数理解析研究所講究録
第467巻 1982年 88-110

Normal 型の Torus Fibration について

東大 理　松本 幸夫

(Yukio Matsumoto)

§1. はじめに. 我々は先に、複素楕円曲面の位相的類似物として, Torus Fibration を定義し、極く一般的な性質を調べた. ([Mt 1], [Mt 2]) たとえば、1, 3 handle のない handle 分解を持つような4次元閉多様体は2次元球面上の Torus Fibration になることなどを示した。この稿では対象をやや制限し, Normal 型の Torus Fibration について考察を進めることにする。すなわち、特異ファイバーとして, normal crossing のみを持つものについて考えるのである. 目標は次の問題である.

問題: Normal 型の Torus Fibration を, (必ずしも fiber を保たない) degree +1 diffeomorphism によって分類せよ。

この問題が解決されれば、次の諸定理の一般化が得られるはずである。

定理.(Kas-Moishezon)[Ka],[Mz]. V_1, V_2 をS^2上の楕円曲面で, multiple fiber を持たず, また, 少くともひとつの特異ファイバーを持つようなものとする. 各ファイバーは例外曲線を含まないと仮定する. このとき, V_1とV_2 が diffeomorphic のための必要十分条件は $b_2(V_1) = b_2(V_2)$ が成りたつことである.

定理.(Zieschang, [Z]). 曲面上のTorus Fibrationで multiple fiber しか持たないものの同型類は, もしそれが"十分複雑なら", 基本群によって決定される.

定理.(坂本-福原, [SF]). T^2上のT^2バンドルの分類.

このノートでは, 残念ながら上の問題の解決には到らないが, 以下, Normal型のTorus Fibrationに関する基本的事実(特異ファイバーの分類, monodromy, ホモロジー4球面, Twin S.f. の変形等)および, 特異ファイバーの張り換え技術について述べる. また, 上の問題の部分的解決として次の2つの定理を証明する.

定理. 6.1. 単連結なNormal型T.F. Mの交叉形式が正定符号なら, Mは $\mathbb{CP}_2$ の有限個の連結和に diffeomorphic である.(multiple fiber は無いものとする.)

定理. 7.1. 特異ファイバーとして I_1^+, I_1^- のみを許すS^2上

のT.F. M の diffeo. class は、符号数 $\sigma(M) \neq 0$ のとき、$\sigma(M)$ とオイラー数 $e(M)$ で分類できる. (特異ファイバーの記号 $\mathrm{I}_1^{\pm}$ については§2参照.)

後の定理は前述のKas-Moishezonの定理の(実はささやかな)一般化である.

Normal型 Torus Fibrationの定義を述べて§1を終る.

定義. M, Bをそれぞれ, smooth, oriented 4-又は2-mfd とし, $\partial M = \phi = \partial B$ と仮定する. Smooth map

$$f : M \longrightarrow B \quad (\text{proper, onto})$$

が Normal 型 Torus Fibration (略してNTF.)とは, Mの各点においてfのgermが, $\mathbb{C}^2$ の原点における $z_1^p z_2^q$ 又は $\bar{z}_1^p z_2^q : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ のgermに(向きもこめて)同値であり, かつ, fの一般ファイバーが2次元トーラスに微分同相であることを言う. ($z_1^p z_2^q$ 又は $\bar{z}_1^p z_2^q$ における p, q は, $p \geqq 0$, $q \geqq 0$, $p+q \geqq 1$ であるような整数. gcd(p, q) = 1 は仮定しない.) $\partial M \neq \phi$, $\partial B \neq \phi$ の場合, proper onto な smooth map $f : M \to B$ が NTF. であるとは, $f | \mathrm{Int}(M) : \mathrm{Int}(M) \to \mathrm{Int}(B)$ が上述の意味で NTF. であり, かつ, ∂B の適当な collar C の上で $f | f^{-1}(C) : f^{-1}(C) \to C$ が T^2-バンドルになっているものを言う.

§2. 特異ファイバーの分類. $f: M \to B$ をNTFとし $F_x = f^{-1}(x)$ $(x \in B)$ をひとつのファイバーとする. $D_\varepsilon(x)$ で, x を中心とし半径 $\varepsilon > 0$ であるような B の円板を表わす. 制限 $f | f^{-1}(D_\varepsilon(x)) : f^{-1}(D_\varepsilon(x)) \longrightarrow D_\varepsilon(x)$ が円板上の T^2-バンドルのとき, F_x を一般ファイバーとよび, 然らざるとき, 特異ファイバーとよぶ.

明らかに, ($\varepsilon > 0$ が小なら) $f^{-1}(D_\varepsilon(x))$ は F_x を変形レトラクトとして持つ. また F_x は smooth に埋め込まれた2次元球面 S^2 又はトーラス T^2 の和集合である. ([Mt 2] 参照). これ等の S^2 又は T^2 を F_x の既約成分とよび, 一律に $\Theta_1, \cdots, \Theta_s$ と表わそう. Θ_i, Θ_j $(i \neq j)$ が交わる時は有限個の点で transverse に交わる. M, B が oriented であることから, 各 Θ_i には自然に向きが定まり, $H_2(f^{-1}(D_\varepsilon(x)); \mathbb{Z})$ の元 $[\Theta_i]$ を unique に定める. $f^{-1}(D_\varepsilon(x))$ に含まれる一般ファイバーの定めるホモロジー類 $[T^2]$ を $[T^2] = \sum_{i=1}^{s} m_i [\Theta_i]$ と表わしたとき, 係数 $(m_i \geq 1)$ を multiplicity とよぶ.

$f^{-1}(D_\varepsilon(x))$ は $\bigcup_{i=1}^{s} \Theta_i$ を心棒にする plumbing であって, その manifold としての構造は, plumbing diagram 及び, 各 $p \in \Theta_i \cap \Theta_j$ における交わりの符号 $\varepsilon = \pm 1$ を指定すれば決まる. 更に Torus Fibration $f | f^{-1}(D_\varepsilon(x)) : f^{-1}(D_\varepsilon(x)) \longrightarrow D_\varepsilon(x)$ の構造は, 各 Θ_i の multiplicity m_i を指定する

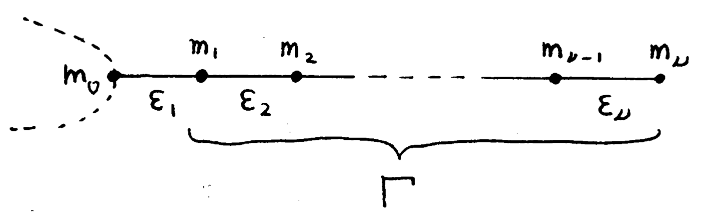
ことにより定まる．以下特異ファイバーを weighted graph で表わすが，頂点は S^2 を表わし，2頂点が n 本の辺で結ばれているとき，対応する S^2 は n 個の点で transverse に交わるものと約束する。（大抵は $n=0$ or 1）辺上の符号は交わりの符号，頂点の weight は multiplicity m_i $(\geqq 1)$ である．（頂点の weight は self-intersection number ではない．！）

注意 2.1. multiplicity m_0 を持つ既約成分 Θ_0 が，他の既約成分 $\Theta_1, \cdots, \Theta_t$ と（しかも，これらの既約成分とだけ）1点で transverse に交わっているとする．Θ_i の multiplicity を m_i，$\Theta_0 \cdot \Theta_i = \varepsilon_i$ $(=\pm 1)$ とする．このとき self-intersection $\Theta_0 \cdot \Theta_0 = -\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i m_i\right) / m_0$ である．

（証明）一般ファイバーと特異ファイバーは交わらないから，

$$0 = [T^2] \cdot [\Theta_0] = m_0 \Theta_0 \cdot \Theta_0 + \sum_{i=1}^{t} m_i (\Theta_i \cdot \Theta_0). \qquad \text{Q.E.D.}$$

Weighted graph 中の線形枝 Γ を考える：



(p)

線形枝においては，$\gcd(m_0, m_1) = \gcd(m_1, m_2) = \cdots = \gcd(m_{\nu-1}, m_\nu) = m_\nu$ が成り立つ．上図の右端のカッコ中

の数 p は　$p = m_o / m_\nu$　で与えられる整数である．$p = 1$ であるような線形枝を除き得る線形枝（RLB）と言う．

補題 2.2.　RLB の正則近傍の境界は S^3 である．

（略証）それは明らかに lens 空間であるから，$H_1 = 0$ を示しさえすればよい．$p = 1$（i.e. $m_o = m_\nu$）の条件を用いて，当該線形枝の intersection form が unimodular なことがわかる．　Q.E.D.

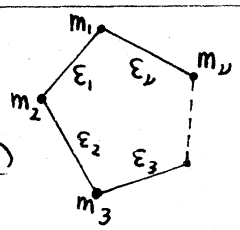
Neumann-Weintraub により，RLB を除いて4次元円板 D^4 で貼り替えて得られる mfd M' は，貼り替え前の mfd M と，$M = M' \# S^2 \times S^2 \# \cdots \# S^2 \times S^2$ 又は $M = M' \# \pm \mathbb{C}P_2 \# \cdots \# \pm \mathbb{C}P_2$ のような関係にある．（[NW]）　また RLB 付近の Fibration の構造を考察することにより，M' も M と共通の底空間 B 上の NTF であり，特異ファイバーを表わす weighted graph は，除いた RLB の分しか異ならないことがわかる。従がって，全体の微分同相類を問題にする限り，RLB を含まない NTF のみを考えれば十分である．

定理 2.3.　RLB を含まない Normal 型の特異ファイバーは以下の6クラスに分類される．（線形枝の端のカッコ内の数

は上述の p-数である.)

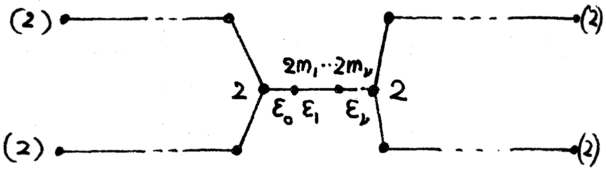
(i) mI_0 型：(multiple torus) Seifert 型の fibered nbd $\times S^1$ に同値である.(M.C. Thornton [Th].)

(ii) $\tilde{A}$ 型：グラフは cyclic.



条件として $\gcd(m_1, m_2) = \gcd(m_2, m_3) = \cdots = \gcd(m_\nu, m_1)$. かつ $m_i \mid \varepsilon_{i-1} m_{i-1} + \varepsilon_i m_{i+1}$.

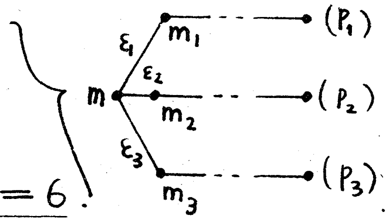
(iii) $\tilde{D}$ 型：グラフは右図.



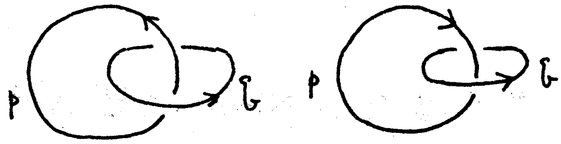
(iv) $\tilde{E}_6$ 型：$m = 3$, $p_1 = p_2 = p_3 = 3$.

(v) $\tilde{E}_7$ 型：$m = 4$, $p_1 = 2$, $p_2 = p_3 = 4$.

(vi) $\tilde{E}_8$ 型：$m = 6$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 6$.



(略証) これ等の graph の分類は基本的には Scharf [Sch] あるいは Neumann [N] によりなされている. この特異ファイバーのまわりの Torus Fibration の様子はより詳しい幾何的考察による. すなわち, 既約成分の交点付近では, 射影 $f: M \to B$ の germ は $z_1^p z_2^q$ 又は $\bar{z}_1^p z_2^q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ の原点における germ に同値. よって Torus Fibration は, そこでは local に 'multiple(±) Hopf link'(下図) の cone の形である.



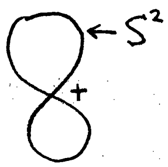
'multiple fibered link' として, この link の fiber は.

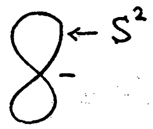
$\gcd(p, q)$ 個の annulus からなる. また monodromy もわかる. 上述のグラフに沿ってこれ等の annuli をつなげて行き, Torus Fibration が構成される. $\square$

<u>定義</u>. 特異ファイバー $F = \sum_{i=1}^{s} m_i \Theta_i$ において, $\gcd(m_1, m_2, \cdots, m_s) > 1$ であるとき, F を <u>multiple fiber</u> とよぶ.

multiple fiber になり得るのは mI_0 型, $\tilde{A}$ 型の2つに限る. (i.e. 単連結でないもの.) 小平先生のホモトピー K3 曲面の問題のように, multiple fiber の現われる場合のトポロジーは難しそうである.

<u>注意</u>. $\tilde{A}$ 型において, $\nu = 1$ の場合は, 1個の transverse self-intersection point を持つ immersed S^2 である. 更に $m_1 = 1$ のとき $\varepsilon_1 = +1$ 又は -1 に応じて, その特異ファイバーを I_1^+ 又は I_1^- で表わす. このまわりの monodromy

$I_1^+ =$ 

$I_1^- =$ 

は $\varepsilon_1 = +1$, -1 に応じてそれぞれ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ である.

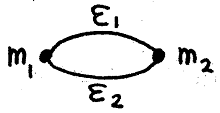
<u>注意</u>. 交叉の符号 ε が全て $+1$ の場合, 上記特異ファイバーは Kodaira 型又はその blown up に一致する: $\tilde{A} \to I_b$, $\tilde{D} \to I_b^*$, $\tilde{E}_6 \to \{\mathrm{IV}, \mathrm{IV}^*\}$, $\tilde{E}_7 \to \{\mathrm{III}, \mathrm{III}^*\}$, $\tilde{E}_8 \to \{\mathrm{II}, \mathrm{II}^*\}$.

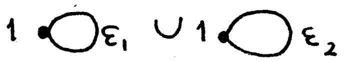
§3. Monodromy. 前節で分類した特異ファイバーのまわりの monodromy について述べる. $\mu, \lambda \in H_1(T^2; \mathbb{Z})$ を, $\mu \cdot \lambda = +1$ であるような適当な basis とし, それに関する matrix により表示する: $(h(\mu), h(\lambda)) = (\mu, \lambda)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
(下の定理中の m_i, ε_i の意味については定理2.3の図参照.)

定理3.1. (i) $m_0 I_0$型の monodromy は trivial.
(ii) $\widetilde{A}$型の monodromy は $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ここに $b = (\varepsilon_1/m_1 m_2) + \cdots + (\varepsilon_\nu/m_\nu m_1)$. (iii) $\widetilde{D}$型は $\begin{bmatrix} -1 & -b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. ここに $b = (\varepsilon_0/m_1) + (\varepsilon_1/m_1 m_2) + \cdots + (\varepsilon_{\nu-1}/m_{\nu-1} m_\nu) + (\varepsilon_\nu/m_\nu)$. (iv) $\widetilde{E}_6$型. $\varepsilon_3 m_3 \equiv -1 \pmod 3$ 又は $\varepsilon_3 m_3 \equiv 1 \pmod 3$ に応じて $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 又は $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. (v) $\widetilde{E}_7$型. $\varepsilon_3 m_3 \equiv -1 \pmod 4$, $\varepsilon_3 m_3 \equiv 1 \pmod 4$ に応じて, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 又は $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. (vi) $\widetilde{E}_8$型. $\varepsilon_3 m_3 \equiv -1 \pmod 6$, $\varepsilon_3 m_3 \equiv 1 \pmod 6$ に応じて $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 又は $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

§4. ホモロジー4球面. §1で述べた問題の非常に特別の場合として次の定理を証明する.

定理4.1. $f: M \to B$ を, multiple fiber を含まない NTF とする. そのとき, Mがホモロジー4球面であれば, M は S^4 に diffeomorphic である.

（証明） $H_*(M;\mathbb{Z})\cong H_*(S^4;\mathbb{Z})$ と仮定する．もしMがRLBを含めば $M=M'\# S^2\times S^2\#\cdots$ 又は $M=M'\#\pm\mathbb{C}P_2\#\cdots$ であるから（cf. §2），Mはホモロジー4球面になり得ない．従がってMの特異ファイバーは定理2.3のそれと一致する．Mのeuler数 $e(M)=2$ は特異ファイバーのeuler数の和である．定理2.3の中から euler # $\leqq 2$ のものを探すと，Mの特異ファイバーとして可能なものは，

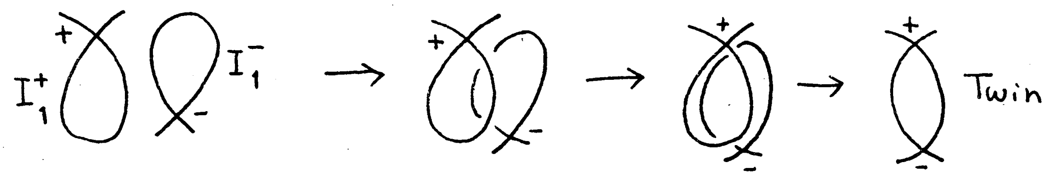
および，

の2種類である．

<u>前者の場合</u>．m_1－頂点の self-int. number は注意2.1により $-(\varepsilon_1 m_2+\varepsilon_2 m_2)/m_1$．一方 $H_2(M;\mathbb{Z})=0$ であるからこの数は0に等しく 結局 $\varepsilon_1=-\varepsilon_2$ である．そして，multiple fiberでないから，$\gcd(m_1,m_2)=1$．このfiberの正則近傍Nは Montesinos' Twin [Mo] に他ならない．定理3.1によりmonodromyは自明である．よって $M=N\cup T^2\times D^2$ と分解される．[Mo Cor. 5.6] と同様の議論によって，$M\cong S^4$ が示される．（$S^4=N\cup T^2\times D^2$ に現われる attaching diffeo. と N の分解に現われる attaching の差 $\partial N\to\partial N$ が，N の diffeo. に拡張可能な事を示すのである．）

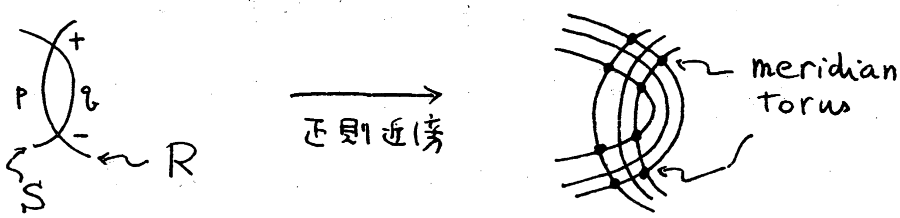
<u>後者の場合</u>．前者の場合もそうであるが，$H_1(M;\mathbb{Z})=0$ であるから $B=S^2$ でなくてはならない．2つの特異ファイバー $I_1^{\varepsilon_1}, I_1^{\varepsilon_2}$ の singular loci は S^2 の北半球 D_+^2 に属する

と仮定してよい．南半球 D^2_- では自明な T^2-バンドルだから ∂D^2_+ をまわる monodromy は自明である． $SL(2,\mathbb{Z})$ の abel化 $\cong \mathbb{Z}/12$ であること，及び $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ が $\mathbb{Z}/12$ の生成元になる事を考えあわせると，$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ でなくてはならない．すなわち特異ファイバーは I_1^+ と I_1^- とから成る．この両方をいっぺんに回る monodromy が自明なことから，両者の位置関係は下図のようになっている．"Deformation" によ



り互いの距離を接近させて行くと，遂に両者は重なり合って1本のTwinになる．(上図)．従がって議論は前者の場合に帰着された．Q.E.D.

§5．<u>特異ファイバーの貼り替え</u>．はじめにTwinの貼り替えを考えよう．Twinは $\tilde{A}$ 型の特別な場合で，その一般型は下図のように p, q により表わされる．multiplicity p (or q)



を持つ 2 sphere を R (or S) と書く．正則近傍は $R\times D^2 \cup D^2\times S$

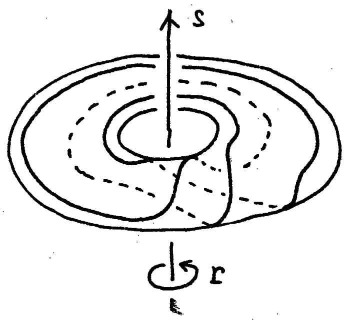
の形の plumbing である. $x\times\partial D^2$ $(x\in R)$ 又は $\partial D^2\times y$ $(y\in S)$ をそれぞれ R 又は S の meridian とよび, r, s で表わす. 2交点 $R\cap S$ のまわりに, meridian torus がひとつずつあり, その H_1 の生成元は r, s である. meridian torus を τ, τ' で表わす.

正則近傍は D^2 上の NTF であり, その境界は S^1 上の T^2-バンドルである. 定理3.1 によれば, monodromy は p, q に依らず自明である. よって, 与えられた Twin singular fiber をひきぬいて, 別の multiplicity (例えば m, n) を持つ Twin singular fiber で置きかえる操作が考えられる. この操作で, Torus Fibration の構造は変るが, 全体の diffeomorphism class は, どう変るか (又は変らないか) が問題である. (なお, $\gcd(p,q)=\gcd(m,n)=1$ を仮定する.)

multiplicity (p,q) 又は (m,n) を持つ Twin の正則近傍を $N(p,q)$ 又は $N(m,n)$ で表わす. Fiber preserving diffeo. $\varphi:\partial N(p,q)\longrightarrow\partial N(m,n)$ を次のように構成する.

まず次の事に注意しよう. 自明な T^2-bundle $\partial N(p,q)\longrightarrow S^1$ の任意の fiber T^2 と, $\partial N(p,q)$ 内の meridian Torus τ とは transverse に交わり, その交線は τ 上の torus knot である. (次頁上図). また, その torus knot の type は $K(p,-q)$ である. (すなわち, left-handed!)

meridian torus
(＋の交点の所)



r は心棒

$p=2,\ q=3$ の場合

このことは次のようにしてわかる．＋の交点のまわりで，local に複素座標 z_1, z_2 を入れ，$z_1=0$ が R に，$z_2=0$ が S に対応しているとする．Torus Fibration $N(p,q) \longrightarrow D^2$ の germ は $z_1^p z_2^q = 0$ である．meridian torus は，半径 ε の球面 $|z_1|^2+|z_2|^2=\varepsilon^2$ と $|z_1|=|z_2|$ の共通部分に同一視される．すなわち，パラメータ θ, φ $(0 \leqq \theta, \varphi \leqq 2\pi)$ を用いて，τ: $z_1=(\varepsilon/\sqrt{2})\,e^{\sqrt{-1}\theta}$, $z_2=(\varepsilon/\sqrt{2})\,e^{\sqrt{-1}\varphi}$ と表わされる．τ と fiber T^2 の交線は，τ 上で $z_1^p z_2^q > 0$ なる式で表わされると考えられる．実際

$$z_1^p z_2^q = (\varepsilon/\sqrt{2})^p (\varepsilon/\sqrt{2})^q e^{\sqrt{-1}(p\theta+q\varphi)} > 0$$

を解くと $p\theta + q\varphi = 0$ を得る．これは $K(p,-q)$ に他ならない．

同様に－の所の meridian torus τ' 上では，fiber T^2 は right handed torus knot $K(p,q)$ になり，$\tau\times[0,1]$ と $\tau'\times[0,1]$ の境界を ori. rev. な diffeo で同一視したもの（それが $\partial N(p,q)$ に他ならない）の中に fiber T^2 は，

$K(p,-q)\times[0,1]\cup K(p,q)\times[0,1]$ として入っている．以上の考察は $\partial N(m,n)$ についても全く同様である．いま，fiber pres. diffeom. $\varphi:\partial N(p,q)\longrightarrow\partial N(m,n)$ が τ を τ に，τ' を τ' に写し，しかも τ の中の $K(p,-q)$ を τ の中の $K(m,-n)$ に写しているとき <u>admissible</u> と呼ぶ．

<u>補題 5.1.</u> <u>(必ずしも fiber pres. ではない) diffeomorph. $\tilde{\varphi}:N(p,q)\longrightarrow N(m,n)$ に拡張するような admissible diffeomorphism $\varphi:\partial N(p,q)\longrightarrow\partial N(m,n)$ が存在するための必要十分条件は $m+n\equiv p+q\pmod 2$ である.</u>

(証明) $\partial N(p,q)=T^3=\partial N(m,n)$ の標準的 basis として，前述の meridians r, s 及び longitude ℓ がとれる．ℓ は，meridian tori τ,τ' に1回ずつ transverse に交わる loop である．この basis (ℓ,r,s) に関して，φ は 3×3 行列で表わせる．(φ は任意の admissible diffeom.)

$$(5.1)\qquad \begin{bmatrix}\varphi(\ell)\\ \varphi(r)\\ \varphi(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&*&*\\0&\alpha&\beta\\0&\gamma&\delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ell\\ r\\ s\end{bmatrix},\quad(\alpha\delta-\beta\gamma=1)$$

このとき，次の Montesinos の定理 [Mo, Thm 5.3] がある．

<u>定理 5.2</u> (Montesinos). <u>(5.1) で表わされる diffeom. φ が</u>

あるdiffeom. $\tilde{\varphi}: N(p,q) \to N(m,n)$ に拡張するための必要十分条件は $\alpha+\beta+\gamma+\delta \equiv 0 \pmod 2$ である。(なお、$N(p,q)$ と $N(m,n)$ とは Torus Fib. の構造が違うだけで、両者とも同じ mfd と考えられる。補題5.1に合わせるため、この記号を使ったが、定理5.2の主張の中では、本質的でない。)

補題5.1の証明を、まず $p=q=1$ の場合に行う。この中の torus knots $K(1,-1)$, $K(m,-n)$ の表わすホモロジー類はそれぞれ $r-s$, $nr-ms$ である。(5.1)で表わされる diffeomorphism が admissible のためには $\varphi(r-s) = nr-ms$ が必要十分。これを係数で書くと、$\alpha-\gamma=n$, $\beta-\delta=-m$ となる。$\alpha\delta-\beta\gamma=1$ の条件より $(\gamma+n)\delta-(\delta-m)\gamma=1$, すなわち $n\delta+m\gamma=1$. $\gcd(m,n)=1$ であるから、このような δ,γ は存在する。このとき、$\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\gamma+n)+(\delta-m)+\gamma+\delta \equiv n+m \pmod 2$. よって、admissible diffeom. が $\tilde{\varphi}$ に拡張する必要十分条件は定理5.2により $n+m\equiv 0$.

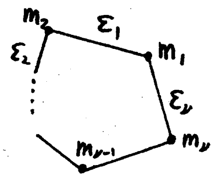
次に $p=1$, $q=2$ の場合を考える。admissibleのための必要十分条件は $\varphi(2r-s)=nr-ms$. これから、$\gamma=2\alpha-n$, $\delta=2\beta+m$ を得る。また $\det=1$ の条件より $\alpha m+\beta n=1$.

以上から $\alpha+\beta+\gamma+\delta \equiv \alpha+\beta+m+n \pmod 2$ となる．もし m, n ともに odd（従がって $m+n \not\equiv 1\ (2)$）なら，det $=1$ の条件より $\alpha+\beta \equiv 1$．よって $\alpha+\beta+\gamma+\delta \equiv 1$ となり，定理5.2により，φ は $\tilde{\varphi}$ に拡張しない．もし，m, n の一方が odd，他方が even（すなわち $m+n \equiv 1\ (2)$）とすると，$\alpha+\beta \equiv 1$ なら拡張するが，α, β ともに odd のときは，$\alpha' = \alpha - n$，$\beta' = \beta + m$ と取り直すことにより，$\alpha'+\beta'+m+n \equiv 0$ であるような admissible diffeo. が得られ，やはり拡張する．

一般の (p, q) の場合には，$p+q \equiv 0, 1$ に従がって，$(1, 1)$ 又は $(1, 2)$ に写しておいて議論すればよい．Q.E.D.

補題5.1によれば，mfd全体の diffeom. class を変る事なく，Twin singular fiber の multiplicity を $(1, 1)$ 又は $(1, 2)$ に変ることができる．

次に，（multiple fiber でないような）一般の $\tilde{A}$ 型特異ファイバーを考える．

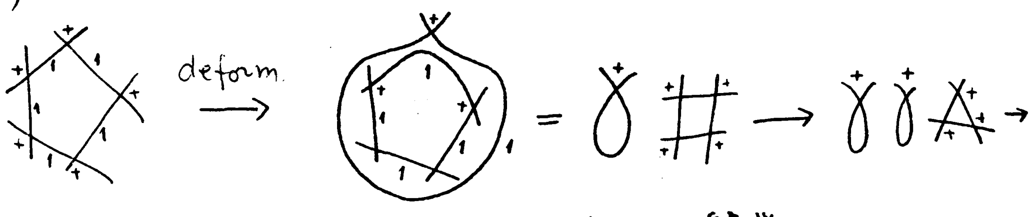


<u>補題5.3.</u> <u>$\tilde{A}$ 型ファイバーにおいて $\gcd(m_i, m_{i+1}) = 1$ とする．このとき次の(i)，(ii)，(iii)のどれか少くともひとつが成り立つ．(i) self-int. # $=0$ の球面を含む．(ii) self-int. # $=\pm 1$ の球面を含む．(iii) $m_1 = m_2 = \cdots = m_\nu = 1$ かつ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_\nu$．</u>

(補題5.3は、笹野一洋氏によるComputer実験の結果から気がついた。ここで同氏に感謝します。)

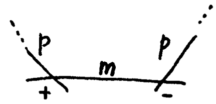
(証明) $\nu \leqq 2$ の時は容易であるから、$\nu \geqq 3$ とする。i番目の球面のself-int.#は(注意2.1により) $-(\varepsilon_{i-1}m_{i-1}+\varepsilon_i m_{i+1})/m_i$ に等しい。 すべての i について $|(\varepsilon_{i-1}m_{i-1}+\varepsilon_i m_{i+1})/m_i| \geqq 2$ のとき、(iii)が成立つことを言う/ この不等式から、$m_{i-1}+m_{i+1}\geqq 2m_i$ を得る。もし $m_1=\cdots=m_\nu$ なら gcd$=1$ より、共通の値は1、よって(iii)がなりたつ。(ε_i が変化すれば(i)が成立。)。もし $m_1<m_2$ なら、($m_1+m_3\geqq 2m_2$ より) $m_2<m_3$ を得る。同様に $m_2<m_3$ から $m_3<m_4$ を得て、$m_1<m_2<\cdots<m_\nu<m_1$ となり矛盾。 Q.E.D.

補題5.3(ii)の場合は mfd 全体を blow down できる。また(iii)の場合($\varepsilon_1=+1,-1$ に従がって ±Kodaira型とよぶ)は、ν個の I_1^+ 又は I_1^- に deformation によって split する(下図。)



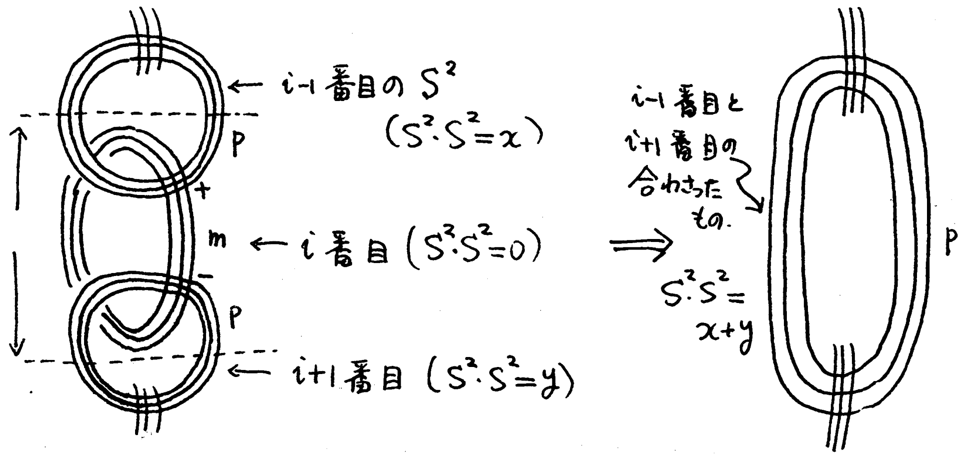
(i)の場合は、以下に述べる貼り替え操作で簡単化できる。

i番目のS^2のself-int.$=0$であるとすれば、注意2.1の公式から、$m_{i-1}=m_{i+1}$, $\varepsilon_{i-1}=-\varepsilon_i$ である。よって、$m_i=m,$

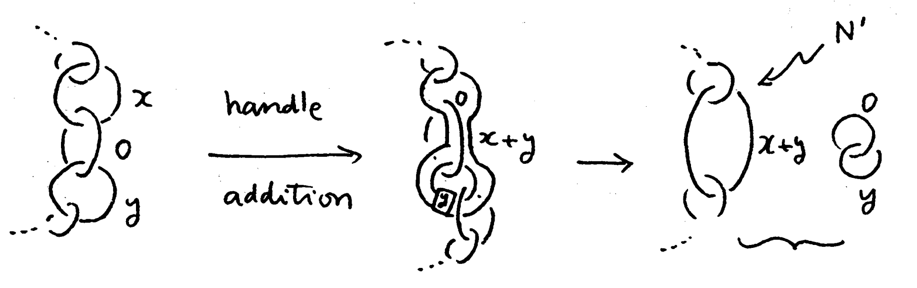
$m_{i-1}=m_{i+1}=p$ とおけば、

という形をしている。これを 

で貼り替えたり、その様子を詳しく見ると、下図のようである。



上図のように切り取るとき、i-1番目の切り口には$(p,-m)$型のtorus knotが現われ、i+1番目の切り口には(p,m)型のtorus knotが現われる。両者をori. rev. diffeoで同一視したものが右図である。この操作によりmonodromyは不変である。(例えば、定理3.1よりわかる。) 左及び右の特異ファイバーの正則近傍をそれぞれN, N′とおくと、mfdsとして、NとN′はどんな関係にあるだろうか。Kirby calculusで調べてみる。下の左はNを表わす。これは右図のように変形できる。

N = 

従がって、$i+1$ 番目の S^2 の self-int. $= y$ が even 又は odd に応じて、$N \cong N' \# S^2 \times S^2$ 又は $N \cong N' \# S^2 \tilde{\times} S^2$ である。

補題5.1と5.3，及びこの貼り替え操作を合わせて，次の命題を得る。（ $S^2 \tilde{\times} S^2 \cong \mathbb{C}P_2 \# \overline{\mathbb{C}P_2}$ に注意）

命題5.4. $\tilde{A}$型（multipleでないもの）の特異ファイバーを持つNTFから，適当に $\mathbb{C}P_2$, $\overline{\mathbb{C}P_2}$, $S^2 \times S^2$ を（連結和の逆の操作で）取り除くことにより，$\tilde{A}$型は，I_1^+, I_1^-, (2.1) Twin の3種のうちどれか（ひとつとは限らない）としてよい。

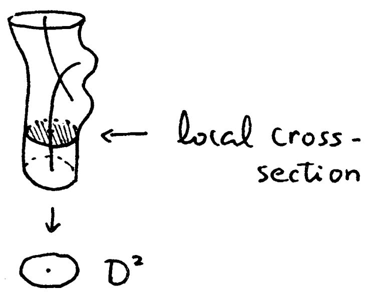
§6. Positive definite intersection forms. 次の定理を示そう。以下NTFは multiple fiber を持たないと仮定する。

定理6.1. Mは closed connected 4-mfd で $H_1(M;\mathbb{Z})=0$ とする。MがNTFで，Mの intersection form が positive definite なら，Mは $\mathbb{C}P_2 \# \cdots \# \mathbb{C}P_2$ に diffeomorphic である。

（証明）Mから，$S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P_2$, $\overline{\mathbb{C}P_2}$ 等を取り除くことにより，Mの特異ファイバーはRLBを含まないとしてよい。（なお，Mは positive def. と仮定したから，この時取り除かれるのは，有限個の $\mathbb{C}P_2$ のみである。）まず次の補題を示そう。

補題6.2. Mが positive def. なら、$\tilde{D}, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ 型の特異ファイバーは含まない。（M: conn. かつ $H_1(M)=0$.）

(証明) これ等の特異ファイバーはいずれも単連結である。また、(適当な線形枝の端点)として、multiplicity 1 の S^2 を含んでいる。よって local cross section がある。$\tilde{A}$ 型の特異ファイバーにも local cross-section はある。(2つの S^2 の交点のまわりの meridian torus 上の、トーラス knot の cone. この場合の local cross-section は smooth ではない.)



Mは、$H_1(M)=0$ より、S^2 上の NTF であって、特異ファイバーを除いた所では自明な T^2-バンドル。よって、そこでは global cross-section がある。従がって特異ファイバーを適当に貼り替えると global cross-section を持つ M' を得る。(この場合の貼り替えは、§5のように特異ファイバー自身を変化させるものではなく、単に貼り合わせの fiber pres. diffeom. を変えるだけ.) この貼り替えにより、M' の euler 数と符号数はもとのMと変らない。$e(M')=e(M)$. $\sigma(M')=\sigma(M)$. もし、Mが $\tilde{D}, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ 型のような単連結の特異ファイバーを含めば、($\pi_1(M')$ の生成元は $\pi_1(T^2)$ から来るから)、M' も単連結である。よって $e(M')=e(M)$ から、

$b_2(M') = b_2(M)$ が従がう．M' は global cross-section があり．それによる底空間 S^2 の像を再び S^2 と書けば，fiber T^2 との間に $[S^2]\cdot[T^2] = 1$，$[T^2]\cdot[T^2] = 0$ のように交わる．よって M' は positive def. でない．よって $b_2(M') > |\sigma(M')|$．これから $b_2(M) > |\sigma(M)|$ がわかり，M が posi. def. であった事に反する．ゆえに $\tilde{D} \sim \tilde{E}_8$ 型のファイバーは含まない．QED

(定理 6.1 の証明の続き.) M の含む特異ファイバーは $\tilde{A}$ 型のみである．命題 5.4 により，M から $\mathbb{C}P_2$, $\overline{\mathbb{C}P_2}$, $S^2 \times S^2$ 等を取り除くことにより，M の特異ファイバーは $I_1^{\pm}$ 及び Twin のみであるとしてよい．この際も，M の posi. def 性より，切り取られるのは実は $\mathbb{C}P_2$ のみである．Harer の index 定理を次のように少し拡張したものを利用する．

<u>定理 6.3</u>. (cf. Harer [H , Thm 3.14]) <u>M は NTF とし，その特異ファイバーは a 本の I_1^+，b 本の I_1^-，c 本の Twin からなるとする．そのとき M の符号数 $\sigma(M)$ は $\sigma(M) = (2/3)(a-b)$ で与えられる．しかも $a - b \equiv 0\ (12)$ である．</u>

さて．M の euler 数は $e(M) = a + b + 2c$ であり，も

し，$H_1(M)=0$，M : conn. なら $b_2(M)=a+b+2c-2$ である．従がって，M が positive def. なら $a+b+2c-2=(2/3)(a-b)$ でなければならない．この式と $a-b\equiv 0\ (12)$ から，$(a,b,c)=(0,0,1)$ or $(1,1,0)$ を得る．いずれの場合も，M はホモロジー4球面であり，定理4.1 から，$M\cong S^4$ である．有限個の $\mathbb{C}P_2$ を取り除いて S^4 を得たわけだから，もとの M は $\cong \mathbb{C}P_2 \# \cdots \# \mathbb{C}P_2$ である．Q.E.D.

§7. Kas-Moishezon の定理の拡張．次の定理は初め証明を与える予定だったが，原稿用紙が尽きてしまったので主張を述べるに止める．

定理 7.1. 特異ファイバーとして I_1^+, I_1^- のみを許す S^2 上の NTF の diffeomorphism class は，$\sigma(M)\neq 0$ のとき，符号数 $\sigma(M)$ と euler 数 $e(M)$ で決まる．

証明のポイントは．Moishezon の本 [Mz] Appendix II にある R. Livne の定理を少し拡張することである．幾何的な議論は [Mz] pp 180−191 と平行に進む．

§∞. 付記．定理 3.1 より，monodromy の $|\mathrm{trace}|\leqq 2$．そして．
$T_r=2 \Leftrightarrow m_0I_0$ or $\tilde{A}$．$T_r=1\Leftrightarrow \tilde{E}_8$，$T_r=0\Leftrightarrow \tilde{E}_7$，$T_r=-1\Leftrightarrow \tilde{E}_6$，$T_r=-2\Leftrightarrow \tilde{D}$．

References

[H] J. Harer, Pencils of curves on 4-manifolds, Thesis (1979) UCB

[K] A. Kas, On the deformation types of Regular elliptic surfaces, Complex Analysis and Alg. Geo, Camb U.P (1977), 107–112.

[Mt 1] Y. Matsumoto, On 4-manifolds fibered by Tori, To appear in Proc. Japan Acad (1982)

[Mt 2] Y. Matsumoto, A topological study of 4-dim. T.F., I, (in prep.)

[Mz] B. Moishezon, Complex Surfaces and Conn. Sum..., Springer LNM #603

[Mo] J.M. Montesinos, On Twins in the four-sphere (to appear)

[N] W.D Neumann. A calculus for plumbing ..., Trans. AMS 268, (1981) 299–344

[NW] W.D. Neumann - S.H. Weintraub, Four-manifolds constructed via plumbing, Math. Ann, 238 (1978), 71–78

[SF] K. Sakamoto - S. Fukuhara, Classification of T^2-bundle over T^2 (本講究録)

[Sch] A. Scharf, Zur Faserung von Graphenmannigfaltigkeiten, Math. Ann. 215, 35–45 (1975).

[Th] M.C. Thornton, Singularly fibered manifolds, Illinois J. Math. 11, 189–201 (1967)

[Z] H. Zieschang, On Toric fiberings over surfaces, Math Zametki 5 (1969) = Math. Notes 5 (1965), 341–345.