$で,

$$\underline{H}^1_M(S/P_n) = k^n(3-5n)$$

(但し $M = S_+$) とできる。 $R_n = S/P_n$ と
おき x_n, y_n を R_n の一次のパラメーター系とに

$$g_n : R_n^2 \longrightarrow R_n$$

を $g_n(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = ax_n + by_n$ で定めると,

$$v_{R_n}(\mathrm{Ker}\, g_n) = n+1$$

となる。 $Q_n = (R_n)_+$ とおき,

$$B = \bigotimes_{n=1}^{\infty} R_n$$

とせよ。 $A = T^{-1}B \quad (T = B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n B)$
とおけば, $\{f_n = A \otimes_{R_n} g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と共に
ねらった性質をもつことが たしかめられる。 //

References

[1] D. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebra structures for finite free resolutions and some structure theorems for ideals of codimension 3 , Amer. J. Math. 99 (1977), 447-485.

[2] O. Forster, Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring, Math. Z. 84 (1964), 80-87.

[3] T. H. Gulliksen, Tout idéal premier d'un anneau noethérien est associé à un idéal engendré par trois éléments, C. R. Acad. Sc. Paris, 271 (1970), 1206-1207.

[4] M. Hocster, Contracted ideals from integral extensions of regular rings, Nagoya Math. J. 51 (1973), 25-43.

[5] E. Kunz, Almost complete intersections are not Gorenstein rings, J. Algebra, 28 (1974), 111-115.

[6] Y. Quentel, Sur l'uniforme cohérence des anneaux noethériens, C. R. Acad. Sc. Paris, 275 (1962), 753-755.

[7] J. Sally, Numbers of generators of ideals in local rings, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 35, Marcel Dekker.

[8] J.-P. Soublin, Anneaux et modules cohérents, J. Algebra, 15 (1970), 455-472.