数理解析研究所講究録
第 466 巻 1982 年 101-106

Rotation Set について

早大 教育　伊藤隆一
Ito Ryuichi

Rを実数，Nを自然数の集合，$S^1=R/N$を円周とし，$\pi : R \longrightarrow R/N = S^1$を canonical projection とする。

$f: S^1 \longrightarrow S^1$が degree 1 の連続写像のとき，$\bar{f}: R \to R$を$f$の lifting，つまり$\pi\bar{f}=f\pi$をみたす写像とし，

$$\rho(\bar{f}, x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{\bar{f}^n(x) - x\}$$

$$\rho(\bar{f}) = \{\rho(\bar{f}, x) \mid x \in R\}$$

と定義する。$\rho(\bar{f})$を rotation set と呼ぶ([4])。$\rho(\bar{f})$は rotation number の一般化である。$\rho(\bar{f})$は$\bar{f}$のとり方に依存するが，異なる$\bar{f}$のとり方をしても，整数値ずれるだけである。

$\rho(\bar{f})$については次が成り立つ。([2],[3],[4])

1) fが周期mの周期点をもつ。$\Longrightarrow \exists l \in Z ; \frac{l}{m} \in \rho(\bar{f})$

2) $\frac{p}{m} \in \rho(\bar{f})$, $(p, m) = 1 \Longrightarrow f$ は $\rho(\bar{f}, x) = \frac{p}{m}$ なる周期 m の周期点xをもつ。

3) $\rho(f)$ は1点または閉区間

4) $\bar{f} \leq \bar{g} \Longrightarrow \rho_-(\bar{f}) \leq \rho_-(\bar{g})$, $\rho_+(\bar{f}) \leq \rho_+(\bar{g})$

但し $\rho(\bar{f}) = [\rho_-(\bar{f}), \rho_+(\bar{f})]$ とする。

5) $g = h^{-1} f h$ for $\exists$ homeo. $h : S^1 \to S^1 \Longrightarrow \bar{f}, \bar{g}$ を適当にとれば $\rho(\bar{f}) = \rho(\bar{g})$

6) (適当に lifting をとれば) $\rho(\bar{\cdot})$ は, degree 1 の連続写像の集合から R への連続写像である。

この小編では、次の2つの Proposition を証明する。

<u>Proposition 1</u>　M を f に関して不変な S^1 上の確率測度の集合とし、$\varphi = \bar{f} - \mathrm{id} : S^1 \to S^1$ とすると、

$$\rho(\bar{f}) = \{ \mu(\varphi) \mid \mu \in M \}$$

<u>Proposition 2</u>　$\rho_+(\bar{f})$ が無理数, $\theta > 0$ ならば

$$\rho_+(\overline{R_\theta f}) > \rho_+(\bar{f})$$

ここに $R_\theta : S^1 \to S^1$ は $R_\theta(x) = x + \theta$ とする。

同様に $\rho_-(\bar{f})$ が無理数, $\theta > 0$ ならば $\rho_-(\overline{R_\theta f}) > \rho_-(\bar{f})$

上の2つは、f が homeomorphism のときの propositions

(Herman[1] P.21 及び P.34) の一般化である。

Proposition 2 と, 5) を考慮すれば 次を得る。

<u>Corollary</u> f が構造安定 $\Longrightarrow$ $\rho_+(\bar{f})$, $\rho_-(\bar{f})$ は有理数。

(注意：上の Proposition 2 で f と $R_\theta f$ の lifting は, $\overline{R_\theta f} = R_\theta \bar{f}$ となるようとっている。

<u>Proposition 1 の証明</u>　S^1 上の確率測度は $C^0(S^1)$ 上の positive linear functional μ で $\mu(1) = 1$ なるものである。

まず $^\forall \alpha \in \rho(\bar{f})$ に対して, $\varphi = \bar{f} - id : S^1 \to S^1$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\bar{f}^i(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \{\bar{f}^n(x) - x\} = \alpha$$

をみたす $x \in S^1$ が存在する([2])ことを思い出しておく。

いまこの x に対して $\mu_n : C^0(S^1) \longrightarrow R$ を

$\mu_n(g) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(f^i(x))$ で定義すると, μ_n は確率測度。

確率測度の集合は weakly compact であるから, subsequence $\{k_n\}$ で $\{\mu_{k_n}\}$ がある確率測度 μ に weakly に収束するものがある。

つまり $^\forall g \in C^0(S^1)$ に対して $\mu_{k_n}(g) \longrightarrow \mu(g)$

とくに $g = \varphi = \bar{f} - id$ とおいて $\mu_{k_n}(\varphi) \longrightarrow \mu(\varphi)$

ところが $\lim_{n\to\infty}\mu_{k_n}(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\sum_{i=0}^{k_n-1}\varphi(f^i(x))=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\{\bar{f}^{k_n}(x)-x\}$
$=\alpha$

$$\therefore\ \mu(\varphi)=\alpha$$

μ が f に関して不変なことは $\mu_{k_n}(g)$ の定義より明らか。

$$\therefore\ \rho(\bar{f})\subset\{\mu(\varphi)\mid \mu\in M\}$$

一方、$\frac{p}{q}<\rho_-(\bar{f})$ ならば、$\bar{f}^q(x)-x-p>0$ for $^\forall x\in S^1$

$$\therefore\ \mu(\bar{f}^q-id-q\cdot\frac{p}{q})>0 \quad \text{for } ^\forall\mu\in M$$

しかるに $\mu(\bar{f}^q-id-q\mu(\varphi))=\mu(\sum_{i=0}^{q-1}(\bar{f}-id)f^i)-q\mu(\varphi)$
$=\sum_{i=0}^{q-1}\mu(\varphi\cdot f^i)-q\mu(\varphi)=0$

よって $\mu(\varphi)\geq\frac{p}{q}$

同様にして $\frac{p}{q}>\rho_+(\bar{f})$ ならば $\mu(\varphi)\leq\frac{p}{q}$

$\rho(\bar{f})$ は閉集合で $\rho(\bar{f})\subset\{\mu(\varphi)\mid\mu\in M\}$ だから、結局

$$\rho(\bar{f})=\{\mu(\varphi)\mid\mu\in M\}\qquad\square$$

次に Proposition 2 の証明をするのに、Lemma を 2つ用意する。

<u>Lemma 1</u> $\theta>0$ ならば、$^\forall k$: 自然数，$^\forall\alpha$: 実数 に対して $\beta\leq\alpha$ でかつ $\overline{R_\theta f}^k(\beta)\geq\bar{f}^k(\alpha)+\theta$ をみたす β が存在する。

証明　帰納法による。$k=1$のとき自明。kのとき成立すると仮定すると $\beta \leq \alpha$ でかつ $\overline{R_\theta f}^k(\beta) \geq \bar{f}^k(\alpha)+\theta$ なるβが存在。$\overline{R_\theta f}^k(x+n) = \bar{f}^k(x)+n$, $n \in \mathbb{Z}$ 故

$\gamma \leq \beta$ で $\overline{R_\theta f}^k(\gamma) = \bar{f}^k(\alpha)$ なるγが存在.

従って

$$\bar{f}^{k+1}(\alpha)+\theta = \bar{f}(\bar{f}^k(\alpha))+\theta = \bar{f}(\overline{R_\theta f}^k(\gamma))+\theta$$
$$= \overline{R_\theta f}^{k+1}(\gamma)$$

でかつ $\gamma \leq \alpha$ $\square$

次の Lemma は解析的整数論の教科書にある。

Lemma 2　任意の無理数αに対して、有理数の減少列（及び増加列）$\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$で$\alpha$に収束し，かつ $\left|\frac{q_n}{p_n}-\alpha\right| < \frac{1}{q_n^2}$ なるものが存在する。

Proposition 2 の証明　$\rho(\bar{f})=\alpha$ とする。Lemma 2 により．有理数の減少列 $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \downarrow \alpha$ で $\frac{p_n}{q_n}-\frac{1}{q_n^2}<\alpha$ なるものがとれる。$\rho(\bar{f})=\alpha$ だから $\forall x$ に対して

$$\bar{f}^{q_n}(x) - x < p_n \quad \text{である。}$$

今，$\theta>0$ で $\forall n$, $\forall x$ に対して $\bar{f}^{q_n}(x)-x<p_n-\theta$ をみたすものがあると仮定する。q_nを十分大きく $q_n\theta>1$ となるようにとると，

$$\bar{f}^{q_n^2}(x) - x = \sum_{i=0}^{q_n-1} \left\{ \bar{f}^{q_n}(\bar{f}^{iq_n}(x)) - \bar{f}^{iq_n}(x) \right\}$$

$$< q_n(p_n - \theta) < q_n p_n - 1$$

よって

$$\rho_+(\bar{f}) < \frac{q_n p_n - 1}{q_n^2} < \alpha$$

これは $\rho_+(\bar{f}) = \alpha$ に矛盾。

従って どんな小さな $\theta > 0$ に対しても

$$\bar{f}^{q_n}(x) - x \geq p_n - \theta$$

となる n, x が存在する。

一方 Lemma 1 より $y \leq x$ で $\overline{R_\theta f}^{q_n}(y) \geq \bar{f}^{q_n}(x) + \theta$ なる y が存在。よって

$$\overline{R_\theta f}^{q_n}(y) - y \geq \bar{f}^{q_n}(x) - x + \theta \geq p_n$$

$$\therefore \rho_+(\overline{R_\theta f}) \geq \frac{p_n}{q_n} > \alpha = \rho_+(\bar{f})$$

$\rho_-(\bar{f})$ についても同様である。 □

参考文献

[1] M. Herman, Sur la Conjugaison Différentiable des Difféomorphismes du Cercle à des Rotations, Publ. Math. I.H.E.S., No. 49, 1979.

[2] R. Ito, Rotation Sets Are Closed, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1981), 89, 107—111.

[3] ——, Minimal Entropy for Endomorphisms of the Circle, to appear.

[4] S. Newhouse, J. Palis and F. Takens, Stable Families of Dynamical Systems I: Diffeomorphisms. Preprint, I.M.P.A., Rio, Brazil.