数理解析研究所講究録
第 467 巻 1982 年 32-55

結び目にそったDehn-surgeryで得られる3次元多様体について

津田塾大学　円山　憲子
(Noriko Maruyama)

§1. Introduction.

対象は、すべて smooth, oriented category で扱うものとする。

3次元多様体を与える方法は、いくつか知られている，特にどんな closed, orientable 3次元多様体も S^3 内の link にそった Dehn-surgery で得られることは、よく知られているが，link ではなく knot にそった Dehn-surgery で与えるという制限をつけた場合には、まだ決定的な結果は得られていないようである。そこで次のような一般的問題がたてられる。

問題：所与の homology lens space が適当な homology S^3 (or S^3) 内の knot の Dehn-surgery で与えられるかどうか判定せよ。また Dehn-surgery で与えられた時，その表現は一意的か。

また knot K にそった Dehn surgery には、surgery 係数と呼ばれる有理数が対応し、得られる3次元多様体の位相型は、Kの入っている homology 3-sphere を固定すれば、Kの surgery 係数で決まることもよく知られている。特に surgery 係数が整数の時、Dehn-surgery を framed surgery と呼ぶことにすれば、2-handle attaching を通して3次元多様体(同志)の同境(cobordism)問題に関連してくる。homology cobordism group of homology 3-spheres, $\mathcal{H}^3$ の構造について懸案の問題は、μ-invariant, $\mu(\Sigma)=0$ だが $[\Sigma]\neq 0$ in $\mathcal{H}^3$ なる homology 3-sphere Σ の発見である。そこでもし homology lens space Λ で、homology 3-sphere Σ, $\mu(\Sigma)=0$ 内の knot K の framed surgery で得られ, i.e. $\Lambda = \chi_\Sigma(K:p)$, $p\in\mathbb{Z}$, Λ は homology S^2 (= 4-manifold V with $H_*(V:\mathbb{Z})\cong H_*(S^2:\mathbb{Z})$, $\partial V\neq\phi$) の境界とならないものがあれば、Σ の homology cobordism class は $\mathcal{H}^3$ で non zero である。何となれば、もし $[\Sigma]=0$ ならば、$\exists$ acyclic 4-manifold W s.t. $\partial W=\Sigma$。また $\Lambda = \chi_\Sigma(K:p)$ より $\exists\, C(p)$: 2-handle body s.t. $\partial C(p) = \Lambda \cup -\Sigma$. よって $V = C(p)\cup_\Sigma W$ とおけば、$\partial V=\Lambda$ かつ V は homology S^2 となり、Λ の条件に反することになるからである。よって上の性質を持つ homology

3-sphere 発見のために，まず先の一般的問題を framed surgery に制限した形の問題，

<u>Q_f：所与の homology lens space が適当な homology 3-sphere (or S^3) の knot の framed surgery で得られるかどうか判定せよ。</u>

と，次の問題

<u>Q：所与の homology lens space が homology S^2 の境界となるか判定せよ。</u>

に答えなければならない。

Λ を homology lens space，Σ を homology 3-sphere，もし $\Lambda = \chi_\Sigma(K:p)$ かつ $[\Sigma] = 0 \in \mathcal{H}^3$ ならば，Λ は homology S^2 の境界となることを注意しておく。

§2では，framed surgery の代数的な条件等を調べ，特に真の lens space について考察を進める。§3では，素な3次元多様体の連結和を問題の対象とし，次の定理を示す。

<u>Theorem</u>. <u>K: non trivial, not sufficiently large knot in S^3.</u> <u>もしある $r \in \mathbb{Q}$ $(r \neq 0)$ に対し K にそって係数 r で S^3 を Dehn surgery したものが，ℓ 個の素な3次元多様体の連結和となっているならば，$\ell \leqq 2$ である。</u>

§2. framed surgery

2.1. ここでは、一般のhomology lens spaceがknotのframed surgeryで得られるための代数的な必要条件を求める。

Λをhomology lens space with $H_1(\Lambda:\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}_p$とする。$\Lambda$はいつでも$S^3$内のあるlink $L=\bigcup_{i=1}^{\mu}L_i$にDehn-surgeryして得られる, i.e. $\Lambda=\chi_{S^3}(L:\{r_i\})$, $r_i=p_i/q_i\in\mathbb{Q}$ $(i=1,\cdots,\mu)$。Λのこの表現をひとつ選んで固定する。Aを$(L:\{r_i\})$のlinking form, $D=\prod_{i=1}^{\mu}q_i$と置くと, [M: lemma 2.2] より, $H_1(\Lambda:\mathbb{Z})$の位数 $|H_1(\Lambda:\mathbb{Z})|=D\cdot\det A=p$を得る。さらに$\Lambda$がhomology 3-sphere Σ内のknot Kのframed surgeryで得られたとする. i.e. $\Lambda=\chi_\Sigma(K:p)$。
この時、ΛとΣは$\Sigma\times I$にframing pで2-handleをattachした4次元多様体$C(p)$の境界となることに注意しておく。逆ってΣは$\Lambda\times I$にあるframingで2-handleをattachして得られたものとみなせる。上のΛのLにそったDehn surgeryを用いて, ΣのS^3からのDehn surgeryの表現が得られる。ΣはLとdual 2-handleの足K^*にDehn-surgeryして得られるのである. i.e.

$\Sigma = \chi_{S^3}(L \cup K^* ; \{r_i\} \cup \{m\})$ ，$m \in \mathbb{Z}$ 。

$(L \cup K^* ; \{r_i\} \cup \{m\})$ の linking form $A(m)$ は

$$A(m) = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} l_1 \\ \vdots \\ l_\mu \end{matrix} \\ \hline l_1 \cdots l_\mu & m \end{array}\right), \quad l_i = lk_{S^3}(K^*, L_i)$$

と書ける. よって $|H_1(\Sigma ; \mathbb{Z})| = D \cdot \det A(m) = \pm 1$

([M: lemma 2.2]) となる。 $A(m)$ の形から

$\det A(m) = m \cdot \det A + C$ ，(C は l_i 達と A で決まる定数) とおける. 以上の式から

$$D \cdot \det A(m) = m \cdot D \cdot \det A + D \cdot C = pm + DC = \pm 1 .$$

従って $DC \equiv \pm 1 \ (p)$ となる。

特に p : odd ならば, $\Lambda = \chi_\Sigma(K : \pm p)$ の時, Λ は $\mathbb{Z}_2$-homology 3-sphere で μ-invariant が定義される。これらの間の代数的な関係式を求めたい。 $\Lambda = M(0, K : 1.0. \pm p. 1)$ より [G1 : Theorem 2] に依り

$$\begin{aligned} \mu(\Lambda) &= \mu(S^3) + \mu(\Sigma) + \mu(L(\pm p. 1)) + c(0) + c(K) \\ &= \mu(\Sigma) + \mu(L(\pm p. 1)) + c(K) \end{aligned}$$

(但し. $c(K)$ は K の Arf-invariant) を得る。また [HNK] より lens space $L(\pm p. 1)$ の μ-invariant は.

$$\mu(L(\pm p. 1)) = \mp \mu(L(p. p-1)) = \mp \frac{p-1}{16}$$

と計算される。 これらの2式を合せて.

$$\mu(\Lambda) \pm (p-1)/16 = \mu(\Sigma) + c(K)$$ を得る。

右辺は，homology 3-sphere の μ-invariant および knot の Arf invariant が $8/16$ の $0/16$ $(=\mathbb{Z}_2)$ という値を取ることに注意すれば，

$16\mu(\Lambda) \pm (p-1) \equiv 0 \ (8)$ が分かる。

以上をまとめると，

<u>Lemma 2.1.</u> <u>$\Lambda = \chi_{S^3}(L : \{r_i\})$ が homology lens space で $H_1(\Lambda : \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$ とする。</u>
<u>もし，$\Lambda = \chi_\Sigma(K : p)$ ならば $D \cdot C \equiv \pm 1 \ (p)$。</u>
<u>さらに p : odd の時，$16\mu(\Lambda) \pm (p-1) \equiv 0 \ (8)$.</u>

Q_f に関して，次のことが分かる。

<u>Corollary 2.1.1</u> $\Lambda = \chi_{S^3}(L : \{r_i\})$ は homology lens space で，$H_1(\Lambda : \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$，$D = \prod_{i=1}^{\mu} q_i$，$r_i = p_i/q_i$ とする。
${}^\forall C \in \mathbb{Z}$ に対して $D \cdot C \not\equiv \pm 1 \ (p)$ ならば Λ は homology 3-sphere 内の knot の framed surgery で得られない。
さらに，p : odd の時，$\mu(\Lambda) \pm (p-1) \not\equiv 0 \ (8)$ ならば，Λ は homology 3-sphere 内の knot の framed surgery で得られない。

p が even の時は，[F] に扱われ，詳しい展開がなされているが，以下のことを注意しておくことにする。

ここでは. p = even に限っておく。 Λ を homology lens space with $|H_1(\Lambda;\mathbb{Z})| = p$ とする。今 Λ が2つの homology 3-sphere Σ_1, Σ_2 から framing p で 2-handle を attach して得られた4次元多様体 $C_1(p), C_2(p)$ の境界となっているとする。$H_1(\Lambda;\mathbb{Z})$ の生成元は dual 2-handle の attaching sphere K_1^* (resp. K_2^*) である。$h: \Lambda \to \Lambda$ homeomorphism s.t. $h_*(K_1^*) = \pm K_2^*$ なるものによって. $C_1(p)$ と $C_2(p)$ を張り合せて得られる4次元多様体を C とおく。$C = C_1(p) \cup_h C_2(p)$. すると $\partial C = -\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ で. $H_2(C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は Σ_1 につけた 2-handle h_1 と h_1, h_2 の dual 2-handles h_1^*, h_2^* から得られる $h_1^* \pm h_2^*$ で生成され. その intersection form は $\begin{pmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

<u>lemma 2.2</u>: p = even の時. C は Σ_1 と Σ_2 の spin cobordism を与える. よって $\mu(\Sigma_1) = \mu(\Sigma_2)$
さらに p が条件 (*) : $x^2 \equiv \pm 1\ (p) \underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} x \equiv \pm 1\ (p)$ を満たせば. $C_1(p)$ と $C_2(p)$ の張り合せ方は上のような h しかなく. $C_1(p) \cup_\Lambda C_2(p) = C$ となる.

この lemma 2.2 から Λ が μ-invariant zero の homology 3-sphere (特に S^3) から framed surgery で得られないことの十分条件が出てくる。 Q_f に関して p = even の場合は次が成り立つ。

<u>Corollary 2.2.1</u>　p: even かつ lemma 2.2 の条件 (*) を満たすものとする。もし Λ が $\mu(\Sigma) \neq 0$ なる homology 3-sphere の framed surgery で得られるならば、Λ は μ-invariant zero (特に S^3) の homology 3-sphere の framed surgery で得られない。

さて $\mathcal{H}^3$ の構造をさぐる概念として、[M] は bounding genus を定義しているが、我々は上のような homology 3-spheres 間の spin cobordism を持つので、bounding genus に関して次のような評価式を得る。

<u>Corollary 2.2.2.</u>　p: even で、Λ と homology 3-spheres Σ_1, Σ_2 に上のような関係が成り立っているとすると、Σ_i の bounding genus $|\Sigma_i|$ $(i=1,2)$ について

$$|\Sigma_j| - 1 \leq |\Sigma_i| \leq |\Sigma_j| + 1 \qquad i \neq j,\ i,j \in \{1,2\}.$$

特に、(i) $|\Sigma_i| = 0$ ならば $|\Sigma_j| \leq 1$,

(ii) $|\Sigma_i| \leq n$ $(n \geq 1)$ が critical estimate ([M]) ならば、評価 $|\Sigma_j| \leq n-1$ は critical である。

<u>注意</u>: p に関する条件 (*) は $p = 2 \cdot (4k+3$ の形の素数$)^m$ $k, m \in \mathbb{Z}^+$ と同値であることが証明できる

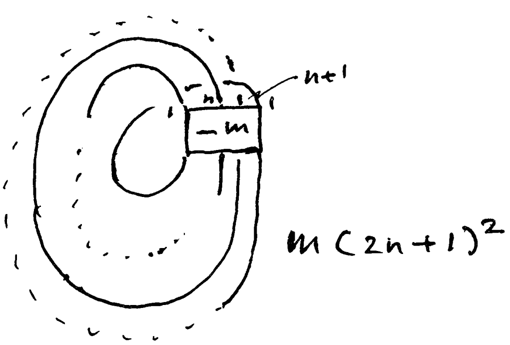
2.2. lens spacesについて.

lens space $L(p,q)$ (p,qは互いに素な整数)が trivial knot の p/q-Dehn surgery で得られることはよく知られた事実である。従って lens space に対してはその表現の一意性が問題となるが, Moser [Mo] は torus knot から, Fintushel-Stern [FS] と Gordon [G2] は doubly iterated torus knot (cable of torus knot) からも, さらに [FS] は torus knot でないある knot からも, 一部の lens spaces が Dehn surgery によって得られることを示した。我々は Rolfsen-Kirby Calculus により, 次の結果を得る。

<u>Theorem 2.3.</u> 次の lens spaces は non-trivial knot の framed surgery から得られる.

(i) $L(m(2n+1)^2, 2m(2n+1)+1)$

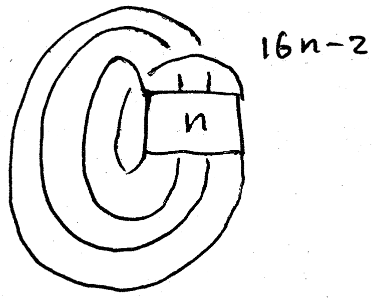
$\cong$



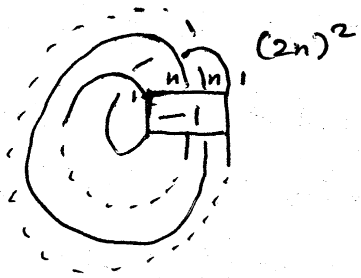
, $\boxed{-m}$ は m-full left handed twists (以下同じ).

(ii) $L(16n-2,\ 6n-1)$

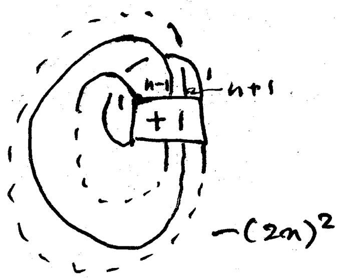
$\cong$



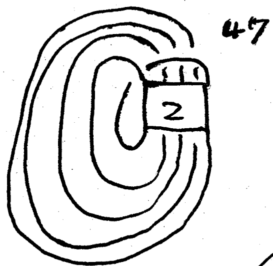
(iii) $L((2n)^2,\ 2(2n)+1) \cong$



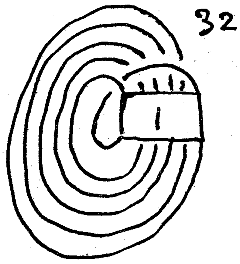
(iv) $L((2n)^2,\ 2(2n)-1) \cong$



(v) $L(47, 18) \cong$



(vi) $L(32, 23) \cong$



<u>Proof.</u> 主張の中の lens space の 
のような framed link 表示を Rolfsen-Kirby Calculus で変形して得られる. 詳細は略す.

次に lens spaces の連結和の surgery 表現は [Mo], [G2] で得られている。これらはすべて torus knot 又は iterated torus knot の Dehn-surgery で得られる。Gordon [G2] は次の問題を提出している.

<u>問題 [Gordon]</u>: 2つの lens spaces の連結和が torus knot 又は iterated torus knot 以外の knot の Dehn-surgery で得られるか?

この問題について次節で少し言及するつもりである. 以上は lens space もしくは その連結和が Dehn-surgery で得られる例であったが, 以下は 2.1. の議論を lens spaces に適用して lens space 特有と思われる現象について述べてゆきたい. lens space 或いは lens spaces の連結和の first homology group の位数が odd と even の場合に分けて議論する.

p が odd の時, lemma 2.1 から次の命題を得る.

<u>Proposition 2.4.</u> $p = odd$ と仮定する.

(1) $L(p,q)=\chi_\Sigma(K:\pm p)$ ならば、
$16\mu(L(p,q))\pm(p-1)\equiv 0\ (8)$ が成り立つ。さらにこれは
$q\equiv\pm$ quadratic residue (p) と同値である。

(2) $\#_{i=1}^{s} L(p_i,q_i)=\chi_\Sigma(K:\pm p)$, $s\geq 2$, $p=\prod_{i=1}^{s} p_i$
ならば、$D\cdot C\equiv\pm 1\ (p)$, 但し $D=\prod_{i=1}^{s} q_i$, C は linking form $A(n)=\left(\begin{array}{ccc|c} p_1/q_1 & & 0 & l_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & p_s/q_s & l_s \\ \hline l_1 & \cdots & l_s & n \end{array}\right)$ の $\det A(n)=n\cdot\det\begin{pmatrix} p_1/q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_s/q_s \end{pmatrix}$
$+C$ と置いた時の定数である。また同じ条件のもとで、μ-invariant は $16\sum_{i=1}^{s}\mu(p_i,q_i)\pm(\prod_{i=1}^{s}p_i-1)\equiv 0\ \ (8)$ となる。

Remark. [HNK] は lens space の μ-invariant の計算公式を上げているが、その Theorem 8.14 で一般の q に対しては $16\mu L(p,q)\pm(p-1)\equiv 0\ (4)$ がいつでも成り立つことを述べている。

Proof. (1)で $16\mu(L(p,q))\pm(p-1)\equiv 0\ (8)$ が成り立つことは lemma 2.1 より明らか。[HNK] は互いに素な整数 p,q に対し、Jacobi symbol $\left(\frac{q}{p}\right)$ が lens space $L(p,q)$ の μ-invariant と次の式で関係付けられていることを示した;

$$\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{4\mu L(p,q)+\frac{p-1}{4}}.$$

また、$\left(\frac{q}{p}\right)$ は $L(p,q)$ の orientation preserving homotopy

type invariant であることも示した。 $q \equiv \pm$ quadratic residue (p) ならば，$L(p,q) \simeq L(p,1)$ or $L(p,-1)$.
$L(p,q) \simeq L(p,1)$ の時，先の関係式を用いて

$(-1)^{4\mu L(p,q) + \frac{p-1}{4}} = \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{1}{p}\right) = 1$ より，$4\mu L(p,q) + \frac{p-1}{4}$: even 従って $16\mu L(p,q) + (p-1) \equiv 0\ (8)$.

また，$L(p,q) \simeq L(p,-1)$ の時，同様に $\left(\frac{q}{p}\right)$ は homotopy invariant だから $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$。 そこで $\left(\frac{-q}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{p-1} = 1$. $\left(\frac{-q}{p}\right) = (-1)^{4\mu L(p,-q) + \frac{p-1}{4}}$ だったから，$4\mu L(p,-q) + \frac{p-1}{4}$: even，従って $4\mu L(p,q) - \frac{p-1}{4}$: even，

故に，$16\mu L(p,q) - (p-1) \equiv 0\ (8)$ を得る。以上 $q \equiv \pm$ quadratic residue mod p ならば $16\mu L(p,q) \pm (p-1) \equiv 0\ (8)$ が言えた。逆は上の証明を逆にたどればよい。

(2) は，lemma 2.1 を用いてただちに得る。 $\square$

この Proposition 2.4 は，lens space もしくはその連結和が homology 3-sphere の framed surgery で得られるための必要条件を与えている。特に $L(p,q)$ が knot の framed surgery で得られるためには $L(p,1)$ 又は $-L(p,1)$ と homotopy 同値でなければならないことを主張している。

Q_f を first homology group の位数 odd の lens space 或いはそれらの連結和に限ると.

<u>Corollary 2.4.1</u>　p: odd とする。

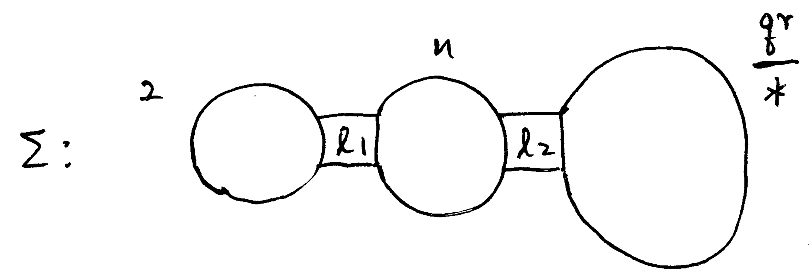
(1) $16\mu L(p,q) \pm (p-1) \neq \pm 4 \ (8)$ ならば $L(p,q)$ は homology 3-sphere (特に S^3) の framed surgery で得られない。

(2) $\#_{i=1}^{s} L(p_i,q_i)$, $p=\prod_{i=1}^{s} p_i$, $s \geq 2$ で. $16\sum_{i=1}^{s}\mu(L(p_i,q_i)) \pm (p-1) \neq \pm 0 \ (8)$ ならば. それは homology 3-sphere (特に S^3) の framed surgery で得られない。

Corollary 2.4.1 で判定される例をいくつか上げる。$L(24k-7,6)$, $L(4k+3,1)\# L(8k+7,1)$, $L(4k-1,1)\#L(4k+1,1)\# L(4k+3,1)$ は homology 3-sphere (特に S^3) の framed surgery では得られない。

最後に first homology group の位数が even の場合に S^3 の framed surgery で得られるかどうかの判定について述べる。これは lemma 2.2 の Corollary 2.2.1 から判定することができるが、lens space $L(p,q)$, 但し p: even かつ 条件 (*) を満たすものについて S^3 の framed surgery で得られないものの例は [F] で与えられているので、ここでは lens space の 2つ以上の連結和に限る。$p = \prod_{i=1}^{s} p_i$ が even かつ条件 (*) を満たし、$\#_{i=1}^{s} L(p_i, q_i)$ の linking form が $L(p, 1)$ のそれと同型であるという要請から、Corollary 2.2.1 は $s = 2$ までで $L(2,1) \# L(q^r, *)$, q : $4k+3$ の形の素数 $r \in \mathbb{Z}^+$ の形の時のみ有効である。

$L(2,1) \# L(q^r, *)$ は次の link に surgery して得られる homology 3-sphere Σ と 2-handle 1個のみからなる 4次元多様体で結ばれている。この homology 3-sphere で μ-invariant が non-zero のものを見つければよい。



$* = 1$ の場合にいくつか見つかったので報告する。

Proposition 2.5.

(1) $L(2,1) \# L(8k^2-1, 1)$, $8k^2-1$: odd prime

(2) $L(2,1) \# L(24k^2+16k+3)$, k : odd $24k^2+16k+3$: prime

(3) $L(2,1) \# L(24k^2+32k+11)$, k : even , $24k^2+32k+11$: prime

は、いずれも S^3 の framed surgery で得られない。

§3. Connected sum について.

任意の closed, orientable 3-manifold M が prime 3-manifolds (irreducible except $S^1 \times S^2$) M_i の connected sum に順序を除いて $M = \overset{s}{\underset{i=1}{\#}} M_i$ と一意に分解されることが Milnor により示されている。 $s \geqq 2$ の時, M は non-irreducible で. decomposition を定める $\mathcal{S}$ = a collection of disjoint, non-parallel incompressible 2-spheres in $\mathring{M}$, $|\mathcal{S}| = s-1$ があることに注意しておく。

この節の目的は, closed, orientable 3-manifold $M = \overset{s}{\underset{i=1}{\#}} M_i$ が knot にそった Dehn-surgery で得られるかという問題とこのような M (特に M_i = lens space の時) が knot にそった Dehn surgery で与えられるためには. s はいくつまで許されるのかということを 3次元 topology の手法を用いて考えてみることである。

はじめに次の結果を紹介する.

<u>Theorem 3.1.</u> (Gordon [G2])

(i) K: any knot ⇒ K にそって係数 r で S^3 を surgery して得られる $(K;r)$ は有限個の $r \in \mathbb{Q}$ を除いて irreducible である.

(ii) K が torus knot でないならば、有限個の $r \in \Omega$ を除いて $\pi_1((K:r))$ は infinite である。

従って特に lens spaces の連結和（基本群は有限）を対象にする試みはあながち無理な試みではないと思われる。以下いくつかの補題をつみあげて、この節の主定理（Theorem 3.6）を証明する。

<u>lemma 3.2</u> K は non trivial knot とする。$(K:r)$ が non-irreducible ならば、K の exterior $X(K)$ 内に incompressible, ∂-incompressible, connected planar surface F with $\partial F = \{$parallel curves of slope $r = m/n$ in $\partial X(K)\}$ が存在する。

Proof. $(K:r) = X(K) \cup S^1 \times D^2$ 内の incompressible 2-sphere S を $S^1 \times D^2$ の軸と transversal な位置に置き、$S \cap S^1 \times D^2$ は meridian disks とできる。$X(K)$ は irreducible 故、$S \cap S^1 \times D^2 = \phi$ ということはない。meridian disk の boundary は $\partial X(K)$ 上で slope $r = m/n$ の curve である。さて $S \cap X(K)$ が incompressible になるまで usual disk argument を用い、その結果を F とする。F が ∂-compressible ならば F は ∂-parallel な annulus ということが [W. (1.10) Lemma]

り分かる。すると S が $S^1\times D^2$ 内に push され，B^3 を張る。従って S の incompressibility に反す。よって F は ∂-incompressible である。

knot exterior 内の properly embedded surface の boundary curves について，次が成り立つことを松本幸夫先生に教えていただいた。

Lemma 3.3. (Y. Matsumoto)　F を $X(K)$ 内の orientable connected (planer) surface で，∂F は $\partial N(K)$ 上の parallel oriented loops (∂F には F から induce される向きを付ける) になっているものとする。それらの代数的和を $\partial[F]$ とする。

この時，$\partial[F]=0$ 又は $\pm K$ が $N(K)$ で成り立つ。$\partial[F]=0$ の時 ∂F の成分の向きは交互に変わり，$\#\partial F$: even であり，$\partial[F]=\pm K$ の時 ∂F の成分は longitude となる。

Corollary 3.3.1.　$r\neq 0$ の時，∂F の成分の個数は偶数。

次は homology の計算で分かる。

Lemma 3.4.　F を properly embedded (incompressible, ∂-incompressible) surface in $X(K)$ で，∂F の成分の個数は偶数となっているならば　F は $X(K)$ を separate する。

$X(K)$内の incompressible, ∂-incompressible planer surface with slope r ($r \neq 0$) は、以上のことから $X(K) = X_1 \cup_F X_2$ と分けるが、X_i がどんなものか知りたい。それは次の Przytycki の結果から分る。

<u>Lemma 3.5</u> ([P : Corollary 4.5]). L : S^3内の link, exterior $X(L)$ が not sufficiently large (i.e. $X(L)$が closed, 2-sided incompressible, not boundary parallel surface を含まない)とする。Fを 2-sided, incompressible, not ∂-parallel surface とすると、$X(L)$をFで切り開いて得られるものが handle bodies の和であるための必要十分条件は $\partial F \cap$ each component of $\partial X(L) \neq \phi$ となることである。

<u>Corollary 3.5.1</u> ~~Knot~~ K の exterior $X(K)$が not sufficiently large の時 Kを not sufficiently large (knot) と呼ぶことにする。Kが S^3内の not sufficiently large knot で、Fを 2-sided incompressible, (∂-incompressible) not ∂-parallel planer surface with $\#\partial F = 2g$ ならば、

$X(K) - \mathring{N}(F) = X_1 \cup X_2$, X_i = handle body of genus g.

となっている。

この Corollary により問題の planer surface の入り方がわかり、我々

の主定理を示すことができる.

Theorem 3.6　K を non-trivial, not sufficiently large knot とする. もしある $r \in \mathbb{Q}$ $(r \neq 0)$ に対し,

$$(K : r) = \mathop{\#}_{i=1}^{s} M_i \quad (M_i : \text{irreducible})$$

となっているとすれば s は 2 以下である, $s \leqq 2$.

Proof　$s \geqq 3$ とする。lemma 3.2 より, incompressible, ∂-incompressible, non-∂-parallel planer surface with slope r $(\neq 0)$ (これらの条件を (* *) とおく) F がある. Corollary 3.3.1 より ∂F の成分の個数は偶数で $F \neq$ disk である. また $s \geqq 3$ より, F に disjoint で F に parallel でない, 条件 (* *) を満たす, disk と異なる別の planer surface F' が存在する. $F' \subset X(K) - \mathring{N}(F) = X_1 \cup X_2$ だが, 一般性を失くことなく $F' \subset X_1$, $\partial F' \subset \partial X_1$ としてよい. ($\partial F' \neq F$ の一) F' は明らかに X_1 で incompressible である。また F' が ∂-incompressible in X_1 が分かる. F' は handle body 内の incompressible, ∂-incompressible surface である. 所が handle body 内のこの2つの性質をみたす surface は disk のみであることが知られているから. $F' =$ disk となり条件 (* *) に反す。$s \geqq 3$ の時, 矛盾が導けた。

Theorem 3.6 の条件を満たす knot は torus knot 又は hyperbolic

で not sufficiently large knot である。今の所 hyperbolic で sufficiently large knot についての連結和の成分の個数の評価式は分からない。torus knot に Dehn surgery して得られる連結和の成分の個数は、実際 2 以下であることが Moser [Mo] により調べられている。

より簡単な結び目から複雑な結び目を作るのが satellite knot である。K の satellite knot $J(K)$ に関する Dehn-surgery の結果は Gordon によって調べられている [G2]。以下連結和の因子を irreducible, not sufficiently large 3-manifold とするような closed orientable 3-manifold を satellite knot から得る場合に問題を制限する。Gordon の次の lemma が有効である。

<u>Lemma 3.7. [G2 : Lemma 3.5 /T]</u> $(J(K):r)$ が w-atroidal (i.e $(J(K):r)$ は incompressible (separating) torus T s.t. $\mathrm{Im}(H_1(T) \to H_1(J(K):r) \cong \mathbb{Z}_m) = w\mathbb{Z}_m$ を持たない, w は J の K に対する winding 数, $r = m/n$) ならば, solid torus 内の curve J に沿って surgery して得られる 3-mfd $(J:r)$ は, $(J:r) \cong S^1 \times D^2 \# P$. P は $(J(K):r)$ の連結和因子と書かれる. $(J(K):r) = (K : r/w^2) \# P$ かつ $(J(0):r) = (0 : r/w^2) \# P$. また $w = 0$ の時 $(J(K):r) = (J(0):r)$ である

Kのsatellite J(K)にsurgeryした結果は Kのsurgeryの結果とJに沿ってsolid torusにsurgeryした結果できるのである。次の場合にTheorem 3.6とLemma 3.7の系として連結和の因子の個数について評価式が求まる。

<u>Corollary 3.8.</u> $(J(K):r) = \#_{i=1}^{\Delta} M_i$, M_iはirreducible かつ not sufficiently large knotとする。Δ'は$(K:r/w^2) = \#_{j=1}^{\Delta'} M_j$で決まるものとする。

この時、 $\Delta' \leqq \Delta \leqq \Delta'+1$.

<u>Proof.</u> $(J(K):r) = \#_{i=1}^{\Delta} M_i = (K:r/w^2) \# P$. また$P$は$(J(0):r) = (0:r/w^2) \# P$, 0はtrivial knot により決まる。$J(0)$はnot sufficiently large よりTheorem 3.6より、$(J(0):r)$から得られる連結和の因子の個数Δ''は$\Delta'' \leqq 2$である。よってPはprimeである。Pの連結和の因子の個数をΔ_pとすると$0 \leqq \Delta_p \leqq 1$.
$\Delta = \Delta' + \Delta_p$ よって $0 \leqq \Delta - \Delta' \leqq 1$ つまり $\Delta' \leqq \Delta \leqq \Delta'+1$.

このCorollaryより $\Delta' \leqq 2$ ならば$2 \leqq \Delta \leqq 3$, $\Delta' = 1$ならば$\Delta \leqq 2$ であることが分かる

最後に予想といくつか問題を述べて終わる。

<u>予想</u> $(K;r) = \#_{i=1}^{n} M_i$, M_i : irreducible $\Rightarrow n \leqq 2$

この予想の根拠は、知られている例はすべて $n \leqq 2$ であるからだが、反例を作るのでも面白いと思う。

knot の Dehn surgery で irreducible かつ not sufficiently large な 3-manifolds の連結和を得るためには、knot の exterior 内の genus $\geqq 2$ の incompressible surface が surgery した結果いかに compress されるか調べなければならない。

<u>問題</u> genus $\geqq 2$ の closed incompressible surface の 3-manifold 内での compressされる状態はどうなっているか？

§3の議論では、Dehn-surgery の係数は整数或いは有理数かということが殆ど問題になっていない。連結和が得られる場合の実例をみるとすべて整数である。そこで、

<u>問題</u> knot exterior 内の incompressible, ∂-incompressible planar surface の slope を決定せよ。

— References —

[F] S. Fukuhara, <u>On an invariant of homology lensspaces</u>, preprint (first version)

[FS] R. Fintushel and R. Stern, <u>Constructing lens</u>

spaces by surgery on knots, Math. Z. 175 (1980), 33–51.

[G1] C. McA. Gordon, Knots, homology spheres and contractible 4-manifolds, Topology 14 (1973), 151–172

[G2] C. McA. Gordon, Dehn surgery and satellite knots, preprint.

[HNK] F. Hirzebruch, W. D. Newmann and S. S. Koh, Differentiable manifolds and quadratic forms, Marcel Dekker, New York (1971).

[M] Y. Matsumoto, On bounding genus of homology 3-spheres, preprint

[Mo] L. Moser, Elementary surgery along a torus knot, Pacific. J. Math 38 (1971), 737–745.

[P] J. H. Przytycki, Incompressibility of surfaces after Dehn surgery, preprint.

[W] F. Waldhausen. Eine Klasse von 3-dimensional manigfaltigkeiten. I, Invt. Math 3 (1967), 308 – 333