数理解析研究所講究録
第 465 巻 1982 年 61-66

次数付きNoether環の有限生成性について

日大文理　後藤四郎
東京理科大　山岸規久道

1. 序.　次数付き可換環 $A=\bigoplus_{n\geq 0} A_n$ がNoether環である $\Longleftrightarrow$ A_0 がNoether環でかつイデアル $A_+=\bigoplus_{n>0} A_n$ が有限生成, さらにこのとき A は A_0-代数として有限生成である ―― ということはよくご存じのことと思いますが, 本稿の目的はこれらの結果を(下で定義する) H-次数付き環へ拡張しようというものです。

以下, 考える環はすべて可換環とする。まず, 次数付き環の定義を振り返ろう。

<u>定義</u>. H はAbel群(演算は+)とする。環 A が H-次数付き環であるとは, A の加法に関する部分群の族 $\{A_h\}_{h\in H}$ で ① $A=\bigoplus_{h\in H} A_h$, ② $A_f A_g \subseteq A_{f+g}$ $(f,g \in H)$ をみたすものが存在することである。

この定義の下に我々の結果を述べると

定理. Hは有限生成Abel群, AはH-次数付き環とせよ。すると次の3つの条件は同値である。

(1) AはNoether環である。

(2) A_0はNoether環であり, かつAはA_0-代数として有限生成である。

(3) Aのすべての斉次イデアルが有限生成。

この定理から導びかれる結果として

系. Sは有限生成Abel群Hの部分半群で$0 \in S$とせよ。このとき, $k[S]$がNoether環 $\Longleftrightarrow$ kがNoether環でSが有限生成。

$H=\mathbb{Z}$の時, 定理の(1)と(3)の同値はすでにMatijevic [M] によって示されている。

2. 定理の証明。

補題.1. $R \subset S$は環の拡大でさらに$R <_{\oplus} S$とせよ。IはRのイデアルとする。このとき, イデアルISはS上有限生成 $\Longleftrightarrow$ IはR上有限生成。

補題 2. $B = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} B_s$ は $\mathbb{Z}$-次数付き環とし、$B_+ = \bigoplus_{s>0} B_s$, $B_- = \bigoplus_{s<0} B_s$ とおく。

(1) 0次の元で生成された斉次イデアルがすべて有限生成なら、B_0 は Noether 環である。

(2) B_+B, B_-B, B_sB $(s\in\mathbb{Z})$ がすべて有限生成イデアルなら、B は B_0-代数として有限生成である。

(証明) (1) は補題 1。(2) を示す。B_+B は有限生成だから、$B_+B = (f_1, \cdots, f_s)B$ $(\deg f_i > 0,\ 1 \leqq i \leqq s)$, 同様に $B_-B = (g_1, \cdots, g_t)B$ $(\deg g_j < 0,\ 1 \leqq j \leqq t)$ と表わせる。$d = \mathrm{Max}\{\deg f_i \mid 1 \leqq i \leqq s\}$, $d' = \mathrm{Min}\{\deg g_j \mid 1 \leqq j \leqq t\}$ とおき、さらに

$$C = B_0[B_s \mid d' \leqq s \leqq d]$$

とおく。すると、

Claim. $C \supset B_+$.

$C \supset B_-$ も同様に示せるから、$C = B$ を得る。一方 B_sB が有限生成より、B_s は B_0-加群として有限生成 (参 補題 1.), よって C は有限生成 B_0-代数である。

定理の証明.

(3) ⇒ (2) のみを示す。H の torsion 群を T とおけば、$H = \mathbb{Z}^n \oplus T$ $(\exists n > 0)$. 2つの場合に分けよう。

㋐ $T = (0)$ の場合。$H = \mathbb{Z}^n$ なので、n に関する帰納法を用

いる。 $n=1$ のときは補題2の(2). $n\geqq 2$ とせよ。

$h\in\mathbb{Z}^n$ に対して, $|h|=\sum_{i=1}^{n}h_i$ とおく。今 $s\in\mathbb{Z}$ に対し

$$B_s=\bigoplus_{h\in\mathbb{Z}^n,\ |h|=s}A_h$$

とおけば, 族 $\{B_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ は環 A に $\mathbb{Z}$-次数付けを与える。

この $\mathbb{Z}$-次数付き環を B で表わせば, B のイデアル B_+B, B_-B, B_sB $(s\in\mathbb{Z})$ は, A のイデアルとしても斉次であるから, これらはすべて有限生成。補題2の(2)より, B は B_0-代数として有限生成である。

次に, $L=\{h\in\mathbb{Z}^n \mid |h|=0\}$ とし, $\alpha:\mathbb{Z}^{n-1}\to L$ は $\alpha((g_1,g_2,\cdots,g_{n-1}))=(g_1,g_2,\cdots,g_{n-1},-\sum_{i=1}^{n-1}g_i)$ と定められる群同型とする。 $C_g=A_{\alpha(g)}$ $(g\in\mathbb{Z}^{n-1})$ とおけば, 族 $\{C_g\}_{g\in\mathbb{Z}^{n-1}}$ は環 $C=B_0$ に $\mathbb{Z}^{n-1}$-次数付けを与える。

$C<_{\oplus}A$ であり, C の斉次元は A においても斉次元であるから, 補題1より環 C は定理の条件(3)をみたしている。n に関する帰納法から, C は有限生成 C_0-代数. 先の結果と合わせて, A が有限生成 A_0-代数であることを知る。

④ 一般の場合. 射影 $p:H=\mathbb{Z}^n\oplus T\to T$ を考え,

$$D_t=\bigoplus_{h\in H,\ p(h)=t}A_h \quad (t\in T)$$

とおく。族 $\{D_t\}_{t\in T}$ は環 A に T-次数付けを与える。この T-次数付き環を D とする. D の斉次元は A の斉次元でもあるから, D_tD $(t\in T)$ は有限生成。故に, D_t は有限

生成D_0-加群であるので，D自身有限生成D_0-加群（∵Tは有限群）．一方D_0は$\mathbb{Z}^n$-次数付き環であることは明らかで，⑦よりD_0はA_0-代数として有限生成．これらのことから，Aは有限生成A_0-代数であり，よって定理の証明を得る。

3. 例．　この節で述べる例は，遠藤氏が後藤にあてた手紙の中で教えてこられたもので，我々の定理はAbel群Hが有限生成でないと一般に正しくないことを示している。

kは体，$p>0$は素数とし，さらに$H=\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$とおく。このとき次の①〜④をみたす$H$-次数付き環$A=\bigoplus_{h\in H}A_h$が存在する。①$A$は体で$A_0=k(X)$，ここで$X$は$k$上の不定元。②$A$は$A_0$上代数拡大．③$[A:A_0]=\infty$．④$A_h\neq(0)$　$(h\in H)$．

（証明）Xはk上の不定元とし，関数体$k(X)$の代数的閉包をEとせよ。Eの元の無限列

$$X=X_0,\ X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_i,\ \cdots.$$

を，$X_i^p=X_{i-1}^p$　$(1\leqq i)$となるようにとる。このとき，

$$A=\bigcup_{i=0}^{\infty}k(X_i),$$

$$A_h=k(X)X_\ell^a\quad\left(h=\frac{a}{p^\ell}\bmod\mathbb{Z},\ a\in\mathbb{Z},\ \ell>0\right)$$

と定める。族$\{A_h\}_{h\in H}$は環AにH-次数付けを与え，

このようにして得られたH-次数付き環Aが今また求めるものである。

後記． これらの結果を論文[G-Y]にまとめる予定です。

References

[M] J. R. Matijevic, Some topics in graded rings, Thesis, University of Chicago, 1973.

[G-Y] S. Goto and K. Yamagishi, Finite generation of Noetherian graded rings, in preparation.