数理解析研究所講究録
第 465 巻 1982 年 80-95

ASL (Algebras with straightening laws) に関するいくつかの結果.

名工大　渡辺 敬一

序

ASLの概念は不変式論にあらわれる "straightening formula" を公理化したもので，不変式論に於ては，[2]，[5] に見られるように，「Gが半単純代数群，Pをその極大 parabolic subgroup，XをG/PのSchubert subvariety，$\mathcal{L}$をG/P上のample inv. sheaf とするとき，Xの $|\mathcal{L}|$ による埋め込みの同次座標環はCohen-Macaulay, normalである」という事実の証明に寄与している。

一方では，ASLは多項式環をいくつかのsquare-free な monomials から生成される ideal で割って得られるような環（Stanley-Reisner 環と最近呼ばれる）の flat deformation となっている。flat deformation で Cohen-Macaulay, Gorenstein 等の性質が保存される事に注目した公理化も [3]，[1] 等に見られる。

ここで筆者が扱いたいと思うのは　ASLという公理の

下にどこまでの事が云えるかを見てみようというものである。ある公理が与えられたとき，より簡単な場合からつめていって其の公理のもつ意味を探ろうという方法は自然なものと思うが，ここでは一番簡単な2次元整域の場合の構造決定および3次元のいくつかの例などから，ASLの性質を探ってみたい。現在の段階としてはASLというカテゴリーが市民権を得るかどうかまだわからない状態だが，大雑把ながらも，ある（関係式をたくさんもつ）環がある partially ordered set という比較的構造の単純なものと結びついて表わされるという事は何らかの意味があるのではないかと思う。

§1．定義と簡単な性質の復習．

H を finite partially ordered set（以下 poset 略す），R の環（1をもつ可換環），A を可換な R-algebra とする。今，H が A の subset となっているとき，H の元の積を <u>monomial</u>，$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$（$\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in H$）が $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_n$ をみたすとき，この monomial が <u>standard monomial</u> であるという。

<u>定義</u>．A が <u>ASL</u> (algebra with straightening laws) <u>on H over R</u> とは，次の (ASL-1)，(ASL-2) をみたす事である。

（ASL-1）A は R-free module で standard monomials を

free basis として もつ.

(ASL-2). $\alpha, \beta \in H$, $\alpha \not\sim \beta$ ($\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha \not\leq \beta$ かつ $\beta \not\leq \alpha$) であるとき, $\alpha \cdot \beta$ は standard でないから, standard monomials の和に一意的に表わされる筈である((ASL-1) より.)

$$\alpha\beta = \sum_{i=1}^{s} r_i \gamma_{i1}\gamma_{i2}\cdots\gamma_{in_i} \qquad (\underset{(i=1,\cdots,s)}{\gamma_{i1} \leq \gamma_{i2} \leq \cdots \leq \gamma_{in_i}},\ r_i \in R.)$$

をその表現とするとき, 各 i について, $\alpha \geq \gamma_{i1}$, $\beta \geq \gamma_{i1}$, $n_i \geq 1$.

(1.2). (i) $\alpha \not\sim \beta$, $\alpha, \beta \geq \gamma$ なる $\gamma \in H$ が存在しないとき,

$\alpha \cdot \beta = 0$.

(ii) $I \subset H$ が「$\alpha \in I, \beta \leq \alpha \Rightarrow \beta \in I$」をみたすとき, 「poset ideal」という。A が ASL on H over R, $I \subset H$: poset ideal, (I) を I で生成される A の ideal とすると, $A/(I)$ は ASL on $H \setminus I$, over R となる. $\alpha \in H$ のとき,

$I_\alpha = \{\beta \in H \mid \beta \not\geq \alpha\}$ とおくと,

I_α は poset ideal。$H_\alpha = H \setminus I_\alpha = \{\beta \in H \mid \beta \geq \alpha\}$ とおくと $A/(I_\alpha)$ は poset H_α 上の ASL となる。特に α が H の極大元であるとき, $H_\alpha = \{\alpha\}$, $A/(I_\alpha) \cong R[\alpha]$ (R 上の一変数多項式環)。

H の各元は A の元を表す他に, A のある ideal (又は Spec(A) のある closed subset) と対応しているという事実を注目したい。

(1.3) (いくつかの基本的性質) $R = k$: 体とする。

(i) $\dim A = (H$ の max. chain の長さ$) + 1$

(ii) Aは常に reduced.

(iii) $k[H] = k[X_\alpha \mid \alpha\in H]/(X_\alpha X_\beta \mid \alpha \not\sim \beta)$ とおくと，もし $k[H]$ が Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein, locally complete intersection) ならば $\forall\alpha\in H$ を含む A の maximal ideal m について A_m も同じ性質をもつ．特に，A が graded ring で H の各元が homogeneous で正の degree をもつとき，A は Cohen-Macaulay (resp. ⋯) である。

(iv) A が graded ring, H の各元の degree がすべて 1 のとき A の multiplicity $= \#\{H$ の max. chain$\}$.

($\mathrm{Proj}(A) = X \hookrightarrow \mathbb{P}^{|H|-1}$ とするとき，$\deg X =$ (A の multiplicity))

以下，A が graded ring で H の各元が homog.，正の degree をもつ場合を考える。このとき単に「A は graded ASL」であるという。更に $\forall\alpha\in H$, $\deg\alpha = 1$ のとき「A は homogeneous ASL」である という事にしよう。

A が graded ASL のとき，A の Poincaré series を $P(A,t)$ で表わす。$P(A,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim A_n \cdot t^n$. は次のように表わされる。

$$P(A,t) = \sum_{\substack{\alpha_1 \lneq \cdots \lneq \alpha_s \\ \alpha_i\in H,\ s\geq 0}} \frac{t^{\deg\alpha_1 + \cdots + \deg\alpha_s}}{(1-t^{\deg(\alpha_1)}) \cdots\cdots (1-t^{\deg\alpha_s})}$$

(左辺は空集合を含む H の相異なる chain を動く).

(1.4)

Aが体k上のgraded ring, $\dim A = d$, $A_+ = \bigoplus_{n>0} A_n = \mathfrak{m}$とおくとき,

$$a(A) = \max\{n \mid H^d_{\mathfrak{m}}(A)_n \neq 0\}$$

と定めた。(詳しくは[6]参照) この不変量$a(A)$について次の三つの事実を注意しておきたい。

(i) $\alpha \in A_d$, αはAのnon-0-divisorのとき,

$$a(A/\alpha A) = a(A) + d.$$

(ii) A'がAのgraded subring, Aは有限生成A'-加群で A'-加群としてのA/A'の次元 $< \dim A'$ のとき, $a(A') \geqq a(A)$

(iii) AがCohen-Macaulayのとき, $P(A,t) = \dfrac{f(t)}{g(t)}$, $f(t), g(t) \in \mathbb{Z}[t]$とするとき, $a(A) = \deg(f(t)) - \deg(g(t))$.

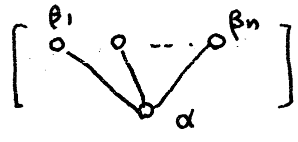
特にAがASL on H over kのとき, AがCohen-Macaulayとすると,

(iv) $a(A) \leqq 0$, $a(A) < 0 \iff \tilde{\chi}(H) = 0$ 但し,

$$\tilde{\chi}(H) = \sum_{s=-1}^{\infty} (-1)^s \cdot \#(H\text{の長さ}\ s\ \text{の chain}).$$

§2. 二次元ASL domain

この節ではAはgraded ASL domain on H over k, kは代数閉体とする。AはdomainだからHは唯一つのminimal element αをもつ。この事から $H =$



となる。二次元 graded ASL に関する主定理は,

定理 (2.1). (i) A は normal である。

(ii) A は rational singularity, $\mathrm{Proj}(A) \cong \mathbb{P}^1_k$.

(iii) I_{β_i} の零点を $a_i \in \mathbb{P}^1$ とする (便宜上 $a_i \neq \infty$ にとる).

$n \geq 3$ のとき, $\deg \alpha = 1$ で, $\deg \beta_i = d_i$ とおくと, (ASL-2)は

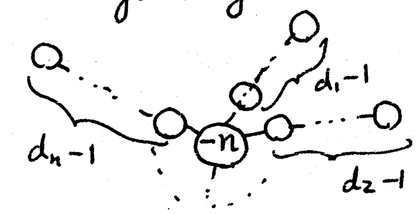
$$\beta_i \beta_j = \frac{1}{a_i - a_j}\left(\beta_i \cdot \alpha^{d_j} - \beta_j \alpha^{d_i}\right)$$

の形となる。

(注) normal が言えたとき, A を表わす方法は, Demazure による有理係数 divisor を用いるものと, resolution を与えるものとある。Demazure流の A の表示は

$A = R(\mathbb{P}^1, D)$, $D = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i}(a_i)$ ($R(\mathbb{P}^1, D)$ の表示については, [7] 参照).

Spec(A) の singularity の resolution の dual graph は,



(○は self-intersection number $=-2$の $\mathbb{P}^1$ を表わす.)

(証明). $n=1$ のとき $A = k[\alpha, \beta_1]$, $n=2$ のとき

$$\beta_1\beta_2 = \alpha \cdot f(\alpha, \beta_1) + \alpha \cdot g(\alpha, \beta_2) \qquad \text{(ASL-2)}.$$

$\deg \beta_1 \leq \deg \beta_2$ とすると, g は β_2 に関して一次式. ゆえに,

$$\beta_1\beta_2 = \alpha \cdot f(\alpha, \beta_1) + \beta_2 \cdot g(\alpha)$$

とおいて良い. $\beta_1' = \beta_1 - g(\alpha)$ とおくと, $\beta_1'\beta_2 = \alpha \cdot f'(\alpha, \beta_1')$.

$F(x,y,z) = yz - x\cdot f(x,y)$ とおくと，F が既約なら，$f(x,0) \neq 0$．このとき $(F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$ は (x,y,z)-primary ideal より，$k[x,y,z]/(F)$ は normal.

以下に於て $n \geqq 3$ とする。まず $\deg \alpha = 1$ と仮定すると，$a(A) = -\deg(\alpha) < 0$ (1.4). $H^2_m(A)_0 \cong H^1(X, \mathcal{O}_X)$ ($X = \mathrm{Proj}(A)$). $\therefore H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ X は irreducible, reduced, $\dim X = 1$ だから，$X \cong \mathbb{P}^1_k$ (ここで $k = \bar{k}$ を使う). A が normal を云うのに，次の補題を使う.

補題. R が integral domain, $x \in R$, $x \neq 0$. もし R/xR が reduced で R_x が normal なら R は normal.

今，$A/\alpha A$ は ASL だから reduced. A_α が normal を云えば良いが，$\mathrm{Spec}((A_\alpha)_0)$ は $X = \mathrm{Proj}(A)$ の affine open set $D_+(\alpha)$ で，$X \cong \mathbb{P}^1$ より normal. $\therefore A_\alpha = (A_\alpha)_0[\alpha, \alpha^{-1}]$ は normal.

A は normal graded ring だから $A = R(\mathbb{P}^1, D)$ の形で書ける. $\alpha \in A_1$ だから，D は α で決まる divisor として良い. $A/\alpha A$ は reduced. $\deg \beta_j = d_j$ とおくと，$V_+(I_{\beta_j}) = a_j$ とするとき，$D = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_j}\cdot(a_j)$. $\therefore A = \bigoplus_{n \geqq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD))\cdot T^n$, $k(X) = k(x)$ とすると，$A = k[T, \frac{1}{x-a_1}\cdot T^{d_1}, \ldots, \frac{1}{x-a_n}\cdot T^{d_n}]$ ($\alpha = T$, $\beta_j = \frac{1}{x-a_j}\cdot T^{d_j}$). $\beta_i \beta_j = \frac{1}{a_i - a_j}(\beta_i \alpha^{d_j} - \beta_j \cdot \alpha^{d_i})$ をみたし，(ASL-1) は部分分数展開の一意性から示される。

従って定理を証明するには，$n \geqq 3$，$\deg \alpha \geqq 2$ として矛盾を出せば良い。

$\bar{A}$ を A の正規化とする。$\bar{A}$ も k 上の graded ring である。

$$0 \to A \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow \bar{A}/A \to 0$$

の local cohomology long exact sequence をかくと，

$$H^2_m(A) \to H^2_m(\bar{A}) \longrightarrow 0 = H^2_m(\bar{A}/A).$$

ゆえに，$a(\bar{A}) \leqq a(A) = -\deg \alpha \leqq -2$.　$a(\bar{A}) \leqq -2$ なる $\bar{A}$ を分類して見よう。Demazure の記法により，（[7] 参照）.

$$\bar{A} = R(X, D) \quad , \quad X = \mathbb{P}^1, \quad D = s\cdot(P) + \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i}{q_i}\cdot(P_i)$$

とかく．但し $P_1, \cdots, P_r$ は $\mathbb{P}^1$ の相異る点，$(P), (P_i)$ は対応する divisor，$s \in \mathbb{Z}$，$0 < p_i < q_i$ $(i=1, \cdots, r)$，$\deg D = s + \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i}{q_i} > 0$ とする。[7] により，$K_{\bar{A}}$ は次で与えられる．

$$K_{\bar{A}} \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}(K_X + \sum_{i=1}^{r} \frac{q_i - 1}{q_i}(P_i) + nD))\cdot T^n$$

$a(\bar{A}) \leqq -2$ より $(K_{\bar{A}})_n = 0$ $(n \leqq 1)$ である。$n = 1, -1$ に注目すると，

$$\deg(K_X + \llcorner \sum_{i=1}^{r} \frac{q_i - 1}{q_i}(P_i) + D \lrcorner) = -2 + s + r \leqq -1$$

$$\deg(K_X + \llcorner \sum_{i=1}^{r} \frac{q_i - 1}{q_i}(P_i) - D \lrcorner) = -2 - s \leqq -1$$

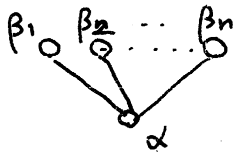
を得る。これと $\deg D > 0$ である事より，r, s のとり得る値は次のいずれかに限られる．

(a)　$r = 2$，$s = -1$

(b)　$r = 1$，$s = 0$

(c)　$r = 0$, $s = 1$　（このとき A は二変数多項式環）.

点 P_i はどこにとっても環としては同型だから，(a) の場合 $D = \frac{p_1}{q_1}\cdot(\infty) + \frac{p_2-q_2}{q_2}\cdot(0)$，(b) のとき，$D = \frac{p}{q}\cdot(\infty)$，(c) のとき $D = (\infty)$ とおいて良い。いずれの場合も，$k(X) = k(x)$ とおいて，$R(X, D) = \bar{A} \subset k[x, T]$ である。さて，poset H に於て，



$\beta_i \in H$　は点　P_i に，$P_i = V_+(\alpha, \beta_1, \cdots \hat{\beta_i}, \cdots, \beta_n)$

$(n \geqq 3)$

として対応していた。ゆえに，$\alpha^a/(\beta_i)^b$ が degree 0 になるような a, b をとると $(a, b > 0)$，$\alpha^a/(\beta_i)^b$ は P_i で零である。従って

(イ)　α^a が $(\beta_i)^b$ より高位の零点を P_i でもつ　　か又は

(ロ)　$(\beta_i)^b$ が a^α より高位の極を P_i に於てもつ

かいずれかの筈である。上の場合で，まず (c) の場合を考察しよう。

<u>Case</u> (c)　$r = 0$, $s = 1$;　$D = (\infty)$ のとき $\bar{A} = k[T, xT]$.

$a(\bar{A}) = -2 \leqq a(A) = -\deg(\alpha)$, $\deg \alpha > 1$ としたから, $\deg \alpha = 2$.

β_i に於て上の (イ), (ロ) の条件を考えよう。$P_i \neq \infty$ のとき，$A \subset \bar{A} \subset k[T, xT]$ だから，α, β_i は P_i で正則．ゆえに α は P_i で 0 にならなければいけない。ところが，$\alpha \in H^0(X, \mathcal{O}(2D))$ で，$H^0(X, \mathcal{O}(2D))$ の元は x の二次式だから，高々 2 つの零点しかもたない。また，$\beta_i = \infty$ で (ロ) が起るためには，α は x の一次以下の式でなければならず，すると α は高々一個の零点しか

ない。ゆえに $\overline{A}$ の graded subring A が grade を保ったまま poset $H = \left[\beta_1 \ \beta_2 \cdots\cdots \beta_n \ \alpha \quad (n \geqq 3)\right]$ 上の ASL になる事は不可能である。

Case (a), (b) の場合は次の事実に注意しよう.

<u>補題</u>. $m \in \mathbb{Z}$, $0 < m \leqq -a(\overline{A})$ とする。

(i) $D = \frac{p}{q}(\infty)$ のとき, $\dim \overline{A}_m \leqq 2$.

(ii) $D = \frac{p_1}{q_1}\cdot(\infty) + \left(-1 + \frac{p_2}{q_2}\right)\cdot(0)$ のとき, $\dim \overline{A}_m \leqq 1$.

この補題が云えると, $m = \deg \alpha = -a(A)$ とおくと, $0 < m \leqq -a(\overline{A})$ で, $\alpha \in A_m \subset \overline{A}_m$. $H^0(X, \mathcal{O}(mD))$ の basis は (i) の場合 $\{1\}$ 又は $\{1, x\}$, (ii) の場合 $\{x^l\}$ の形だから, $n \geqq 3$ のとき, 相異なる $P_1, \cdots, P_n \in X$ に対して前頁の (イ) 又は (ロ) が成立する事は不可能である。

(補題の証明) (i) の場合, $-a(\overline{A})$ は $\deg \lfloor (l \cdot \frac{p}{q} + \frac{q-1}{q}) \cdot (\infty) \rfloor \geqq 2$ なる最小の l で, 即ち, $l \cdot \frac{p}{q} > 1$ なる最小の l である。この l に対して, $l \cdot \frac{p}{q} < 2$ はあきらかだから, $\deg \lfloor lD \rfloor = 1$. $0 < l' < l$ なる l' についても当然, $\deg \lfloor l'D \rfloor \leqq 1$ だから,

$$\dim \overline{A}_m = \dim H^0(X, \mathcal{O}(mD)) = \deg \lfloor mD \rfloor + 1 \leqq 2.$$

(ii) の場合 $\deg \lfloor mD + \frac{q_1 - 1}{q_1}(\infty) + \frac{q_2 - 1}{q_2}(0) \rfloor$ と $\deg \lfloor mD \rfloor$ を比較すると,

$$\deg \lfloor mD + \frac{q_1-1}{q_1}(\infty) + \frac{q_2-1}{q_2}\cdot(0) \rfloor = \begin{cases} \deg \lfloor mD \rfloor & (q_1 \mid m,\ q_2 \mid m) \quad い \\ \deg \lfloor mD \rfloor + 1 & \left(\begin{matrix} q_1 \mid m,\ q_2 \nmid m \ \text{又は} \\ q_1 \nmid m,\ q_2 \mid m \end{matrix}\right) \quad ろ \\ \deg \lfloor mD \rfloor + 2 & (q_1 \nmid m,\ q_2 \nmid m) \quad は \end{cases}$$

$m=-a(\bar{A})$ が上の ⓗ の場合で，$0<m<-a(\bar{A})$ なる m が上の ③ または ⓗ の場合に該当するのは容易にわかる。ゆえに $m=-a(\bar{A})$ のとき，$\deg\lfloor mD\rfloor = \deg\lfloor mD+\frac{q_1-1}{q_1}(\infty)+\frac{q_2-1}{q_2}\cdot(0)\rfloor-2 = 2-2=0$，$0<m<-a(\bar{A})$ のとき，$\deg\lfloor mD\rfloor \leqq \deg\lfloor mD+\frac{q_1-1}{q_1}(\infty)+\frac{q_2-1}{q_2}\cdot(0)\rfloor-1 \leqq 2-1=1$ だから，$\deg\lfloor mD\rfloor \leqq 0$．ゆえに $\dim H^0(X,\mathcal{O}(mD)) = \dim \bar{A}_m \leqq 1$．

これで補題の証明が終り，従って定理(2.1)の証明も終った。「たったこれだけの事を証明するのにこんなにいろいろ道具を使う必要があるのか？」という気が大いにするが，一応ASLの公理だけから，自明でない結果が得られて，これからの発展に希望を与えていると思う。

§3．三次元の ASL domain.

まだ試行段階なので，A は体 k 上の3次元 ASL-domain，$\forall\alpha\in H$，$\deg\alpha=1$ の場合を考えよう．

次の補題により，3次元 ASL-domain を作る問題は，2次元の（domain とは限らない）ASL に帰着される．

<u>補題</u> (3.1)．A は R 上の graded algebra，poset H が A の subset，H の各元は正の次数の同次元，$A_0=R$，$A=R[H]$ とする。H の minimal elements を $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ とする。この時

(i) $(n=1)$ $A/(\alpha_1)$ が $H\setminus\{\alpha_1\}$ 上の ASL で，α_1 は A で non-

0 - divisor ならAはASL on H.

(ii) ($n \geqq 2$) もしAが次の①,②,③又は①,②' をみたせばAはH上のASLである。(I_{α_i} は (1.2) 参照).

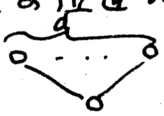
① $A/(I_{\alpha_i})$ は $H \setminus I_{\alpha_i}$ 上のASLである ($i=1,\dots,n$).

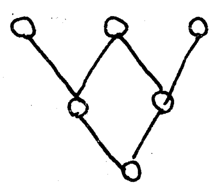
② $\alpha_i \alpha_j = 0 \quad (i \neq j)$

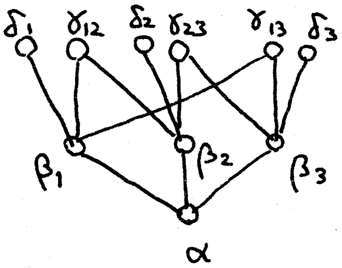
③ $\bigcap_{i=1}^{n} (I_{\alpha_i}) = (0)$

②' Aは (ASL-2) をみたす。

(3.2).
例. $\forall d \geqq 1, A=(k[X,Y,Z])^{(d)}$ はASLで表わされる。

(解説) Aのdegree 1の元αをとると, $\mathrm{Proj}(A) = \mathbb{P}^2$, $\mathrm{Proj}(A/(\alpha)) = D$ は $\mathbb{P}^2$上のdegree d のcurve. 今, $D = l_1 + \cdots + l_d$, $l_1, \dots, l_d$ は一般の位置にあるlines とする。l_iの座標環は $D.l_i = d$ だから,  の形のASLとして表わされる。今 poset $H = \{\alpha, \beta_i, \gamma_{ij}, \delta_i \mid i=1,\dots,d,\ 1 \leq i < j \leq d\}$; 順序関係は$\alpha$が最小元, $\beta_i, \beta_j \leq \gamma_{ij}$, $\beta_i \leq \delta_i$ なるようにする。($\mathrm{Proj}(A/(I_{\beta_i})) = l_i$, $\mathrm{Proj}(A/(I_{\gamma_{ij}}))$ は l_i と l_j の交点, $\mathrm{Proj}(A/(I_{\delta_i}))$ は l_i上の他のl_jの上にない点となる。) (2.1) と上の補題 (3.1) からAがASLである事を証明できる。Hの形は次のようである。

$d=2$. 

$d=3$ 

(3.3) D が $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 上の ample divisor のとき，$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ の $|D|$ による埋め込みの座標環は ASL で表わされる。

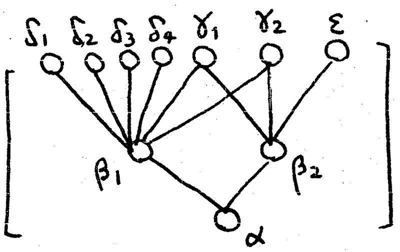
（証明）このような環は $\mathcal{O}(D)\cong\mathcal{O}(a,b)$ のとき，$(k[x,y])^{(a)}\#(k[u,v])^{(b)}$ の形で表わされるので，(2.1) により次を示せば十分.

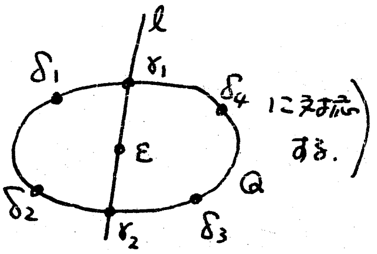
補題 (3.4). A_1, A_2 は k 上の graded ring で H_1, H_2 上の ASL であるとす。各 H_1, H_2 の元の degree がすべて 1 のとき，Segre product $A_1\# A_2=\bigoplus_{n\geq 0}(A_1)_n\otimes_k(A_2)_n$ は $H_1\times H_2$ 上の ASL である。但し，$H_1\times H_2$ に於て，$(\alpha_1,\alpha_2)\geq(\beta_1,\beta_2)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha_1\geq\beta_1$, $\alpha_2\geq\beta_2$ とする。

（証明は容易なので省略する.）

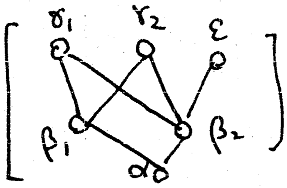
例 (3.5). X は non-singular projective surface over $k=\bar{k}$, $-K_X$ が ample（K_X: X 上の canonical divisor），$K_X\cdot K_X=d\geq 4$ とする（即ち，X は degree d の Del Pezzo surface），このとき X の $-K_X$ による $\mathbb{P}^{|-K_X|}$ への埋め込みの同次座標環は ASL である。

（証明）X は $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ か又は $\mathbb{P}^2$ の $(9-d)$ 個の点を blow-up して得られる（[6], (5.1.13) 参照）。$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ は (3.4) で示えているし，$\mathbb{P}^2$ の場合も (3.2) で示えている。但し，$X=\mathbb{P}^2$ のとき $|-K_X|$ の元として $l_1+l_2+l_3$ の形の元の他に，$Q+l$（Q は二次曲線）とする事も考えられる。この場合 H は

$H =$ 

（これは 

に対応する。）

で与えられる。点を blow-up すると座標環は subring で与えられる。例えば、$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ を blow-up して得られた X' の $|-K_{X'}|$ による同次座標環は $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \varepsilon$ で生成される subring で、 $H =$  上の ASL となる。（[6], (5.1.13)参照）。

今まで得られた ASL の例はすべて rational であるので、ASL domain（体 k 上の）はすべて rational か？という予想をたててもそう不自然ではないと思う。$\dim A \leqq 3$ のときは次が主張できる。

<u>定理</u> (3.6). A が $k = \bar{k}$ 上の ASL-domain on $\underbrace{H,}_{}$ ($\dim A \leqq 3$) H の各元の degree は 1 とする。このとき、もし $\mathrm{Proj}(A)$ が Gorenstein variety であれば、A は k 上 rational である。

（証明）. $\dim A = 2$ のときは (2.1) でわかっているから、$\dim A = 3$ とする。A の Poincaré series を計算して、Riemann-Roch の定理と照し合わせると、$\omega_X \cdot D < 0$ である事が、次の補題より得られる（但し、$D = \mathrm{Proj}(A/(\alpha))$, α は H の最小元）。曲面の分類論より、このとき X は ruled である。しかし D は

ample divisor でやはりASLであらわせるから，Dの各既約成分はsmooth rational curve. 従ってXはrational. ゆえにAもrationalである。

<u>補題</u>. (3.6) の仮定の下に，γ をHの高さ3の元とする。このとき $\#\{\beta \mid \beta \in H,\ \beta$ は高さ2, $\beta \leq \gamma\} \leqq 2$.

(∵) P を γ に対応するXの点，$\beta_1, \dots, \beta_n \leqq \gamma$ とすると，$(\mathcal{O}_{X,P}/\alpha\cdot\mathcal{O}_{X,P})^\wedge \cong k[[\beta_1, \dots, \beta_n]]/(\beta_i\beta_j \mid i \neq j)$ であることが(ASL-2) より容易にわかる。 $n \geqq 3$ のとき $\mathcal{O}_{X,P}$ は Gorenstein でない。

[Poincaré series と Riemann-Roch より $\omega_X \cdot D = -2(a+b) + d$，但し $d = D^2 =$ Aの multiplicity，a, b はそれぞれHの高さ 2, 3 の元の個数。上の補題より $2b \geqq d$ がわかる。]

結びに余り根拠のない予想を列挙しよう。基礎環は体 k とする.

1. ASL-domain は normal か？
2. ASL domain は Cohen-Macaulay 環か？
3. ASL domain は rational singularity か？
4. ASL domain は rational か？

どの問に対しても反例はまだ存在しないと思うのだが。

REFERENCES.

[1] K. Baclawski; Rings with Lexicographic Straightening Law, Adv. in Math. <u>39</u> (1981), 185-213.

[2] C. DeConcini and V. Lakshmibai; Arithmetic Cohen-Macaulayness and arithmetic normality for Schubert varieties, Amer. J. Math. 103 (1981), 835-850.

[3] C. DeConcini, D. Eisenbud and C. Procesi; Hodge Algebras (preprint).

[4] D. Eisenbud; Introduction to Algebras with Straightening Laws, in Ring Theory and Algebra, III, 243-268, Dekker, 1980.

[5] C.S.Seshadri, V.Lakshmibai, C.Musili; Geometry of G/P, I, II,III,IV, in "C.P.Ramanujam-A Tribute", 207-239, Proc. Ind. Acad. Sc. 87 (1978), 1-54, 55-177, ibid. 88 (1979), 279-362.

[6] S. Goto and K. Watanabe; On Graded Rings, I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 179-213.

[7] K. Watanabe; Some Remarks Concerning Demazure's Construction of Normal Graded Rings, Nagoya Math. J. 83 (1981), 203-211.