

## セパレートリクス閉路によるリミットサイクルの分岐

徳島大 工 俊子      川上 博  
Kawakami Hiroshi

### 1. 問題の記述

高次元力学系（相空間の次元が3以上）にみられる準周期解とその分岐に関してはこれまで実験的に

- (1) 準周期解が周期倍分岐を起し次々と周期成分の大きな準周期解へと分岐してゆく,
- (2) 準周期解が鞍形周期解の安定・不安定多様体とゆ着し, 突然消滅する。

などの興味ある現象が知られている<sup>(1)</sup>。

ここではこれらの分岐の1つの定性的説明法として, 平均化法により導びかれた自律系にみられるリミットサイクルの分岐を考察する。この場合リミットサイクルは元の方程式の準周期解に対応し, 上述(1)の現象はリミットサイクルに関するPoincaré mapの不動点の周期倍分岐として計算できる。従って計算上特に問題となるのは(2)の現象に対応したリミットサイクルと鞍形平衡点のセパレートリクス閉路に関する解の大域的性質による分岐である。

3次元以上の自律系ではリットサイクルの周期倍分岐によって生じた周期の長いリットサイクルに関するセパトリクス閉路の分岐が生じるため2次元自律系ではみられなかった新しい分岐の型が現われる。セパトリクス閉路に関する問題は

- (1) 閉路を生じる系のパラメータ値を決定する具体的な計算法,
- (2) 分岐集合の性質に関して Feigenbaum の結果のような一般的性質があるのか。等の点があげられる。

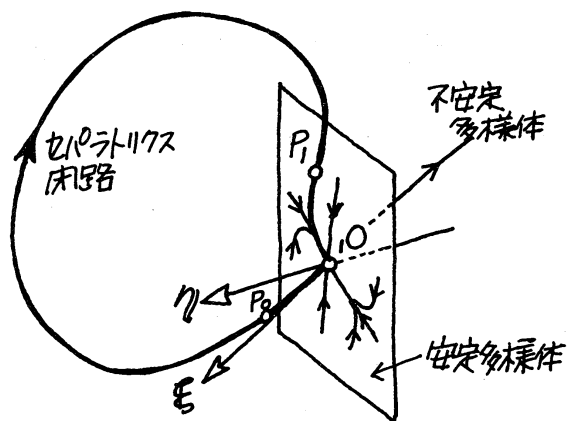
## 2. セパトリクス閉路によるリットサイクルの分岐集合

### 2.1 分岐値の計算法

今3次元自律系を

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) \tag{1}$$

とする。ここに  $x = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$  : 状態,  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  : 系のパラメータ  
 たに分岐集合を計算する際は  $(m-1)$  個の成分を固定し, パラメータは1個 (スカラー) と考える。  $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^3$  は以下の議論に必要な諸条件を満足しているものと仮定する。図1のように式(1)の1つ



の鞍形平衡点  $O$  がセパトリクス閉路を持つ場合を考える。たに点  $O$  は1次元の不安定

図1.  $O$  の近傍とセパトリクス閉路

多様体と 2次元の安定多様体(2つの固有値は実数)を持つ平衡点とする。図中の記号を用いてセパトリス閉路の生じる条件は次のように述べることができる:

[閉路の条件]  $1, 0$  の近傍内にある不安定多様体上の 1 点  $P_0$  を出発した解(この自身  $1, 0$  の不安定多様体でありかつ安定多様体ともなる。ホモクリニック解)が適当な時間  $T$  後  $1, 0$  の近傍内安定多様体上の 1 点  $P_1$  に帰ってくる。

さて図 1 のセパトリス閉路を与える  $1^0$  ランク  $\lambda_0$  の近似値が分かっているとき, このもとに Newton 法により  $\lambda_0$  を計算する。  $1, 0$  の近傍を十分小さく選んで"安定・不安定多様体の線形近似を用い上述の条件を表現するのは次式となる。

$$f(x_0, \lambda_0) = 0 \quad (2) \quad ; \{ x_0 \text{ は } 1, 0 \text{ の座標} \} \quad \text{「近似」}$$

$$(D_x f(x_0, \lambda_0) - \mu_1 I_3) \xi = 0 \quad (3) \quad ; \{ \operatorname{Re} \mu_1 > 0, \xi \text{ は不安定多様体の線形形} \}$$

$$\xi^T \xi - \delta^2 = 0 \quad (4) \quad ; \{ \|\xi\| = \delta \text{ とした } \delta \doteq 0.005 \text{ 程度} \}$$

$$(D_x f(x_0, \lambda_0)^T - \mu_2 I_3) \eta = 0 \quad (5) \quad ; \{ \mu_2 = \mu_1 \text{ のとき } \eta \text{ は安定多様体に垂直} \}$$

$$\eta^T \eta - 1 = 0 \quad (6) \quad ; \{ \eta \text{ の正規化} \} \quad \text{L とするハットル}$$

$$\eta^T [\varphi(T, x_0 + \xi, \lambda_0) - x_0] = 0 \quad (7) \quad ; \{ \text{点 } P_1 \text{ が安定多様体の上にある条件} \}$$

ただし  $\varphi(t, x_0, \lambda)$  は式(1)の解を表わすことに  $\varphi(0, x_0, \lambda) = x_0$ 。式(2) ~ (7) を  $x_0, \xi, \eta, \lambda_0, \mu_1, \mu_2$  を未知変数と考えて Newton 法でとく。ただし解いた時点で  $\mu_1 = \mu_2$  となる解を採用する。

[注]  $1^0$  ランク  $\lambda_0$  を変数と考えて式(7)を満足するよう Newton 法を用い

てもよいが、この場合 Jacobi 行列が非常に複雑なものとなる。 $\alpha_0, \epsilon, \eta, \mu$  などが  $\lambda$  の関数となっているからである。上図の方法ではこれらを独立変数とみなしている。この種の問題ではどのような方程式系を解くか、数値計算上楽であるかは大いに問題である。なお Newton 法の初期値は位相空間図をみながら試行錯誤的に見つけた。この点にも具体的な問題に応じた経験が必要である。

### 2.2 分岐集合の定性的形状

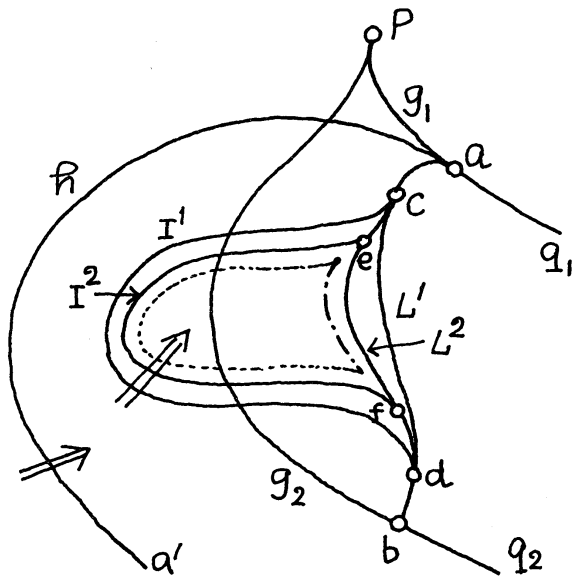


図2. リミットサイクルの分岐集合.

2-パラメータ自律系で1つのパラメータを動かさせて前節の方法でセパレート閉路を与える分岐値  $\lambda_0$  を求める。このあと除々に固定したパラメータを変化させ  $\lambda_0$  を逐次計算す。これは2-パラメータ平面上に分岐を与える曲線(分岐集合)が得られる。この方法で計算した分岐集合の簡単な例

を示す。図2はリミットサイクルの同期倍分岐とその結果生じるリミットサイクルのセパレート閉路による分岐集合を定性的に描いた図である。

[図2の説明] 曲線  $g_1, g_2$  ( $g_1: aP$  と  $Pb, g_2$ ): 平衡点対の発生・消滅の分岐曲線。 $g_1, aP, g_2, b, g_2$  で囲まれた領域で、0 が存在する。

その外側の領域では平衡点はいくつと考える。

曲線  $R(\widehat{aRd'})$ : 平衡点のHopf分岐。  $\Rightarrow$  方向にパラメータが変化すると

安定な平衡点がHopf分岐し、安定なリミットサイクルが発生する。

曲線  $I^1(\widehat{cId}), I^2(\widehat{eI^2f})$ : 1巻, 2巻リミットサイクルのI型(周期倍)分岐。  $\Rightarrow$

方向にパラメータが変化するとHopf分岐で生じたリミットサイクルが次々と周期倍

分岐をおこし、卓線で周期倍分岐が無限に達する。  $I^2$ と卓線の間には

$I^j (j=2^2, 2^3, \dots)$  の分岐曲線がある。

曲線  $L^1(\widehat{acL'db}), L^2(\widehat{ceL^2fd})$ : 1巻および2巻リミットサイクルのセパ

ラトリクス閉路による分岐。  $L^1$ 上  $\widehat{ac}, \widehat{db}$  の部分では安定な1巻リミットサイ

クルが、  $\widehat{cd}$  の部分ではI型不安定リミットサイクルが閉路に収束する。同様に

$L^2$ 上  $\widehat{ce}, \widehat{fd}$  の部分では安定な2巻リミットサイクルが、  $\widehat{ef}$  の部分では2巻

I型不安定リミットサイクルが閉路に収束する。このパラメータは  $j$  巻 ( $j=2^2, 2^3, \dots$ )

リミットサイクルについても同様でその結果1卓鎖線の曲線のような無限巻

リミットサイクルのセパラトリクス閉路への収束を与えるパラメータがあるものと考えられる。

なお卓  $a, c, d, e, f$  での3本の分岐曲線は互に接しているものと考えられる。

[注] 具体的な方程式で数値計算に結果をみると上述の分岐の

ほかに別なリミットサイクル対の発生や消滅がみられ、これらに対するセパラトリ

クス閉路の分岐集合が関係し、分岐集合の図は非常に複雑となる

場合がある。またリミットサイクル対が発生した場合D型不安定リミットサイ

クルのセパラトリクス閉路による分岐も考えられる。これらの実験結果の

一部は文献[2]参照。

### 3. 具体的な計算例.

非線形インダクタを含んだ電気回路の例を考える<sup>(1)</sup>。このモデルから得らぬ方程式は

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -R_1 y - \frac{1}{8} (x^2 + 3z^2)x + B \cos t \quad (8)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{8} R_2 (3x^2 + z^2)z + B_0$$

である。式(8)には $1/8$ より $R_1, R_2, B_0, B$ の適当な領域で前述(§1)の現象がみられる。

$$x = u \cos t + v \sin t$$

$$y = -u \sin t + v \cos t \quad (9)$$

$$z = w$$

により変数変換  $(x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$  を行い、平均化法により  $u, v, w$  に関する自律系を導くこと

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} (-R_1 u - A v)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} (A u - R_1 v + B) \quad (10)$$

$$\frac{dw}{dt} = B_0 - \frac{1}{16} R_2 (3r^2 + 2w^2)w$$

を得る。ここに

$$r^2 = u^2 + v^2, \quad A = 1 - \frac{3}{32} (r^2 + 4w^2)$$

である。次に式(10)にみられる分岐集合を計算した結果を略述する。

図3および図4は式(10)において  $B_0 = 0.03$ ,  $R_2 = 0.05$  と固定し、 $B$  および  $R_1$  を変化させた場合にみられる分岐集合を示している。

### (1) 平衡点の分岐

2点鎖線  $g_1, g_2, g_3, g_4$  は平衡点対の発生・消滅の分岐集合を表わす。これらの曲線で囲まれた領域で平衡点が3個存在し、その一つが"0形"である。1点鎖線  $f_1$  は Hopf 分岐集合を表わす。パラメータを曲線  $f_1$  を横切り左から右に変化させれば"1つの安定なリミットサイクルが Hopf 分岐に安定なリミットサイクルが現われる。

### (2) リミットサイクルの分岐

曲線  $I(\widehat{c_1 I d_1})$ : Hopf 分岐の結果生じたリミットサイクルが"同期倍分岐"を生じるパラメータ。

曲線  $I_1^2(\widehat{e_1 I_1^2 f_1}), I_2^2(\widehat{i_1 I_2^2 j_1})$ : 曲線  $I$  上で分岐の結合生じた2巻リミットサイクルが同期倍分岐により4巻リミットサイクルと変化する分岐のパラメータ。図4  $e_1, f_1$  で示した曲線上で2巻リミットサイクル対の発生・消滅の分岐がみられる。

曲線  $G^3(\widehat{a_2 G^3 b_2})$ : 3巻リミットサイクル対の発生・消滅の分岐集合。

曲線  $L^1(\widehat{a_1 c_1 L^1 d_1 b_1})$ : 1巻リミットサイクルのセパレート閉路による消滅の分岐曲線。 $\widehat{a_1 c_1}, \widehat{b_1 d_1}$  の部分で安定な  $\widehat{c_1 L^1 d_1}$  の部分で逆不安定なリミットサイクルがセパレート閉路にゆ着する。

曲線  $L^2(\widehat{c_1 e_1 f_1}, \widehat{f_1 i_1}, \widehat{i_1 j_1 d_1})$ : 2巻リミットサイクルのセパレート閉路による分岐集合。曲線  $L_1^3(\widehat{a_2 L_1^3 b_2}), L_2^3(\widehat{a_2 L_2^3 b_2})$ : 3巻リミットサイクルのセパレート閉路による分岐  $L_1^3$  で逆不安定,  $L_2^3$  で正不安定リミットサイクルが分岐する。

なお、リミットサイクルがセパレートリクス閉路とゆ着し消滅する位空間図の例を図5~図7に示した。

#### 4. おまけ

3次元自律系の例にみられるセパレートリクス閉路によるリミットサイクルの分岐について報告した。現在のところ実験から帰納できる結果を得るに至っていないが、はじめに述べておいたように、周期解分岐に於けるリミットサイクル達がどのようにセパレートリクス閉路と関連して分岐するかは興味ある問題である。

#### 文献

- [1] 川上・勝田: 3次元ダフリング方程式のホップ分岐とカオス, 電子通信学会論文誌 (A), J-64-A, 11, pp 940-947 (1985).
- [2] 川上・川口: セパレートリクス閉路によるリミットサイクルの大域的な分岐, 電子通信学会技術報告 NLP 82-12 (1982)
- なおセパレートリクス閉路近傍に無限個の周期解が存在する場合など数学的の結果が知られていることを本研究会で馬被氏より教えていただいた。
- [3] J.E. Evans, N. Fenichel and J.A. Feroe: Double impulse solutions in nerve axon equations; SIAM J. Appl. Math. 42, 2, pp 219-233 (1982).

またこれらの結果は1960年代後半にソ連ゴリキ大の人達によって研究があることを知った(Л.П. Шильников, В.В. Быковの結果など)。具体的な系への応用を検討したいと考えている。



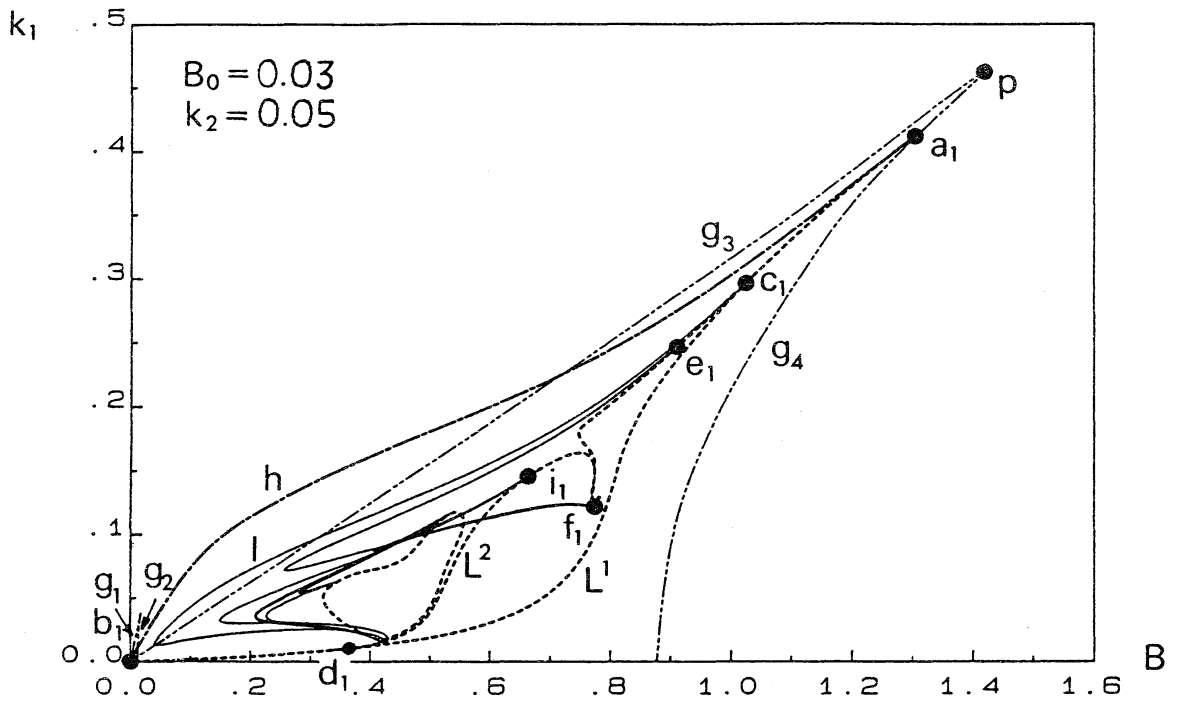


図3. 式(10)にみられる平衡点, リミットサイクルの分岐集合.

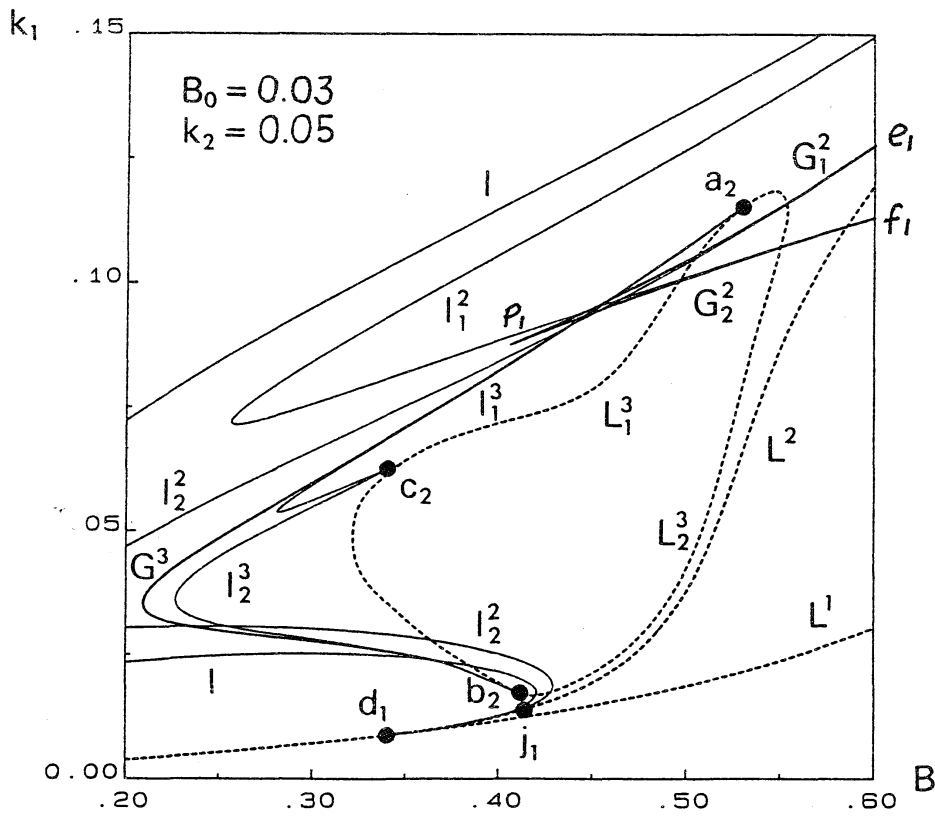
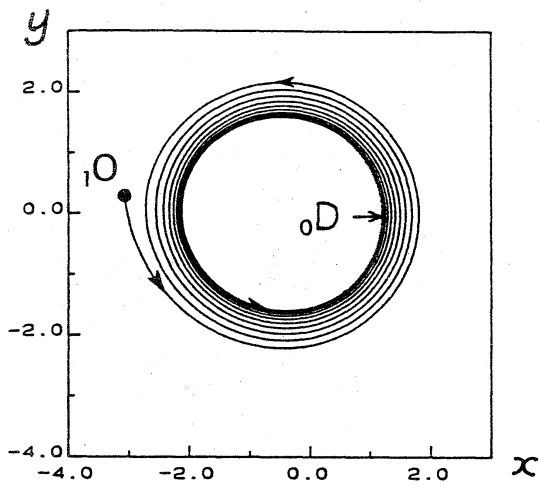
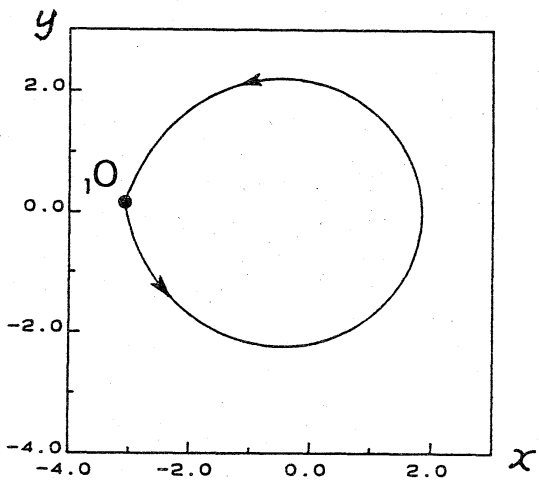


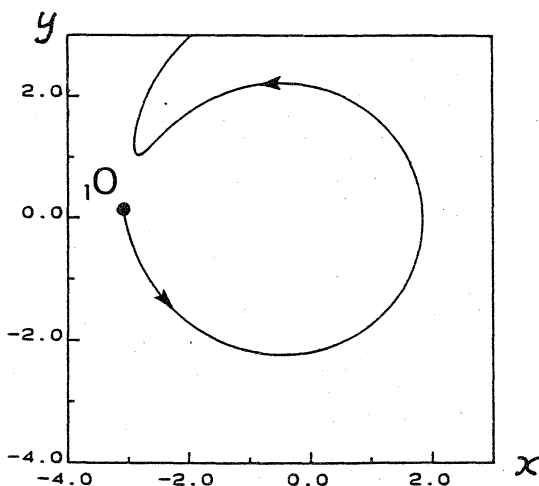
図4. 図3の一部拡大図.



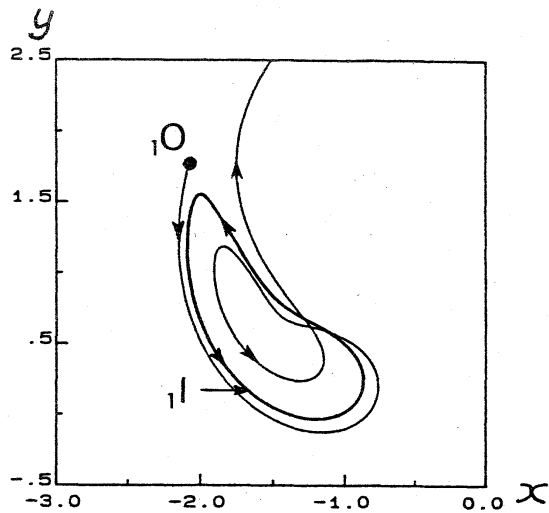
(a)



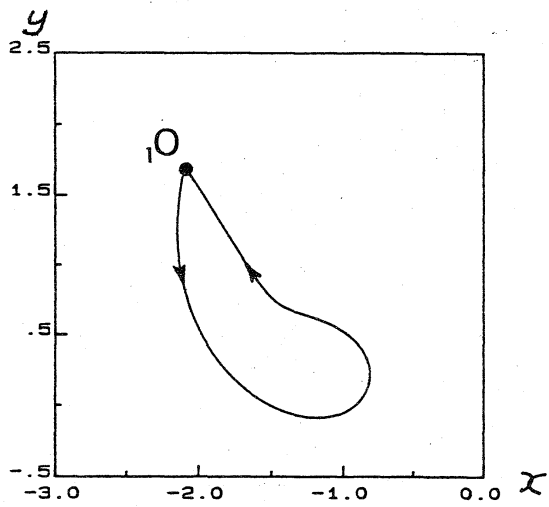
(b)



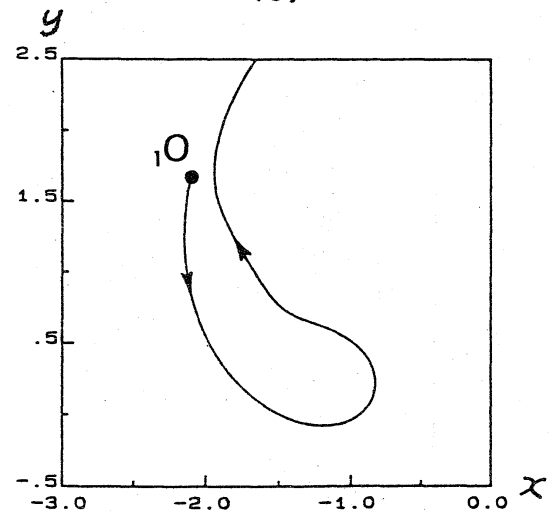
(c)



(a)



(b)



(c)

図5. 安定なリミットサイクルの消滅.  
( $xy$ 平面への射影図)

図6. 逆不安定(I形)リミットサイクルの消滅.  
( $xy$ 平面への射影図)

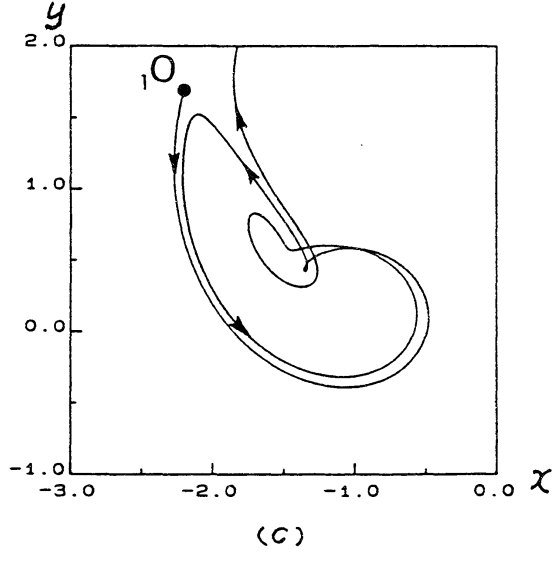
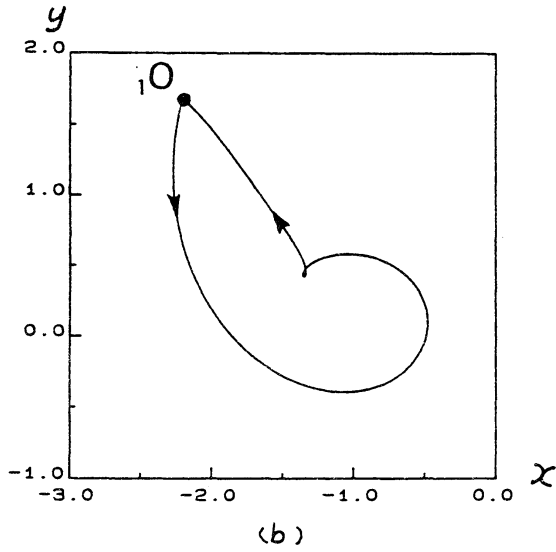
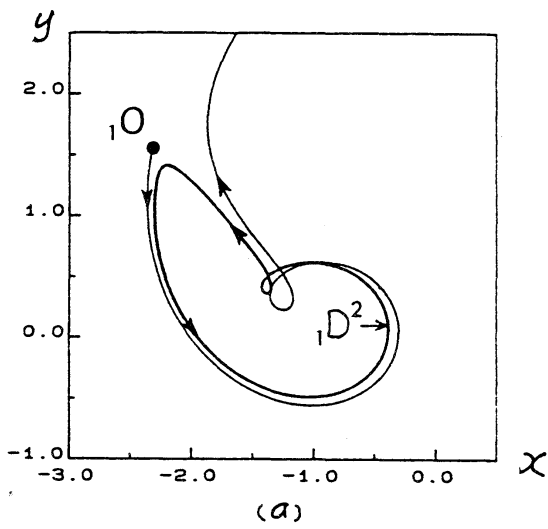


図7. 正不安定(D形)リミットサイクルの消滅.  
(x-y平面への射影図)

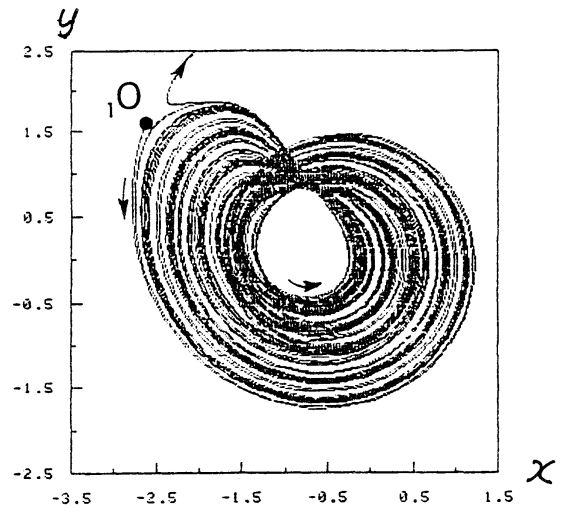


図8. 巻数の多いリミットサイクルの消滅例.

図5~図8 はリミットサイクルがセパレート  
リクス閉路とゆ着し消滅する場合  
の位空間図の1例を示す。ここに

- 10 : 10形平衡点.
  - 1D : 完全安定1巻リミットサイクル,
  - 1I : 逆不安定1巻リミットサイクル.
  - 1D<sup>2</sup> : 正不安定2巻リミットサイクル
- を表わす。

各図のパラメータは次表の通り:

| 図の記号 | B     | k1       |
|------|-------|----------|
| 5    | (a)   | 0.2      |
|      | (b)   | 0.2      |
|      | (c)   | 0.2      |
| 6    | (a)   | 0.84     |
|      | (b)   | 0.855659 |
|      | (c)   | 0.86     |
| 7    | (a)   | 0.7      |
|      | (b)   | 0.75     |
|      | (c)   | 0.75     |
| 8    | 0.265 | 0.045    |