数理解析研究所講究録
第465巻 1982年 37-45

Rees algebra の Gorenstein 性について。

名大 理学部　池田 信

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noetherian local rings とする。

$$R(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n \quad , \quad G(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$$

とおき $R(A)$ を A の Rees algebra $G(A)$ を A の associated graded ring という。$\mathfrak{m} = (a_1, \cdots, a_v)$ とすると，$R(A)$ は一変数多項式環 $A[X]$ の subring $A[a_1X, \cdots, a_vX]$ と同一視することができる。$\deg X = 1$ とおくことによって $R(A)$ に graded ring の構造が入る。$M = (a_1, \cdots, a_v, a_1X, \cdots, a_vX)R(A)$ とおく。

本稿の目的は $R(A)$ が Gorenstein になるための条件を与えることである。A が Cohen-Macaulay のときには，後藤氏と下田氏によって得られた次の結果がある。

<u>定理</u>　A を Cohen-Macaulay，$d = \dim A \geq 2$ とすると，$R(A)$ が Gorenstein ring になるための必要十分条件は $G(A)$ が Gorenstein ring であり $a(G(A)) = -2$ となることである，ただし

$$a(G(A)) = \max\{ n \mid H_M^d(G(A))_n \neq 0 \}。$$

“R(A)がGorensteinならばAもそうであるか？”という問題を考えるのは自然であろう。しかしこれは一般には正しくない。実際，3次元Buchsbaum, non-Cohen-Macaulay local ringでRees algebraがGorensteinになるものがある。したがって上述の定理を一般化する必要がある。本稿の主定理は次のように述べることができる。

<u>定理1</u>. $d=\dim A \geqq 2$, K_A, $K_{G(A)}$をそれぞれA, $G(A)$のcanonical moduleとする。このとき次は同値，

1) $R(A)$はGorenstein

2) a) $R(A)$はCohen-Macaulay,

 b) $K_A \cong A$

 c) $K_{G(A)} \cong G(A)(-2)$.

§1 準備。

以後，簡単のため，kは無限体とする。まず$R(A)$がCohen-Macaulayになるための条件を思い出そう。

<u>Proposition 1</u> $d=\dim A \geqq 1$とすると次は同値。

1) $R(A)$はCohen-Macaulay.

2) a) $a(G(A))<0$

 b) $i<d$に対して

$$H^i_M(G(A))_n = \begin{cases} H^i_m(A) & (n=-1) \\ (0) & (n \neq -1) \end{cases}$$

このとき，A，G(A)はBuchsbaumで$I(A)=I(G)$。

次に，定理1を証明するために必要な事実を述べる。

<u>Lemma 2</u>　$l(H^i_m(A))<\infty$，$i<\dim A$ とする，ここで $l(E)$ はA-module Eの長さを表す。このとき，

$$H^{d+1}_M(R(A))_n = (0),\quad n \geq 0 。$$

証明は次元に関するinductionで容易にできる。

<u>Lemma 3</u>　$\dim A = d \geqq 2$ とする。$a \in m$ を m のminimal reductionのminimal generatorの一部になるものとする。

$\overline{R} = R(A)/(a, aX)$ とおくと，$R(A)$がGorensteinのとき $H^{d-1}_M(\overline{R})=(0)$ となる。

（証明）簡単のため，$R=R(A)$とおく。RはGorensteinだからlocal dualityにより，$\mathrm{Ext}^1_{R/aR}(\overline{R}, R/aR)=(0)$ を示せばよい。$m=(a, a_2, \cdots, a_v)$ とすると，次のexact sequenceがある。

$$(R/aR)^{v-1} \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_v \end{bmatrix}} R/aR \xrightarrow{aX} R/aR \to \overline{R} \to 0$$

よって，

$$\mathrm{Ext}^1_{R/aR}(\overline{R}, R/aR) = \frac{(aR : mR)}{(a, aX)R} = \frac{(a, aX)R}{(a, aX)R} = (0) 。$$

Lemma 4　$R(A)$が Cohen-Macaulay, $\mathrm{Hom}_{R(A)}(k, H_M^d(G(A)))_n = 0$　$n \neq -2$ とすると, $\mathrm{Hom}_{R(A)}(k, H_M^{d+1}(R(A)))_n = 0$　$n \neq -1$

(証明)　$R = R(A)$, $G = G(A)$ とおく。

$$0 \to R_+ \to R \to A \to 0 \ (exact)$$

$$0 \to R_+(1) \to R \to G \to 0 \ (exact)$$

より

$$0 \to H_m^d(A) \to H_M^{d+1}(R_+) \to H_M^{d+1}(R) \to 0 \ (exact)$$

$$0 \to H_M^d(G) \to H_M^{d+1}(R_+)(1) \to H_M^{d+1}(R) \to 0 \ (exact).$$

Socle をとると,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(k, H_m^d(A)) \to \mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R_+)) \to \mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R)) \to \mathrm{Ext}_R^1(k, H_m^d(A)) \ (exact),$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(k, H_M^d(G)) \to \mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R_+))(1) \to \mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R)) \ (exact).$$

これより, $\mathrm{Ext}_R^1(k, H_m^d(A))_n = 0$, $n \leqq -2$ に注意すると,

$$\mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R_+))_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R))_n, \quad n \leqq -2,$$

$$\mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R_+))_n \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R))_{n-1}, \quad n \leqq -2.$$

したがって, $\mathrm{Hom}_R(k, H_M^{d+1}(R))_n = 0$, $n \leqq -2$。結論は Lemma 2より出る。

§2　定理1の証明。

1) ⇒ 2)。次の exact sequence がある。

$$(*)\left\{\begin{array}{l} 0\to H_M^{d-1}(\bar{R})\to H_m^d(A)\to H_M^{d}(R/axR)\to H_M^d(\bar{R})\to 0 \\ \\ 0\to H_M^{d-1}(\bar{R})\to H_M^d(G)(-1)\to H_M^d(R/aR)\to H_M^d(\bar{R})\to 0, \end{array}\right.$$

ただし，a は Lemma 3 のようにとる。Lemma 3 より，

$H_M^{d-1}(\bar{R})=0$。Socle をとることにより，2) の a), c) が出る。

2) ⇒ 1)。(*) より $H_M^{d-1}(\bar{R})=0$ がわかる。Lemma 2 より，

$H_M^d(\bar{R})_n=0$，$n\geqq 0$，c) と Lemma 4 より

$\mathrm{Hom}_R(k, H_M^d(R/axR))_n=0 \quad n\neq 0$ がわかる。Socle をとることにより，

$$k\cong \mathrm{Hom}_R(k, H_m^d(A))\cong \mathrm{Hom}_R(k, H_M^d(R/axR))\ 。$$

よって，R は Gorenstein。

§3 example。

Example の構成のため，次の結果を用いる。

Proposition 5 (A, m, k) を 3 次元 Noetherian local ring $\mathfrak{q}=(a_1, a_2, a_3)$ を m の minimal reduction とする。

$I=(a_1,a_2):a_3+(a_2,a_3):a_1+(a_1,a_3):a_2+m^2$ とおく。

このとき次は同値.

1) R(A) は Cohen-Macaulay

2) a) $m^3=\mathfrak{q}m^2$

b) $\ell(I/\mathfrak{m}^2) = 3(\ell(A/\mathfrak{q}) - e(A)) + 3$，ただし，$e(A)$ は A の multiplicity。

さて，A を 3 次元 local ring で $R(A)$ が Cohen-Macaulay とする。A の embedding dimension が 6 とする。A が Cohen-Macaulay でないとすると，

$$6 \leqq \ell(I/\mathfrak{m}^2) \leqq \ell(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 6$$

よって，$\mathfrak{m} = I$。Prop 1 より，A が Buchsbaum であることに注意すると，$\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}$。したがって A は maximal embedding dimension の Buchsbaum ring。$I(A) = \ell(A/\mathfrak{q}) - e(A) = 1$ だから，$\mathrm{emb}(A) = e(A) + \dim A + I(A) - 1$ より，

$e(A) = 3$。

<u>Example</u>　k を $ch(k) = 2$ の体，$X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ を不定元とする。

$$A = k[[X_1, X_2, X_3, Y_1, \cdots, Y_4]]/\mathfrak{a} = k[[x_1, x_2, x_3, y_1, \cdots, y_4]]$$

$\mathfrak{a} = (X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3,\ Y_1^2,\ Y_2^2,\ Y_3^2,\ Y_4^2,\ Y_1Y_4,\ Y_2Y_4,\ Y_3Y_4,\ Y_1Y_2 - X_3Y_4,\ Y_2Y_3 - X_1Y_4,\ Y_1Y_3 - X_2Y_4)$ とおくと，A は non-Cohen-Macaulay Buchsbaum ring で $R(A)$ は Gorenstein である。

(証明) 次の exact sequence を考えよう。

(☆) $0 \to A/(0:y_4) \to A \to A/y_4A \to 0$

$A/y_4A \cong k[[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]]/(X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3, (Y_1,Y_2,Y_3)^2)$
Prop5より A/y_4A の Rees algebra $R(A/y_4A)$ は Cohen-Macaulay である。上の注意より $e(A/y_4A)=3$ 。一方，$ch(k)=2$ であることに注意すると，

$$(0:y_4)=(y_1, \cdots, y_4)$$

よって，$A/(0:y_4) \cong k[[X_1, X_2, X_3]]$ とくに $e(A/(0:y_4))=1$。(☆) より $e(A)=4$。

$q=(x_1, x_2, x_3)$ とおくと $l(A/q)=5$。簡単な計算により $l(I/m^2)=6$。Proposition 5より，$R(A)$はCohen-Macaulay。 $\mathfrak{a}$はhomogeneous polynomialで生成されているので $K_{G(A)} \cong G(A)(-2)$ を示せば十分。$\mathfrak{b}$を$\mathfrak{a}$の生成元で生成された $k[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]$ の idealとすると，

$$G(A) \cong k[X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4]/\mathfrak{b} = k[x_1, \cdots, y_4]。$$

$S=k[x_1, x_2, x_3]$ とおくと，$G(A)$は有限生成 S-module 。$G(A)$のcanonical moduleを計算しよう。Sは多項式環と同型で$G(A)$はS-module として $1, y_1, \cdots, y_4$で生成されていることから次の exact sequence を得る。

$$0 \to S(-2) \xrightarrow[{[0\ x_1\ x_2\ x_3\ 0]}]{} S \oplus S(-1)^4 \xrightarrow[\varphi]{} G(A) \to 0,$$

ここで，$S \oplus S(-1)^4$の base $e_0, \cdots, e_4$ は，$\varphi(e_0)=1$, $\deg e_0=0$，

$\varphi(e_i)=y_i$, $\deg e_i=1$ $(1\leqq i\leqq 4)$となるようにとる。

$$K_{G(A)}=\mathrm{Hom}_S(G(A),S(-3))$$
$$=\ker(\mathrm{Hom}_S(S\oplus S(-1)^4,S(-3))\longrightarrow \mathrm{Hom}_S(S(-2),S(-3)))$$

だから，$K_{G(A)}$はS-moduleとしてe_0^*, $x_3e_2^*-x_2e_3^*$, $-x_3e_1^*+x_1e_3^*$, $x_2e_1^*-x_1e_2^*$, e_4^*で生成される，ただし，e_i^*はe_iのdual baseで$\deg e_0^*=3$, $\deg e_i^*=2$ $(1\leqq i\leqq 4)$。 $G(A)$は$K_{G(A)}$に，

$(g\cdot f)(h)=f(gh)$ $\quad f\in \mathrm{Hom}_S(G(A),S(-3))$, $g,h\in G(A)$と作用している。$ch(k)=2$であることに注意すると，

$$y_4\cdot e_4^*=e_0^*$$
$$y_1\cdot e_4^*=x_3e_2^*-x_2e_3^*$$
$$y_2\cdot e_4^*=-x_3e_1^*+x_1e_3^*$$
$$y_3\cdot e_4^*=x_2e_1^*-x_1e_2^*$$

となることがわかる，これは，$K_{G(A)}\cong G(A)(-2)$を示している。

<u>Remark</u>。 $\dim A=3$のとき，$R(A)$がGorensteinならば

$$\dim_{A/m} m/m^2=3h+4\ ,\quad h=\ell(H_m^2(A))$$

となることが知られている。この意味で，上述のexampleは最も簡単なものである。

Reference

[1] S. Goto and Y. Shimoda, On Rees algebras of Cohen-

Macaulay rings, preprint.

[2] S. Gato and K. Watanabe, On graded rings. I. J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 179-213.

[3] S. Ikeda, The Cohen-Macaulayness of Rees algebras of local rings, to appear in Nagoya Math. J. 51 (1973), 25-43.